APRENDIENDO A RECONOCER EVIDENCIAS DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE LOS ESTUDIANTES A TRAVÉS DE UN DEBATE VIRTUAL

Learning to notice evidences of students' generalization processes through on-line discussions

María Luz Callejo[a], Ceneida Fernández[a], Gloria Sánchez-Matamoros[b], Julia Valls[a]

[a]Universidad de Alicante, [b]Universidad de Sevilla

Resumen

Este estudio tiene como objetivo examinar cómo los futuros profesores de secundaria (EPS) reconocen evidencias de la comprensión del proceso de generalización en estudiantes de secundaria. Los EPS realizaron dos tareas: (1) describir las respuestas dadas por estudiantes de secundaria a dos problemas de generalización lineal y agrupar las que reflejaban características comunes de la comprensión del proceso de generalización; (2) participar en un debate virtual sobre las características de la comprensión del proceso de generalización. Los resultados indican que la participación en el debate virtual permitió a los EPS centrar su mirada en las ideas que subyacen en el proceso de generalización (generalización cercana y lejana e intento de expresar la regla general, pasando de una estrategia aditiva a una funcional) más que en el procedimiento realizado.

Palabras clave: *mirar de una manera profesional, comprensión de los estudiantes, problemas de generalización lineal*

Abstract

This study examines how prospective secondary school teachers (EPS) characterize the generalization process in secondary school students. EPS had to solve two tasks: (1) answer a test where they had to describe secondary school students' answers to two linear generalization problems and realize groups of students that had same characteristics of the generalization process; (2) participate in an on-line debate to reach agreement about students' common characteristics of the generalization process. Results show that the participation in the on-line debate helps EPS to notice on the mathematical ideas of the generalization process (near and far generalization process and attempt to express the general rule (since the additive strategy to a functional one)).

Keywords: *professional noticing, students' mathematical thinking, linear generalization problems*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha destacado la importancia de la competencia docente "mirar de una manera profesional" la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Mason, 2002; Sherin, Jacobs y Philipps, 2010). En este contexto, las investigaciones han mostrado que esta competencia se puede desarrollar en los programas de formación (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Sánchez-Matamoros et al., 2012; Magiera, van den Kieboom y Moyer, 2013).

Por ejemplo, van Es y Sherin (2002), en el contexto de "video clubs" donde se visionan y discuten segmentos de enseñanza, han mostrado que los profesores podían mejorar "su mirada profesional" si se les ayudaba a desplazar su foco de atención: desde las descripción general de las estrategias a la comprensión de los estudiantes; y desde los comentarios evaluativos a las interpretaciones basadas en evidencias. Otro foco de atención han sido la observación de las interacciones durante las discusiones matemáticas (Scherrer y Stein, 2013), y más específicamente cómo la participación

Callejo, M. L., Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. (2014). Aprendiendo a reconocer evidencias del proceso de generalización de los estudiantes a través de un debate virtual. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 187-196). Salamanca: SEIEM.

en debates en línea ayuda al desarrollo de una mirada profesional, al identificar los elementos matemáticos importantes en dominios específicos y relacionar estos elementos con las características de la comprensión matemática de los estudiantes (Fernández et al., 2012).

Estas investigaciones muestran que el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" se facilita al incorporar dominios matemáticos específicos. Con el objetivo de ampliar nuestra comprensión del desarrollo de esta competencia docente en futuros profesores de secundaria nos centramos en el desarrollo de la comprensión de los procesos de generalización de patrones en el contexto de los debates virtuales o en línea.

Problemas de generalización de patrones

El proceso de identificar patrones en una secuencia implica, según Radford (2008): (1) tomar conciencia de una propiedad común, (2) generalizar dicha propiedad a todos los términos de la secuencia y (3) usar esa propiedad común a fin de encontrar una regla que permita calcular directamente cualquier término de la secuencia. Stacey (1989) distingue entre cuestiones que pueden ser resueltas paso a paso a través de un dibujo o contando (generalización cercana), y cuestiones que difícilmente pueden resolverse paso a paso, por ejemplo, obtener el número de elementos de la figura 100 de una sucesión (generalización lejana). La generalización cercana demanda identificar un esquema numérico que es el patrón de crecimiento de la sucesión numérica, mientras que la generalización lejana implica la coordinación de dos esquemas, el numérico, o identificación del número de elementos de cada figura de acuerdo con el patrón de la sucesión, y el espacial, o distribución de los elementos de cada figura de acuerdo con el patrón de la sucesión (Radford, 2011).

