

## El Papel de las Representaciones en el Éxito de la Resolución de Problemas

José Luis Villegas, J. Roberto García y Enrique Castro

Universidad de Los Andes, Universidad Michoacana de Sn. N.de Hdgo, Universidad de Granada  
Venezuela, México, España

joselovi@ugr.es

Resolución de Problemas — Nivel Superior

### Resumen

El presente trabajo forma parte de un estudio mas amplio (Villegas, 2002), el cual estaba dirigido a describir el papel que desempeñan las representaciones empleadas por estudiantes expertos cuando resuelven problemas de optimización. Para cumplir el objetivo propuesto se utilizó el análisis de protocolos de pensamiento en voz alta. Las producciones generadas fueron transcritas e interpretadas aplicando un marco para el análisis de protocolos, el cual fue adaptado de Schoenfeld (1985). Se consideraron tres tipos de representación (verbal, pictórica y simbólica) y las conversiones entre ellas. A través de un análisis de caso, esta comunicación pone de manifiesto que la metodología aplicada posibilita la identificación de características relevantes de los resolutotes exitosos, con relación al empleo de las representaciones en la resolución de problemas.

### Introducción

Una característica de la inteligencia humana es el uso de diferentes tipos de representación, con fines lúdicos, normativos, comunicativos, artísticos, literarios,...esta característica nos diferencia de los animales y de la inteligencia artificial. Esto conlleva a que se realicen numerosas investigaciones sobre el papel de las representaciones en el aprendizaje de las matemáticas y en la resolución de problemas (Duval, 1998; Hitt, 2001). Como resultado de estas investigaciones se considera indiscutible la importancia de las múltiples representaciones en el desarrollo del pensamiento matemático. El interés sobre el papel que juegan las representaciones en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, también queda de manifiesto en diferentes obras y reuniones científicas de investigadores en didáctica de las matemáticas (Couco & Curcio, 2001; Goldin & Janvier, 1998; NCTM, 2000).

Mediante diversos medios de expresión los seres humanos nos familiarizamos y aprendemos un sin número de códigos, símbolos, señales, iconos y lenguajes de diversa naturaleza. El poder heurístico y de comunicación que nos dan esos elementos representativos a la actividad humana aumenta en la medida en que dichos medios de expresión se integran formalmente en sistemas complejos de simbolización sometidos a reglas sintácticas y gramaticales. Los sistemas de representación reúnen unos requisitos de complejidad, interrelación y poder de simbolización y abstracción cuyo dominio amplía y enriquece la inteligencia humana en cuanto son instrumentos útiles de modelización de la realidad y herramientas practicas para la resolución de diferentes tipos de problemas de la vida real.

En este trabajo se describe, a través de un análisis de caso, las representaciones usadas por un grupo de universitarios cuando resuelven un tipo específico de problemas de optimización cuyas posibilidades de representación y modelización de situaciones es múltiple y variada. Como hemos visto, el término representación es de gran importancia dentro de la psicología y de la didáctica de la matemática. Sin embargo, es complejo y está abierto a muchas interpretaciones,

para nosotros el término representación se refiere a todas aquellas formas con que hacemos presentes los objetos o procesos matemáticos, y nos es esencial para definir, explicar y ostentar, así como para registrar y comunicar el conocimiento matemático.

### **Representaciones y resolución de problemas**

A lo largo de las dos últimas décadas se ha puesto de manifiesto el elevado consenso que existe en la comunidad investigadora sobre el buen uso de las representaciones y de la conversión entre representaciones por parte de los estudiantes y su éxito como instrumento al servicio de la resolución de problemas. Por tanto, debemos tener claro que, si bien es importante poseer varias representaciones de un concepto, la pura existencia de estas no es suficiente para permitir un uso flexible del concepto en la resolución de problemas. Kaput (1992) afirma que la habilidad para vincular diferentes representaciones ayuda a revelar explícita y dinámicamente las diferentes facetas de una idea compleja. De tal manera que, en la resolución de problemas, se necesita tener la posibilidad de cambiar de una representación a otra, cuando la otra sea más eficiente para el nuevo paso que queremos tomar (Dreyfus, 1991).

