

## COORDINACIÓN DE LOS DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTACIÓN EN EL ESTUDIO DE LA CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR TRES PUNTOS: ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

Manuel Alfredo Urrea Bernal, María Antonieta Rodríguez Ibarra, Luis Enríquez Chapa  
Universidad de Sonora México  
maurr@gauss.mat.uson.mx, mariaa.rodriguez@gmail.com, luis.cetmar@gmail.com

**Resumen.** En este trabajo se presentan los resultados que se han obtenido al participar en el diseño e implementación de actividades didácticas para el estudio de la circunferencia que pasa por tres puntos, actividades organizadas en hojas de trabajo y con el apoyo del software GeoGebra. Se pretende que a partir de las variables visuales el estudiante tengan un acercamiento intuitivo a la idea de que los centros de las circunferencias que pasan por dos puntos fijos del plano están en la mediatriz del segmento que forman dichos puntos; para que posteriormente identifiquen el centro de una circunferencia que pasa por tres puntos no colineales. Al cuestionar a los estudiantes sobre el número de circunferencias que pasan por dos puntos fijos del plano, se obtuvieron tres tipos de respuestas incompletas/incorrectas

**Palabras clave:** representación, circunferencia, trabajo en equipo

**Abstract.** In this paper we present the results of designing and implementing learning activities on the learning of the circumference passing through three points. Such activities were organized in worksheets and supported with software GeoGebra. It is primarily intended that the student accomplishes an intuitive approach to the idea that the centers of the circles through two fixed points are in the bisector plane of the segment formed by these points; and subsequently identifies the center of a circumference passing through three non-collinear points. The student can accomplish this from visual variables that they identify. By questioning students about the number of circles through two fixed points of the plane, we obtained three types of incomplete / incorrect responses

**Key words:** representation, circumference, teamwork

### Introducción

En la enseñanza de las matemáticas generalmente nos enfrentamos al problema de establecer el nivel de profundización con que debemos tratar algún tema en especial, esta situación se agudiza dependiendo del nivel educativo en que se trabaje, es común que no todos los temas contenidos en el programa de una asignatura sean atendidos con el mismo nivel de profundización. Esta situación puede estar provocando que haya objetos matemáticos que se estudian en una asignatura que se están atendiendo muy superficialmente o bien estudiando sólo algunas de sus características más evidentes, o sólo se promueve su estudio en uno o a lo más dos registros de representación, lo que pudiera estar produciendo significados pobres en el aprendizaje de los estudiantes, ya que la riqueza de los significados deberá estar acompañada de la coordinación de al menos dos registros de representación (verbal, gráfico, numérico y algebraico), Duval(1999).

En este trabajo se presentan los resultados que se obtuvieron al implementar una secuencia de actividades didácticas en la que se promueve identificar la relación que hay entre el centro de la circunferencia que pasa por tres puntos de un plano, y el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos que se forman entre todas las parejas de puntos. En un primer momento se hace un acercamiento intuitivo, en el registro gráfico trabajando de manera individual, después en un

segundo momento se le solicita que trabaje en equipo comparando sus resultados y estrategias, haciendo énfasis en la argumentación de lo que hace y propone (registro verbal), finalmente se le solicita que participe en la discusión grupal con las aportaciones de su equipo, en este momento el profesor interviene para destacar los aspectos fundamentales para centrar la atención en el hecho de que los centros de las circunferencias que pasan por los extremos de un segmento están en la mediatriz del segmento, por ejemplo utilizando GeoGebra para medir segmentos y comparar valores numéricos (registro numérico).

### Elementos teórico metodológicos.

Los elementos teóricos que asumimos para el diseño de las actividades lo podemos dividir en dos partes, por un lado los que utilizamos para el diseño de las actividades respecto de la forma en que deberá ser atendida por los estudiantes, y por otro con los relacionados con el análisis de los diferentes registros de representación que deberá poner en juego para la construcción de los significados.