En esta investigación usamos problemas de sucesiones donde la regla que relaciona la posición de un término con el número de elementos es una función afín, $f(n)=an+b$, con $b\neq 0$ ("problemas de generalización lineal"). Estos problemas se pueden resolver usando distintas estrategias: (1) *estrategias aditivas*, cuando el estudiante observa que cada término aumenta en una diferencia constante, ya sea a través de un recuento directo, o reconociendo el carácter iterativo de la pauta lineal, o con un *proceso recursivo*, obteniendo un término a partir del anterior; (2) *estrategia funcional*, donde el estudiante utiliza una expresión para calcular directamente un término específico de la sucesión (generalización local), o el número de elementos de un término cualquiera (generalización global); y (3) *razonamiento proporcional*, usando la relación $f(n) = dn$, siendo d la diferencia entre términos consecutivos, que es incorrecto cuando la relación no es lineal.

Se ha constatado que los estudiantes más competentes intentan buscar una relación funcional mientras que otros usan estrategias aditivas o un razonamiento proporcional incorrecto (García-Cruz y Martinón, 1999). Dentro de las estrategias funcionales, Rivera y Becker (2008) distinguen entre estrategias *constructivas*, que consisten en calcular el número de elementos de una figura descomponiéndola en partes discretas disjuntas, y estrategias *deconstructivas*, donde la figura se descompone en partes que tienen elementos comunes. Además, García-Cruz y Martinón (1998) han identificado tres niveles de generalización en estudiantes de secundaria cuando resuelven este tipo de problemas: en el *nivel 1*, *actividad procedimental*, los estudiantes reconocen el carácter iterativo o recursivo del modelo lineal, lo que se traduce en hacer un recuento o añadir la diferencia constante; en el *nivel 2*, *generalización local*, los estudiantes hacen uso de una regla para un cálculo específico; y en el *nivel 3, generalización global*, los estudiantes transforman la regla usada en tareas anteriores en un objeto que se aplica en nuevas situaciones. El paso de un nivel a otro exige cambiar de estrategia de resolución, pues difícilmente se puede responder a una tarea de generalización lejana, correspondiente al nivel de generalización local, con una estrategia aditiva, que sin embargo es eficaz en tareas de generalización cercana.

Algunas de las investigaciones sobre el conocimiento del profesor acerca de la generalización de patrones se han realizado con futuros profesores de primaria y se han centrado principalmente en la forma en que resuelven problemas de generalización de patrones con secuencias numéricas (Zazkis y Liljedahl, 2002) o con sucesiones formadas por figuras y números que respondían a una pauta de crecimiento lineal o cuadrático (Rivera y Becker, 2007). Otras han estudiado cómo futuros maestros (Yesildere-Imre y Akkoç 2012; Zapatera y Callejo, 2013) o profesores en ejercicio de secundaria (Mouhayar y Jurdak, 2012) analizan respuestas de estudiantes a problemas de generalización de patrones.

El papel de los debates virtuales

Estudios previos han mostrado que los debates virtuales ayudan a los estudiantes a entablar una argumentación dialógica. La argumentación dialógica ocurre cuando se examinan diferentes perspectivas con el propósito de conseguir un acuerdo. En este sentido los debates en línea proporcionan un contexto donde los estudiantes para profesor interactúan para poder convencer a otros de la validez de sus ideas (Clark, Sampson, Weinberger y Erkens, 2007). Por otra parte Wells (2002) argumentó que se puede explotar el poder de la escritura para crear nuevos significados. En este sentido crear un texto escrito para tratar de convencer a otros en el debate en línea puede ayudar a los futuros profesores a desarrollar la competencia docente de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes y profundizar en su propia comprensión. El texto producido por los futuros profesores en estos debates les puede ayudar a pasar desde la descripción de estrategias a la interpretación de la comprensión de los estudiantes aportando evidencias.

Teniendo en cuenta los estudios previos, el objetivo de nuestra investigación es examinar cómo a través de un debate en línea los EPS muestran evidencias de la comprensión matemática de los estudiantes cuando éstos resuelven problemas de generalización lineal.