Diversas investigaciones (Hitt, 2001; Lesh, Post & Behr, 1987) señalan que el éxito de los resolutores de problemas competentes se debe a varios factores, entre otros, tener un buen conocimiento de las diferentes formas de representar un concepto, poseer habilidad para construir representaciones apropiadas para situaciones de resolución de problemas, usar esas representaciones como ayuda para entender la información, articular sin contradicciones esas representaciones y recurrir a ellas en forma espontánea durante la resolución de problemas.

### **Metodología y Análisis**

El método empleado en esta investigación para la recolección de datos es el análisis de protocolos (Ericsson & Simon, 1993). Entendiéndose por protocolo, la descripción ordenada cronológicamente de las actividades que un sujeto desarrolla mientras ejecuta una tarea de resolución de problemas. En este método, los sujetos resuelven un problema y los datos son principalmente las verbalizaciones que realizan durante la resolución con algunos comentarios y observaciones del investigador. Ocasionalmente, también pueden realizarse observaciones conductuales (Ginsburg, Kossan, Schwartz & Swanson, 1983). Los sujetos que han participado son estudiantes de quinto año de la Licenciatura de Matemáticas, especialidad Metodología de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, del curso 2001-2002.

### **Instrumento**

En principio se construyó una batería de problemas de optimización siguiendo los siguientes criterios: que estuvieran en los libros de textos de nivel universitario, que fueran problemas matemáticos del mundo real, con enunciado estrictamente “narrativo” y adecuados para estudiantes de primer año de la Universidad de carreras como Ciencias e Ingeniería, que necesitaran para su resolución el empleo de varias representaciones y no fuese preciso el uso de calculadoras. Los problemas seleccionados se sometieron a consideración de algunos investigadores y licenciados en matemáticas que opinaron acerca de la pertinencia de estos en el

estudio a realizar y si eran adecuados para los sujetos a participar en el estudio. Con estas opiniones se seleccionaron cuatro problemas, con los que se efectuó una prueba piloto. Como consecuencia de esta prueba, se decidió conservar sólo 3 problemas.

### **Recogida y Análisis de Datos**

Cada uno de los estudiantes, resolvieron los tres problemas en una sesión de aproximadamente 90 minutos, en la cual solo estuvieron presentes el investigador y un asistente de investigación. Ambos actuaron como observadores durante el proceso, haciendo anotaciones adicionales para complementar los registros de audio y vídeo. Los problemas planteados fueron resueltos en voz alta, tratando que el investigador interviniera lo menos posible en el proceso de resolución, (Gindburg et al., 1983; Schoenfeld, 1985). Las pocas intervenciones efectuadas ocurrían cuando el resolutor se quedaba en silencio durante un período largo de tiempo, o estaba “dándole vueltas” al problema sin encontrar salida, y el investigador consideraba que era más importante para su estudio “encaminarlo” hacia la solución, ya que esto produciría mayor información. La elección de estas pautas, no se hicieron por casualidad, tienen un sustento teórico, están justificadas de acuerdo a cinco variables (Schoenfeld, 1985b; Villegas, 2003): número de personas siendo grabadas, grado de intervención, la naturaleza y los grados de libertad en la instrucción y la intervención, la naturaleza del entorno y cuan confortable se siente el sujeto con él, y la variable tarea.

El análisis de los protocolos se realizó usando un marco, el cual es una adaptación del realizado por Schoenfeld (1985a). En nuestro análisis, se observó el empleo de las representaciones y la conversión por parte de los estudiantes cuando resuelven problemas de optimización. Para esto se tomó en cuenta tres tipos de representación: *verbales* (enunciado del problema), *pictóricas* y *simbólicas*, así como las conversiones entre ellas.