Un elemento que está en juego es la estrategia didáctica respecto al tipo de acciones que debe realizar el estudiante al trabajar con las actividades, para organizar esta parte del trabajo retomamos algunos de los momentos que se presentan en la propuesta que se hace en Hitt (2009), de la metodología ACODESA, donde se propone una participación activa por parte del estudiante. Como ya se ha mencionado en un primer momento los estudiantes harán trabajo individual, donde se espera que el estudiante ponga en juego sus conocimientos sobre la situación planteada, así como para identificar dificultades que pudiera tener al abordar la situación. En un segundo momento intercambiarán sus estrategias y resultados en pequeños equipos, lo que les permitirá argumentar sus estrategias y resultados, escuchar a otros, argumentar, contra argumentar, entre otras acciones que le permitirán desarrollar la habilidad para comunicarse. Finalmente en un tercer momento tendrán la oportunidad de interactuar con todos los integrantes del grupo, teniendo la oportunidad de tener un tercer acercamiento con la situación planteada donde el profesor resaltaré los aspectos que considere fundamentales para enriquecer los significados producidos en los dos acercamientos previos.

Otro aspecto presente en el diseño de las actividades es la intención de promover en los estudiantes la coordinación de las diferentes representaciones semióticas a las que hace referencia Duval (1993), entendidas como:

*“producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias compulsiones de significado y funcionamiento”*

Entre los que podemos identificar al registro verbal, gráfico, algebraico y numérico; así como a los tratamientos y conversiones que el estudiante sea capaz de coordinar, entendidos éstos como:

**Tratamiento:** “El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.”

**Conversión:** “La conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. La conversión es una transformación externa al registro de partida (el registro de la representación por convertir).”

### Propuesta

La secuencia de actividades didácticas se presenta a los estudiantes en hojas de trabajo en la que se indica la forma en la que debe trabajar y se le dan las indicaciones de lo que se espera que haga o conteste, la secuencia consta de tres actividades en las que se promueve fundamentalmente el aspecto geométrico, centrando la atención en la argumentación de los estudiantes para responder lo que se les pregunta y/o describir lo que se espera que observen. Se proponen actividades en las que los estudiantes identifiquen la relación geométrica que hay entre el centro de la circunferencia que pasa por tres puntos del plano y la intersección de las mediatrices de todos los segmentos que se pueden formar entre las parejas de puntos, para ello se espera que pongan en juego la coordinación de diferentes registros de representación de los objetos matemáticos que se estudian.

### Secuencia I

#### Actividad I Circunferencia(s) que pasa(n) por un punto

1. Individualmente realice lo siguiente:
  - 1.1 Grafique la o las circunferencias que pasan por un punto A del plano.
  - 1.2 ¿Cuántas circunferencias cumplen con la condición de pasar por el punto A?
  - 1.3 ¿Qué tienen en común esas circunferencias?
2. Comente con los integrantes del equipo las respuestas que propuso individualmente, y escriba una respuesta global sobre los tres aspectos que se le plantean en 1.

3. En equipo abran el archivo GeoC1, activen las pestañas que aparecen en la pantalla y haga una descripción de lo que observa ¿Lo que se observa corresponde con lo que respondieron en el punto 1? Argumente su respuesta.
4. Participe en la discusión grupal presentando los resultados obtenidos individualmente o en el equipo.

#### Actividad 2 Circunferencia(s) que pasa(n) por dos puntos

1. Individualmente realice lo siguiente:
  - 1.1 Graficar la o las circunferencias que pasan por los puntos A y B del plano.
  - 1.2 ¿Cuántas circunferencias cumplen con la condición de pasar por los puntos A y B?
  - 1.3 Si identificó más de una ¿Qué tienen en común esas circunferencias?
  - 1.4 ¿Qué puedes decir de los centros de esas circunferencias?
2. Comente con los integrantes del equipo las respuestas que propuso individualmente, y escriba una respuesta global sobre los tres aspectos que se le plantean en 1.
3. En equipo abran el archivo GeoC2, activen las pestañas que aparecen en la pantalla y haga una descripción de lo que observa ¿Lo que se observa corresponde con lo que respondieron en el punto 1? Argumente su respuesta.
4. Participe en la discusión grupal presentando los resultados obtenidos individualmente o en el equipo.