MÉTODO

Participantes

Los participantes fueron 7 estudiantes del "Máster Universitario en profesorado de Educación Secundaria", en el contexto de un módulo que tenía como objetivo desarrollar una "mirada profesional" sobre las características de la resolución de problemas en estudiantes de secundaria.

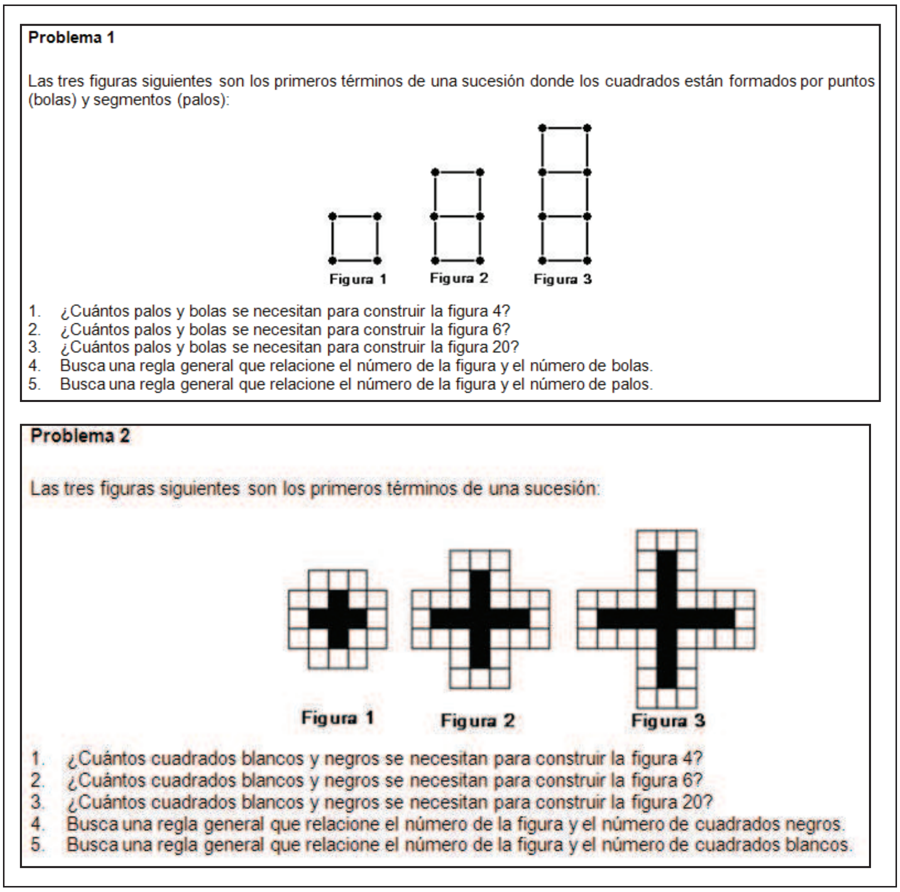
Instrumentos de recogida de datos

Los EPS contestaron un cuestionario que tenía como objetivo obtener información sobre su capacidad de observar la comprensión matemática de los estudiantes de secundaria sobre el proceso de generalización. Una vez contestado el cuestionario realizaron un debate virtual con el objetivo de discutir entre ellos y consensuar un informe sobre la manera en la que interpretaban lo que estaban considerando como evidencias de diferentes niveles de comprensión de la generalización lineal.

Cuestionario

El cuestionario constaba de las respuestas de seis estudiantes de secundaria a dos problemas de generalización lineal (Figura 1), que fueron adaptados de investigaciones previas (Zapatera y Callejo, 2011; Rivera y Becker, 2005). Las preguntas que se plantearon a los EPS fueron:

A. Describe cómo ha resuelto cada estudiante los problemas 1 y 2 en relación al proceso de generalización. B1. Agrupa los estudiantes que presentan características comunes del desarrollo del proceso de generalización. B2. Caracteriza cada uno de los subgrupos que has formado. C. Indica en qué se diferencian los distintos grupos.