El número de episodios establecidos para el marco fue de 7, tres proporcionados por las representaciones, otros tres de las conversiones entre representaciones y uno correspondiente a ‘otros’, no asociados a representaciones (Villegas, 2002; Villegas & Castro, 2002). Con este marco para el análisis de protocolos de resolución de problemas se analizaron las transcripciones generando un protocolo escrito, a este protocolo le fue anexado el trabajo realizado por el resolutor en la sesión de resolución de problemas, para hacer esto, el investigador observaba nuevamente el vídeo, e iba correlacionando, las verbalizaciones realizadas con el material escrito en la sesión de la resolución de problemas. Esto se intento hacer lo más parecido posible a lo que el resolutor había hecho en la sesión, de tal forma que al observar el documento, se “perciba” lo que él estaba realizando en cada instante de la resolución. Aunado a esto, a la transcripción definitiva también se le colocó el tiempo en el que comenzaba y finalizaba cada ítem (ver Cuadro 1)

<p>06:36 38. si esto es <math>x</math>, esto es <math>5 - x</math>, y esto es <math>y</math></p> <p>06:42 39. como esto es lo que quiero que sea mínimo</p> <p>06:44 40. voy a hallar la relación que existe entre <math>x</math> e <math>y</math>,</p>	<p style="text-align: center;"><math>c = 3y + 5x = f \text{ mínimo}</math></p>
---	--

**Cuadro 1 Fragmento del protocolo escrito del resolutor**

Los resultados fueron reportados en forma de análisis de caso, esto consiste en realizar una interpretación del trabajo efectuado por los resolutores. El análisis es presentado en forma de narración con una serie de comentarios interpretativos y soportados por algunos ítems ilustrativos. Para su elaboración se han tomado en cuenta, los protocolos verbales (donde se consideró: tono de voz, duración de las pausas, etc.), las imágenes de video, el tiempo en cada representación, la frecuencia de uso de las representaciones, así como la “revisión” de los trabajos escritos elaborados por los resolutores en su intento de resolución de los problemas (Villegas, 2002). En este análisis de caso se puede observar la conducta del resolutor frente al problema, su competencia en el uso de las representaciones, su habilidad para hacer traslaciones entre varias representaciones y cómo, la planificación, el monitoreo, el control y las “afectividades locales” (Goldin, 1998) son generadores de éxito, o bien, creadores de obstáculos en la resolución de problemas.

A continuación presentamos un extracto.<sup>1</sup> correspondiente al análisis de caso realizado a uno de los sujetos participantes en su intento de solución del siguiente problema: “A un lado de un río recto de 1 Km de anchura hay una central eléctrica y al otro lado 5 Km corriente arriba una factoría; su dueño desea tender un cable desde la central eléctrica hasta la factoría, él sabe que tender cable por tierra cuesta 3 euros por metro y tenderlo por agua cuesta 5 euros por metro. ¿Cuál será la trayectoria del tendido que le resulta más económica?. Si el cable por tierra tiene el mismo precio que el cable por agua, ¿Cuál será la trayectoria?”<sup>2</sup>, es importante reseñar que este sujeto resolvió con éxito los tres problemas que le fueron planteados en la sesión de resolución de problemas.

**Análisis de caso: Problema 1 Resolutor C**  
El resolutor comienza con un breve episodio de lectura; expresa la intención de iniciar

<sup>1</sup> Los cuatro primeros minutos, de un total de 24 minutos 26 segundos que el resolutor invirtió en su intento de solución del problema 1.

<sup>2</sup> Los otros dos problemas propuestos fueron los siguientes:

P2: Se desea construir una ventana rectangular coronada por un semicírculo (el ancho del rectángulo ha de ser igual que el del semicírculo). Cual es la ventana que admitirá la mayor cantidad de luz posible, si su perímetro ha de ser fijo.