#### Actividad 3 Circunferencia(s) que pasa(n) por tres puntos

1. Haga lo mismo que se hizo en la **Actividad 2** de la secuencia, pero con los puntos A y C, y con los puntos B y C (donde A, B y C no son colineales).
2. En equipo abra el archivo GeoC3 ¿Qué puede decir de las mediatrices de los segmentos que se forman (AB, AC y BC)?
3. Individualmente responda las siguientes preguntas:
  - 3.1 ¿Observa alguna relación entre las mediatrices de los segmentos y la circunferencia que pasa por los tres puntos (A, B y C)?
  - 3.2 ¿Cuál es la relación que usted identifica entre las mediatrices de los segmentos y la circunferencia que pasa por los tres puntos.
4. Participe en la discusión grupal presentando sus respuestas o las de su equipo.

## Descripción y análisis de la puesta en escena

Esta secuencia de actividades se aplicó a un grupo de 36 estudiantes de Ingeniería Industrial de Sistema, son estudiantes del segundo de la Universidad de Sonora en México, que trabajan en el marco del modelo curricular el cual se presenta en UNISON (2004). Algunas de las características de los participantes son las siguientes: edad entre 18 y 20 años, son estudiantes de tiempo completo, tienen muy buena disposición para el trabajo en clase y extraclase.



Figura no. 1

La sesión de trabajo inicia entregándoles a los estudiantes la Actividad 1 de la secuencia, una vez que se resuelve y discute se les entrega la Actividad 2 y finalmente la Actividad 3. Por cuestión de espacio en este trabajo describiremos a detalle lo que sucede en la Actividad 2, la información se les proporciona en el registro verbal, los estudiantes primero se abocan a trabajar de manera individual (*Figura no. 1*), en este momento el propósito es

que pongan en juego sus conocimientos acerca de la situación planteada, así como los elementos que logran identificar en un primer acercamiento.

De las acciones que hacen los estudiantes pudimos observar lo siguiente:

Mostraron disposición para participar activamente respetando los momentos y las indicaciones que se señalan en la actividad (por ejemplo, se les indicó verbalmente que una vez que resolvieran un inciso no borrarán, y si tenían que corregir lo hicieron a un lado de la primera respuesta), al respetar esta indicación nos permitió dar un seguimiento en la evolución de las respuestas que propusieron en los diferentes momentos de la actividad.

El tipo de respuestas que se obtuvieron en la Actividad 2 son las siguientes:

Al responder el punto 1.1 En la figura no.2 se muestran algunas de las respuestas representativas que propusieron:

### 1.1 Graficar la o las circunferencias que pasan por los puntos A y B del plano.

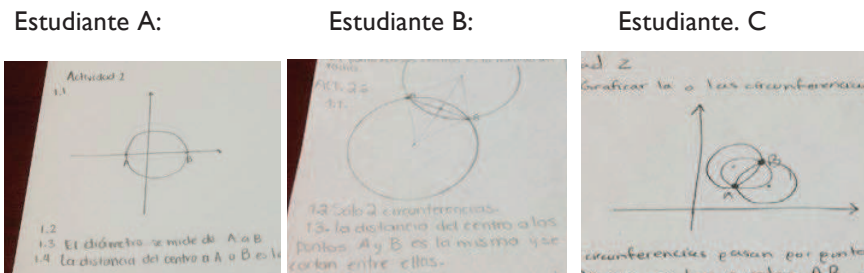


Figura no. 2

Respecto a la pregunta 1.2 se presentaron los siguientes tipos de respuestas:

## **1.2 ¿Cuántas circunferencias cumplen con la condición de pasar por los puntos A y B?**

**Estudiante A:** *“Una, el diámetro se mide de A a B. La distancia del centro a A o B es la misma”*

**Estudiante B:** *“Sólo dos circunferencias, la distancia del centro a los puntos A y B es la misma y se cortan entre ellas”*

**Estudiante C:** *“Tres circunferencias, dos son iguales en diámetro, las dos más grandes están a una distancia determinada”*

En este caso, viendo lo que hacen en el registro gráfico y leyendo lo que señalan en el registro verbal podemos identificar a qué tipo de circunferencia(s) se refiere(n), por ejemplo el Estudiante A está identificando sólo la circunferencia que tiene como uno de sus diámetros el segmento AB, mientras que el Estudiante B al parecer sólo identifica a dos circunferencias que tienen el mismo radio y sus centros están en lados opuestos al segmento AB, y el Estudiante C sólo identifica a la que tiene diámetro AB y a las que son del mismo tamaño que están en lados opuestos del segmento AB.