Problema 1

Las tres figuras siguientes son los primeros términos de una sucesión donde los cuadrados están formados por puntos (bolas) y segmentos (palos):

1. ¿Cuántos palos y bolas se necesitan para construir la figura 4?
2. ¿Cuántos palos y bolas se necesitan para construir la figura 6?
3. ¿Cuántos palos y bolas se necesitan para construir la figura 20?
4. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de bolas.
5. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de palos.

Problema 2

Las tres figuras siguientes son los primeros términos de una sucesión:

1. ¿Cuántos cuadrados blancos y negros se necesitan para construir la figura 4?
2. ¿Cuántos cuadrados blancos y negros se necesitan para construir la figura 6?
3. ¿Cuántos cuadrados blancos y negros se necesitan para construir la figura 20?
4. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de cuadrados negros.
5. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de cuadrados blancos.

Figura 1. Problemas seleccionados

En los dos problemas se presenta una sucesión de figuras compuestas por: cuadros y bolas (problema 1; Zapatera y Callejo, 2011) y cuadrados blancos y negros (problema 2; Rivera y Becker, 2005). La regla general es siempre una función afín: $f(n) = an + b$, con $b \neq 0$.

Las dos primeras cuestiones de los dos problemas son de generalización cercana y se pueden resolver siguiendo una estrategia aditiva mediante recuento, con o sin dibujo, o con un método recursivo, apoyándose en el término anterior. La cuestión 3, de generalización lejana, también se puede resolver con una estrategia aditiva, aunque resulta laborioso. Las cuestiones 4 y 5 piden expresar la regla general, ya sea en forma verbal o algebraica, y permiten conocer si los estudiantes son capaces de coordinar el esquema numérico de la información procedente de la sucesión numérica con el esquema de la posición que ocupa el número en la secuencia numérica. Las respuestas de los alumnos de secundaria que los EPS debían analizar (Figura 2) reflejaban distintos grados de desarrollo del proceso de generalización (Cañadas, Castro y Castro, 2007; García-Cruz y Martinón, 1999; Radford, 2011):

- No coordinación de la estructura espacial ni la numérica (Radford, 2011): **Carlos** (C).
- Utilización de estrategias aditivas (Zapatera y Callejo, 2011):
  - Utilización de un método recursivo en los apartados de generalización cercana e intento de encontrar una relación funcional en el apartado de generalización lejana usando una regla de tres: **Fernando** (F).
  - Utilización de un método recursivo en los apartados de generalización cercana y lejana sin intentar buscar una relación funcional: **Daniel** (D).
  - Paso de una estrategia aditiva a una multiplicativa (relación funcional) en la generalización cercana (n=6):

- Sin identificar la constante de crecimiento: **Ana** (A).
- Identificando la constante de crecimiento: **Beatriz** (B).

- Utilización de un método directo deconstructivo (Rivera y Becker, 2008) descomponiendo la figura: **Elena** (E).