P3: Un espejo rectangular de dimensiones 80 y 90 cm. Se rompe por una esquina en línea recta. De los dos trozos que quedan, el menor tiene una forma de triángulo rectángulo de catetos 10 y 12 cm., correspondientes, respectivamente, a las dimensiones menor y mayor del espejo. ¿Cuál es el espejo rectangular más grande que se puede obtener del trozo mayor?

la resolución del problema «¿puedo empezar a escribir ya, no?», pero continúa con la lectura sin realizar otra representación del problema. Cuando termina la lectura del enunciado, manifiesta su intención por realizar una representación pictórica «voy a pintar»(4). Este episodio fue catalogado como de verbalizaciones de tipo afectivo.

Enseguida C realiza una representación pictórica directamente del enunciado, comienza a través del dibujo a representar la situación, verificando la relación que existe entre su “dibujo” y el enunciado «anchura, corriente arriba» (7)-, simultáneamente a la verbalización señala con su mano el dibujo mientras lee nuevamente el problema.

C manifiesta no entender el problema y vuelve a leer gran parte del enunciado. Al finalizar, verbaliza una especie de plan «esto es una mezcla entre tierra y agua, vale, una función de optimización» (9)-, aunque de lo que habla, por supuesto, no es una “función de optimización”, se deduce que lo que quiere decir es que es un problema de optimización. Enseguida, comienza a asignar variables a las posibles formas de “tender el cable” y al final vuelve a leer la pregunta formulada en el enunciado «... por metro ¿cuál será la trayectoria del tendido que resulta más económica?» (13)-, esto con el fin de asegurarse de no desviar su cometido.

C plantea la ecuación de la trayectoria del tendido directamente de la representación pictórica que había realizado «la trayectoria del tendido será ...  $y + x$  metros, que sea mínimo» (14)- y aunque la plantea erróneamente ya que olvida considerar el precio del cable, demuestra destreza en la conversión entre la representación pictórica y la representación simbólica.

La ecuación formulada la relaciona inmediatamente con el enunciado usando palabras de su lenguaje personal «esto es lo que me preguntaban, ¿cuanto es el  $y$  más  $x$  que te haga la distancia mínima?» (15)-, como se puede observar existe una gran capacidad en el resolutor para realizar las traducciones entre representaciones, moviéndose apropiadamente entre las tres representaciones en un breve período de tiempo (menos de 20 segundos).

Paso siguiente, plantea la necesidad de relacionar la  $x$  con la  $y$  observando la figura realizada previamente «vamos hallar una relación entre  $x$  e  $y$ , donde  $x$  es por tierra e  $y$  es por agua» (16)- esto no es tan claro para él, entonces relaciona la figura con el enunciado buscando ideas que le sugieran el camino a seguir, no las encuentra, se desespera un poco - «... ¡madre mía!,  $x$  por metros, que sea mínimo» (18)-, se da cuenta de que los cables tienen diferentes precios y construye la función de coste (con los precios invertidos ¿culpa de los nervios?) y verbaliza una expresión de planificación «... tengo que  $y$ , si pongo  $x$  en función de  $y$ , y optimizo, obtengo un mínimo, calculo cuanto vale  $y$  en función de  $x$ » (22)-.

De la función de coste formulada: despeja  $y$  en función de  $x$  «obtengo que  $y = -5x/3$ » (23)-, para hacer esto ¿supuso que el coste es cero?, ó ¿los nervios vuelven a jugar un papel fundamental?

03:24 20. entonces, el coste total será $3y$ euros, $5x$ euros	Coste total $3y \in$ $5x \in$
03:52 21. en total son $3y + 5x$ , ¿cuando es mínimo esta función?	$c = 3y + 5x = f$ mínimo

Manifiesta de nuevo incertidumbre, recordando, primero y luego leyendo el enunciado del problema y además verbaliza relaciones entre una expresión simbólica y el enunciado buscando dos cosas: la solución del problema y lograr tranquilizarse.

C deriva la función de  $y$  encontrada y la relaciona mentalmente con una representación pictórica, «en donde el mínimo es una recta» (30)-, «... el mínimo se alcanzaría... rápidamente...