## **1.3 Si identificó más de una, ¿qué tienen en común esas circunferencias?**

A partir de lo que se le solicita en 1.3 los estudiantes que responden como el Estudiante A empiezan a buscar otras opciones de circunferencias, lo que les permite enriquecer las respuestas generadas en el primer momento. Los que respondieron como los Estudiantes B y C, algunos se limitan a describir lo que tiene en común los centros, mientras que otros identifican que hay más de las dos o tres que han ubicado en 1.1 y 1.2.

Algunos de los que desde un principio identificaron que había una infinidad de circunferencias tratan de describir lo que tienen en común.

## **1.4 ¿Qué puedes decir de los centros de esas circunferencias?**

Antes de que se les plantee esta pregunta son muy pocos los que se fijan en el comportamiento del centro de las circunferencias que pasan por los dos puntos, sobre todo si la representación gráfica que hicieron no es muy precisa. La mayoría de los estudiantes se limitan a decir cosas como las siguientes:

**Estudiante A:** *“La distancia del centro a A y a B es la misma”*

**Estudiante C:** *“Son diferentes, los dos más grandes están a una distancia determinada”*

Sólo el Estudiante B da indicios de haber observado que los centros se encuentran sobre una línea recta que es perpendicular a AB, señalando lo siguiente *“Los centros están perpendiculares unidos*

sobre el segmento que se forma en  $AB$  y equidistan la misma distancia del punto medio del segmento  $AB$  a los centros”

Hasta este momento los estudiantes han trabajado individualmente en hojas de trabajo, posteriormente, en el punto 2 de la actividad, se les pide que trabajen en equipo (figura no. 3) comparando sus resultados y estrategias, y una vez que lo han hecho se les solicita que registren los ajustes que harían a las respuestas que dieron cuando trabajaron individualmente.



Figura no. 3

Después de haber trabajado en equipo los estudiantes señalan cosas como las siguientes:

Estudiante A: *“Con el trabajo en equipo me di cuenta que no sólo había una circunferencia, sino que hay una infinidad”*

El estudiante D: *“Aquí además pude observar que la distancia del punto A al centro del segmento  $AB$  es igual a la distancia del punto B al centro del segmento”*

Con este tipo de comentarios de los estudiantes podemos ver que el trabajo en equipo les brinda la oportunidad de tener un nuevo acercamiento con la situación que resolvió individualmente, y que la interacción con sus compañeros de equipo les permite observar cosas que en el primer momento no habían detectado.

En el punto 3 de la actividad se les propone que revisen un archivo diseñado en GeoGebra (figura no. 4), en él se presentan una ventana en la que aparecen los puntos  $A$  y  $B$ , así como unas pestañas y se les da la indicación que activen las pestañas, lo que aparece cuando se activa cada una de las pestañas es una circunferencia que pasa por los puntos  $A$  y  $B$  y su centro, tal como se muestra en la siguiente gráfica:

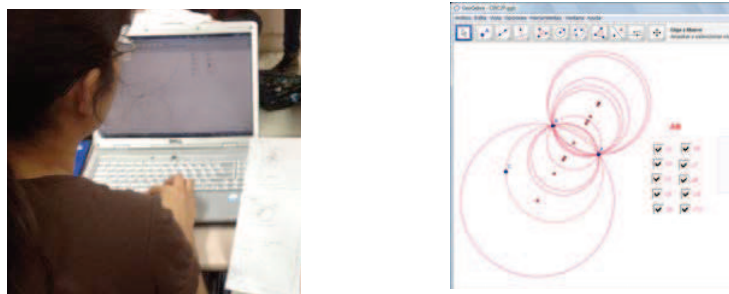


Figura no. 4

Después de trabajar con este archivo, en el que se enriquece la información proporcionada en el registro gráfico, los estudiantes registran comentarios como el siguiente:

Estudiante E: *“No, porque al principio sólo pensamos que eran 3 y al graficarlos con GeoCI nos dimos cuenta que eran más”*, (GeoCI es el nombre del archivo en GeoGebra).