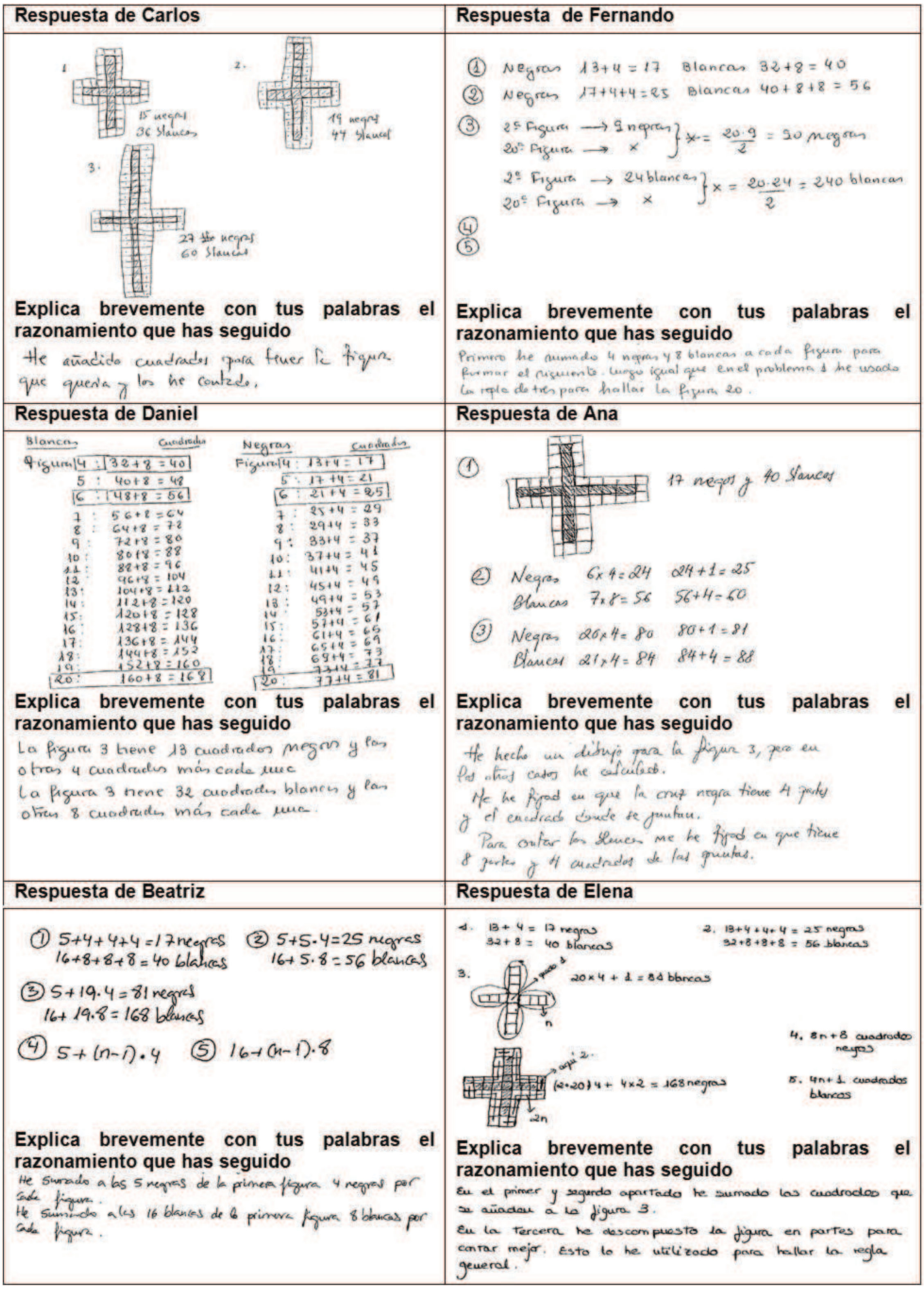


Figura 2. Respuestas de los seis estudiantes de secundaria al problema 2

Debate

Con el objetivo de que los EPS consensuaran las interpretaciones realizadas de la comprensión de los estudiantes de secundaria sobre el proceso de generalización, se activó un debate virtual de dos semanas de duración. En la primera semana los EPS debían debatir sobre las siguientes cuestiones:

- *Características de cada uno de los grupos formados en relación al proceso de generalización.*
- *Diferencias de los distintos grupos formados.*

El debate quedó registrado por escrito. En la segunda semana, debían elaborar un informe conjunto. El informe debía recoger el consenso alcanzado sobre el número y las características de los grupos formados en relación al desarrollo del proceso de generalización y las diferencias entre ellos.

Análisis de los datos

El análisis de los datos se desarrolló en dos etapas. En la primera se analizó las agrupaciones realizadas por los EPS de los estudiantes de secundaria, a partir de las características del desarrollo del proceso de generalización que aportaban para justificar las agrupaciones realizadas. Este análisis lo realizaron cuatro investigadores. Los desacuerdos y acuerdos fueron discutidos con el objetivo de consensuar las evidencias que aportaban los EPS sobre las características del desarrollo del proceso de generalización. Este análisis permitió identificar cuatro caracterizaciones dadas por los EPS del proceso de generalización (se exponen en el apartado de resultados).

En la segunda etapa de análisis, se observaron los cambios producidos en las agrupaciones de los estudiantes de secundaria en relación al proceso de generalización y en las justificaciones dadas por los EPS al debatir virtualmente sobre estas cuestiones entre ellos.