$y' = -\frac{5}{3}$  » - (31), cometiendo con lo anterior graves errores, de los cuales se percata rápidamente y se propone leer el problema de mejor manera -«leo despacio el problema» (33)-, lee de nuevo el problema, notándose esta vez una mayor concentración en la lectura.

### Cuadro 2 Análisis de caso: Problema 1 Resolutor C

#### Caracterización del Resolutor

El análisis realizado proporcionó una vasta información acerca del resolutor, con la que caracterizamos su actuación. Este estudiante fue etiquetado como resolutor competente debido a su habilidad para usar los conceptos y las herramientas matemáticas en una manera hábil y no necesariamente por resolver siempre de manera correcta los problemas. A continuación se presenta la descripción del resolutor:

*Estudiante con mucha destreza para hacer traducciones entre varias representaciones con precisión y eficacia. Claro entendimiento del tipo de información que revela una conversión. Habilidad para darse cuenta de la relevancia de los datos, relaciones y hechos expresados en el enunciado del problema ó revelados por una conversión ó representación. Capacidad para extraer información de una representación y usarla en otro tipo de representación. Destreza en el trabajo con más de una representación y con capacidad de trabajo con más de dos representaciones el mismo tiempo.*

Podemos observar que su competencia en la resolución de problemas esta íntimamente ligada a habilidad con que maneja las representaciones y la conversión entre representaciones.

#### Reflexiones Finales

A través de un análisis de caso, esta comunicación pone de manifiesto que la metodología aplicada posibilita la identificación de características relevantes de los resolutores exitosos, con relación al empleo de las representaciones en la resolución de problemas. El estudio aportó datos que nos permiten considerar que el éxito de los resolutores de problemas esta íntimamente ligado al dominio de diferentes formas de representar un problema y a la habilidad para traducir entre representaciones, es decir, entre otras, a la comprensión del enunciado del problema, su habilidad para construir representaciones apropiadas, utilizar estas representaciones para estructurar y ejecutar un plan, así como para realizar actividades metacognitivas.

Consideramos importante tener en cuenta de una manera detallada los efectos de la afectividad en el proceso de resolución de problemas, cuales son sus influencias en la regulación de la metacognición y en el uso de las diferentes representaciones.



## Referencias Bibliográficas

- Couco, A., y Curcio, F. (2001). *The roles of representation in school mathematics*. Reston: VA: NCTM.
- Dreyfus, T (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Netherlands: Kluwer Academic Publishers
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Ericsson, K.A. y Simon, H.A. (1993). *Protocol analysis. Verbal reports as data*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Ginsburg, H.P., Kossan, N.E., Schwartz, R. y Swanson, D. (1983). Protocol methods in research on mathematical thinking. En H. Ginsburg (Ed). *The development of mathematical thinking*. (pp. 7-47). New York: Academic Press Inc.
- Goldin, G. y Janvier, C. (Eds.) (1998). PME Working Group on Representations. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1) y (2).
- Goldin, G. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of mathematical behaviour*, 17(2), 137-165.
- Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas en un proyecto de investigación en educación matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro*. Granada: Universidad de Granada.
- Kaput, J.J. (1992). Technology and mathematics education. En D.A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 515-556). Reston, VA: NCTM; New York: Macmillan.
- Lesh, R., Post, T., y Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press Inc.
- Villegas, J. L. (2002). *Representaciones en resolución de problemas: Un marco de análisis de protocolos*. Trabajo de Investigación Tutelada. Granada: Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Villegas, J.L. y Castro, E (2003). Pensamiento en voz alta en la resolución de problemas. En Castro, Flores, Ortega, Rico y Vallecillos (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. VII SEIEM*. UGR.: Granada. España.
- Villegas, J.L. y Castro, E (2002). Marco para el análisis de protocolos de resolución de problemas de optimización. En Cardeñoso, Castro, Moreno y Peñas (Eds.). *Resolución de Problemas*. Granada: Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.