Estudiante B: *“Parece que los centros están en una línea perpendicularmente sobre el segmento que se forma en AB y equidistan la misma distancia del punto medio del segmento AB a los centros”*

Con este tipo de respuestas, podemos ver el tipo de efecto que causa en algunos estudiantes el hecho de trabajar con un software que les presenta una representación gráfica más enriquecida de la misma situación,.

Finalmente, el profesor propuso una discusión grupal de las estrategias y resultados obtenidos por los equipos, parte de la estrategia es que algún equipo presente lo que hizo (figura no. 5), y se le solicita que argumente verbalmente lo que están presentando al grupo.



Figura no. 5

En este último momento, discusión grupal, es donde el profesor aprovecha para rescatar los aspectos que quiere resaltar del objeto matemático que se está estudiando, en este caso el propósito es que los estudiantes identifiquen que los centros de las circunferencias que contienen a los puntos A y B son los puntos de la mediatriz. Si bien es cierto que los acercamientos de los estudiantes con la actividad, particularmente con el apoyo de las representaciones gráficas del software utilizado pueden propiciar que dicha idea empiece a germinar, incluso algunos hasta



pueden llegar a afirmar que efectivamente los centros están en la mediatriz, lo hacen sólo a nivel intuitivo. Por ello es fundamental el trabajo del profesor en la discusión grupal, ya que es él el que promueve la reflexión sobre los argumentos que nos pueden llevar a asegurar que efectivamente es la mediatriz, para ello se recurre a la semejanza y a la congruencia de triángulos, a que la suma de los ángulos interiores de un triángulo en el plano es  $180^\circ$  y al hecho de que el punto medio del segmento es uno de los centros de interés.

### Conclusiones

Se observó un trabajo participativo por parte de los estudiantes, el trabajo individual permite ver cómo los estudiantes ponen en juego sus conocimientos previos, así como las dificultades que tienen para visualizar, en el registro de representación gráfico, la cantidad de circunferencias que pasan por dos puntos fijos del plano.

Se pudo observar cómo el trabajo en equipo promueve que se enriquezcan los aprendizajes de los estudiantes, ya que hay aspectos de la situación que no tuvieron en cuenta cuando trabajaron individualmente, por ejemplo el hecho de identificar sólo una, dos o a lo más tres circunferencias que pasan por dos puntos fijos del plano, en este sentido se resalta la necesidad y conveniencia del trabajo en equipo con el propósito de socializar tanto los resultados obtenidos como las estrategias utilizadas.

En esa misma dirección fue fundamental el uso de tecnología computacional, ya que permitió a un buen número de estudiantes enriquecer sus respuestas, a partir de un ambiente de geometría dinámica en el que se enriquece el registro de representación gráfico, ya que al manipular el software observaron aspectos de la situación que en la hoja de trabajo no fue posible ver.

A lo largo de la actividad se pudo observar el uso que hacen los estudiantes de los diferentes registros de representación, así como la coordinación entre ellos. En particular, el uso del software permitió potenciar el uso simultáneo de diferentes registros de representación para el mismo objeto matemático.

Finalmente, quisiéramos señalar la importancia de considerar el papel activo del estudiante en el salón de clase, como una estrategia didáctica para el trabajo del aula de todos los días.

### Referencias bibliográficas

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica, México

Duval, R. (1999), *Semiosis y pensamiento humano: registro semiótico y aprendizajes intelectuales*. Cali: GEM.

Hitt, F. y Cortés, C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades de gráficas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet 10(1)*, 1-30.

*Lineamientos generales para un modelo curricular de la Universidad de Sonora (sf)*. Recuperado en 15 marzo de 2013, de

[http://www.uson.mx/institucional/marconormativo/reglamentosacademicos/lineamientos\\_modulo\\_curricular.htm](http://www.uson.mx/institucional/marconormativo/reglamentosacademicos/lineamientos_modulo_curricular.htm)