RESULTADOS

En esta sección describimos el papel del debate como instrumento para consensuar las características del proceso de generalización, ya que éste ha jugado un papel importante en el desarrollo de la mirada profesional de los EPS de la comprensión del proceso de generalización, ante la necesidad de tener que tomar una decisión consensuada sobre la idea de generalización. Esta necesidad cambió la forma en la que los EPS parecía que estaban interpretando lo que consideraban como evidencias de la comprensión del proceso de generalización en los estudiantes de secundaria.

Momento inicial del debate

El debate se inició aportando cada EPS sus agrupaciones y justificaciones. Las agrupaciones identificadas fueron cuatro:

- *Intento de llegar a la regla general.* Estos EPS agruparon a los estudiantes de secundaria teniendo en cuenta: si habían intentado llegar a la regla general aunque no lo hubiesen conseguido (Ana y Fernando); si no lo habían intentado (Daniel y Carlos); y por último si habían llegado con éxito a obtener la regla general (Beatriz y Elena). Por lo tanto, estos EPS se fijaron en si los alumnos de secundaria habían dado el salto de una estrategia aditiva a una funcional, aunque el intento no hubiera tenido éxito.
- *Generalización cercana y lejana*. Estos EPS agruparon a los estudiantes de secundaria teniendo en cuenta qué apartados de los problemas habían resuelto correctamente: generalización cercana (Ana y Fernando), generalización lejana (Daniel) y regla general (Elena y Beatriz), haciendo notar que Carlos lo había resuelto incorrectamente.
- *Uso de método recursivo*. Estos EPS agruparon a los estudiantes de secundaria teniendo en cuenta si habían utilizado en algún apartado un método recursivo (Elena, Beatriz, Ana, Daniel y Fernando) o si lo habían hecho incorrectamente (Carlos).

- *Todo o nada*. Estos EPS agruparon a los estudiantes de secundaria teniendo en cuenta si habían llegado a una fórmula general (Beatriz y Elena) o no (Ana, Daniel, Carlos y Fernando).

Desarrollo del debate

En el desarrollo del debate identificamos cuatro momentos: exposición de qué se entiende por "generalización", necesidad de establecer niveles de generalización, negociación sobre los criterios para establecer los niveles y, por último, refinamiento de lo que entiende por "generalización." Este proceso provocó un cambio en lo que los EPS identificaban como evidencias de diferentes niveles de desarrollo de la comprensión de la generalización lineal.

La dificultad en consensuar una determinada manera de mirar la comprensión de la generalización lineal entre los EPS, hizo que JIN planteara la necesidad de compartir primero su significado:

> Tal vez no nos ponemos de acuerdo [en relación a cómo agrupar a los estudiantes] por la idea que cada uno de nosotros tenemos de generalizar. Quizás si expresamos lo que cada uno entendemos por generalizar veremos si tenemos ideas distintas.
>
> Para mi generalizar es "comenzando en los casos particulares pasar a través de un proceso a lo general, que bien puede ser a través de una fórmula matemática o bien mediante palabras, pero siempre y cuando se pueda llegar a cualquier valor a partir de esa fórmula o expresión."

La definición dada por JIN motivó la necesidad de establecer niveles en función de la "aproximación" a la regla general. La discusión derivó en dos posturas diferentes dependiendo de cómo caracterizaban el proceso de generalización en los niveles intermedios (Tabla 1).

Tabla 1. Posturas en relación a cómo los EPS caracterizaban el proceso de generalización

Postura 1	Postura 2
Nivel 1: Carlos (no coordinación de la estructura espacial ni numérica)	Nivel 1: Carlos (no coordinación de la estructura espacial ni numérica)
Nivel 2: Ana y Fernando (uso de estrategias aditivas y paso de una estrategia aditiva a la multiplicativa sin identificar constante de crecimiento	Nivel 2: Daniel (uso de método recursivo en apartados de generalización cercana y lejana sin buscar una relación funcional)
Nivel 3: Daniel	Nivel 3: Ana y Fernando
Nivel 4: Beatriz y Elena (paso de una estrategia aditiva a multiplicativa (relación funcional) en la generalización cercana identificando la constante de crecimiento)	Nivel 4: Beatriz y Elena

Ambas posturas coinciden en que en el nivel 1 están los estudiantes de secundaria que "no observan ningún patrón además de no establecer la relación entre los distintos términos de la sucesión, resolviendo los problemas sin sentido" (Carlos) y que en el nivel 4 se encuentran los estudiantes de secundaria que "llegan a la fórmula y que por tanto generalizan de forma correcta" (Beatriz y Elena). La diferencia entre las dos posturas se pone de manifiesto en qué se debía considerar en los niveles 2 y 3. La postura 1 tuvo en cuenta la caracterización del proceso de generalización como "generalización cercana y lejana" y agruparon a Ana y Fernando en el nivel 2 por haber realizado correctamente los apartados relativos a la generalización cercana, y a Daniel en el nivel 3 por haber realizado correctamente los tres primeros apartados de generalización cercana y lejana. La postura 2 tuvo en cuenta la caracterización del proceso de generalización como "intento de llegar a la regla general" ya que en el nivel 2 pusieron a Daniel porque no había intentado buscar la regla general, y en el nivel 3 a Ana y a Fernando por intentar obtener una regla general aunque el método seguido fuera erróneo.

El debate permitió a los EPS llegar a un consenso sobre cómo caracterizar el proceso de generalización, lo que provocó un cambio en la manera de mirar las respuestas de los estudiantes de secundaria. Algunos EPS, que en el cuestionario habían agrupado en función de "todo o nada" o en función del "uso o no de un método recursivo", cambiaron su forma de mirar las respuestas centrándose en el proceso de generalización, y no en si había llegado a la regla general o no, o si había usado un método recursivo o no. Así SVD, que en el cuestionario había caracterizado el proceso de generalización como "todo o nada", en el debate puso de manifiesto que las justificaciones verbales dadas por los alumnos son un paso previo hacia la generalización, lo que le permitía ver la existencia de distintos niveles de desarrollo del proceso de generalización:

> Creo que es muy importante tener en cuenta la explicación verbal de los alumnos como un paso previo hacia la generalización, para mí es un síntoma de que el alumno es capaz de intuir que va a haber algo que le permita encontrar cualquier figura superior que le pidan, aunque lo haga mal, pero por lo menos es consciente de que existe ese algo.

Otro ejemplo de cambio de mirada profesional con relación al proceso de generalización se observa en JCB, que en el cuestionario caracterizó el proceso como "uso de método recursivo", y debatir con el resto de participantes le ayudó a caracterizar el proceso de generalización como "intento de llegar a la regla general":

> A todos nos parece correcto establecer en el nivel más alto (nivel 4) a Elena y Beatriz por ser las que llegan a la regla general y en el más bajo (nivel 1) sólo a Carlos ya que además de no entender la sucesión su forma de generalizar es dibujar las figuras y hacer un conteo. Desde mi punto de vista Ana y Fernando estarían en el nivel 3 ya que intentan generalizar, en cambio Daniel estaría en un nivel 2 pues para resolver la figura siempre parte de la anterior por lo que no veo el intento de generalizar por ningún lado.

El debate también ayudó a los EPS a refinar la caracterización que habían hecho previamente del proceso de generalización. Por ejemplo, ante el comentario de JIN de considerar en el mismo grupo a Carlos y Daniel por usar la misma estrategia: "*Si decidimos ordenarlos por su forma de generalizar habría que meter a Daniel y Carlos en el mismo grupo pues usan la misma estrategia, aunque Carlos se confunda"*, PVR manifestó su desacuerdo por considerar que las estrategias utilizadas por los estudiantes de secundaria eran diferentes y por tanto no mostraban el mismo nivel de generalización. Refiriéndose a la resolución del problema 2 dijo:

> Daniel y Carlos no pueden estar en el mismo grupo. Daniel en su razonamiento dice: "la figura tres tiene trece cuadrados negros y las otras cuatro más y tienen treinta y dos cuadrados blancos y las otras ocho cuadrados más", mientras que Carlos dice: "que ha añadido cuadrados para tener la figura que tenía y los ha contado". Por tanto, creo que el nivel de generalización es diferente, Daniel observa el número de cuadrados blancos y negros que aumentan con cada figura, mientras que Carlos no.

DISCUSIÓN

Este estudio aporta información sobre el desarrollo de la competencia docente "mirar de manera profesional" en el dominio específico de los problemas de generalización lineal. Contribuimos en este campo aportando información sobre cómo los EPS caracterizan el proceso de generalización en los estudiantes de secundaria y el papel del debate virtual en el desarrollo de la mirada profesional, ante la necesidad de tener que tomar una decisión consensuada (Fernández et al., 2012; Sánchez, García y Escudero, 2013).

Las caracterizaciones del proceso de generalización dadas por los EPS fueron varias: el intento de llegar a la regla general, generalización cercana y lejana, uso del método recursivo y todo o nada. Sin embargo el debate permitió a los EPS intercambiar diferentes posicionamientos sobre cómo caracterizar el proceso de generalización, lo que provocó un cambio en la manera de mirar las respuestas de los estudiantes de secundaria en algunos de ellos. Así, los EPS que en el cuestionario habían agrupado en función de "todo o nada" o en función del "uso o no de un método recursivo" cambiaron su forma de mirar las respuestas centrándose en el proceso de generalización y no en si había llegado a la regla general, o si había usado un método recursivo. Así el debate ayudó a los EPS a centrar su mirada en las ideas que subyacen en el proceso de generalización: generalización cercana y lejana e intento de expresar la regla general (paso de la estrategia aditiva a la funcional), más que en el procedimiento realizado. En este sentido, la interacción con otros para poder convencer de la aceptabilidad y validez de las diferentes ideas ayudó a los EPS a trasladarse desde meras descripciones del uso de procedimientos a mostrar evidencias de la comprensión de los estudiantes de secundaria sobre el proceso de generalización, detallando ideas que subyacen en el proceso. Estos resultados confirman, en otro dominio matemático (problemas de generalización lineal), los resultados obtenidos por Fernández et al. (2012) con respecto a que los debates en línea puede favorecer el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación. España,

Referencias

Cañadas, M. C., Castro, E., y Castro, E. (2007). Descripción de la generalización de estudiantes de 3º y 4º de ESO en la resolución de problemas que involucran sucesiones lineales y cuadráticas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI*. (pp. 283-294). Badajoz: SEIEM.

Clark, D.B., Sampson, V., Weinberger, A., y Erkens, G. (2007). Analytic frameworks for assessing dialogic argumentation in online learning environments. *Educational Psychology Review, 19*(3), 343-374.

Fernández, C., Llinares, S., y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education*, 44, 747-759.

García-Cruz, J.A., y Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. En A. Olivier y K. Newstead (eds.) *Proceeding of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, 329-336. University of Stellenbosch. Stellenbosch, South Africa.

García-Cruz, J. A., y Martinón, A. (1999). Estrategia visual en la generalización de pautas lineales. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(1), 31-43.

Magiera, M., van den Kieboom, L., y Moyer, J. (2013). An exploratory study of preservice middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *84*, 93-113.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Mouhayar, R.R., y Jurdak, M.E. (2012). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 379-396.

Radford, L. (2008). Iconicity and construction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education, 40*, 83-96.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education, 4* (pp. 17-24). Ankara, Turquía: PME.

Rivera, F.D., y Becker, J. (2005). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 465-472. Prague: PME.

Rivera, F.D., y Becker, J. (2007). Abduction in pattern generalization. En W. Jeong-Ho, L. Hee-Chan, P. Kyo-Sik y J. Dong-Yeop (Eds.), *Proceedings of the 31stbconference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 97-104). Seoul, Korea: Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Rivera, F.D., y Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education*, *48*, 65-82.

Sánchez, V., García, M., y Escudero, I. (2013). An analytical framework for analyzing student teachers' verbal interaction in learning situations. *Instructional Science, 41*(2), 247-269.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., y Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Delofeu, M.C. Penalva, F.J. García, y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI.* (pp. 497-508). Jaén: SEIEM.

Scherrer, J., y Stein, M.K. (2013). Effects of a coding intervention on what teachers learn to notice during whole-group discussion. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 16(2), 105-124

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., y Philipp, R. A. (Eds) (2010). Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes. New York: Routledge

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Van Es, E. y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10(4), 571-596.

Wells, G. (2002). *Dialogic Inquiry. Towards a sociocultural practice and theory of education* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Yesildere-Imre, S., y Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalizing number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 207-226.

Zapatera, A., y Callejo, M.L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds). *Investigación en Educación Matemática XV.* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.

Zapatera A., y Callejo, M.L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Etepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM

Zazkis, R., y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 379-402.