

## La Habilidad Ubicación Espacial Matemática, como Habilidad Esencial, en la Visualización Matemática

Lilia López, Alfredo Alanís y Olga L. Pérez  
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UANL  
México  
lilia\_lopez@hotmail.com  
Visualización — Nivel Superior

### Resumen

Se investiga el desarrollo de la Habilidad Ubicación Espacial Matemática (HUEM) y la Habilidad de Transferencia entre Registros del Sistema Semiótico de Conceptos Matemáticos como habilidades componentes de la Visualización Matemática Tridimensional. Se analiza en la relación dialéctica conocimientos-habilidades del Pensamiento Geométrico, a la habilidad de identificar, comprender y comunicar relaciones de posición en el espacio sensible y en el espacio modelado (curvas, superficies y sólidos, ubicados en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ ). Con base en la Teoría de la Actividad y Validaciones Didácticas, se identificó el deficiente desarrollo de la HUEM en estudiantes de Licenciatura en Física y Matemáticas, cuando se requiere de puntos de referencia no fijos y no observables.

### Introducción

Es común hablar de la Geometría en función de las etimologías como “medición de la tierra”, de la concepción Pitagórica como “Ciencia del espacio, arte práctico y ciencia obtenida por observación” o de Los Elementos de Euclides como “Ciencia contemplativa y descripción de formas y figuras de la cantidad continua que muestra las propiedades de las figuras (líneas, superficies y cuerpos)”. Actualmente, se reconoce a la Geometría por su carácter formativo, como fuente de problemas y como medio para la articulación de problemas entre diferentes niveles de enseñanza. A la vez que, se enseña e investiga en el nivel superior, como *Ciencia Pura* (Geometrías Euclidianas y no Euclidianas). El presente trabajo, forma parte de una investigación mas completa sobre el *Desarrollo de Habilidad de Ubicación Espacial Matemática (HUEM), como Habilidad Esencial en la Visualización Matemática Tridimensional*, requerida en la solución de problemas de matemáticas de nivel superior y del ejercicio profesional. Coincidimos con Crowley M (1987), quien afirma que el Modelo del Pensamiento Geométrico de Van Hiele constituye una guía para la instrucción y evaluación de *habilidades geométricas* en los alumnos y lo consideramos como una relevante contribución al PEA de la Geometría Tridimensional, concebida como la Geometría que estudia a las *relaciones cualitativas y cuantitativas de las formas espaciales volumétricas, desde las nociones espaciales iniciales hasta la geometría Analítica del Espacio* y su relevancia en la Matemática de Nivel Superior.

## Desarrollo

### 1. Visualización Matemática

De la investigación bibliográfica, respecto a las concepciones de visualización encontramos que a partir del Modelo Van Hiele se concibe a la Visualización como el Nivel 0 (o básico), en el que los estudiantes están conscientes del espacio sólo como algo que existe alrededor de ellos y los conceptos geométricos se ven como entidades totales. Pero En particular, Duval R.(1999b) analizó diferencias radicales entre *Visión Humana* (percepción de objetos físicos), *Visión* (visualización icónica espontánea) y *Tipos de Visualización*, afirmando que para *Ver en Matemáticas*, “la visualización 3D/2D es una representación que, a diferencia de la percepción, no se desarrolla en el espacio real en 3D, sino que se proyecta sobre una superficie en 2D (roca, papel, pantalla electrónica...), no es una maqueta 3D/3D, pero se visualiza la profundidad propia de la percepción visual, gracias al surgimiento de la perspectiva”. Apoyándonos en las concepciones de Zimmermann & Cunningham (1990), De Guzmán, M.(1996) y de Duval R.(1999b), arribamos a la siguiente concepción: *La Visualización Matemática*, no es una visión inmediata, es un camino de codificación y decodificación de objetos matemáticos abstractos (ideas, conceptos y métodos de las matemáticas), que presentan una gran riqueza de contenidos visuales (imágenes mentales, o a lápiz y papel o con la ayuda de tecnología), representables geoméricamente en un sistema coordenado, para la solución de problemas. Respecto a la formación y desarrollo de habilidades matemáticas, consideramos a la Visualización como una habilidad profesional, coincidiendo con Fariñas,G.1995, en Velásquez, B. et al (2001), quien afirma que *Comprender, Visualizar y Comunicar*, son Habilidades Matemáticas (HM), de carácter integrador, que se desarrollan en la solución de problemas en la actividad matemática y en diversas esferas de la vida. En el marco de la Ingeniería Didáctica (Brousseau,1980), las representaciones geométricas, constituyen al *registro geométrico* del Sistema Semiótico de los conceptos, por lo que es fundamental el desarrollo de la habilidad de visualización matemática en la solución de problemas.

### 2. Sistema de Habilidades de la Visualización

De experiencias didácticas realizadas en diferentes niveles académicos, identificamos como *habilidades componentes* de la Visualización Matemática a la *Habilidad de Transferencia* y la *Habilidad de Ubicación Espacial Matemática*. Respecto a la *habilidad de transferencia* en el sistema semiótico de conceptos matemáticos, hacemos referencia, tanto al *pensamiento visual* en el *pensamiento matemático* en términos de imágenes mentales, como a la cita de Hilbert en Rey Pastor (1977) “los signos y fórmulas de la aritmética son figuras escritas, y las figuras geométricas son fórmulas dibujadas, ningún matemático podría prescindir de éstas fórmulas dibujadas, así como no podría realizar cálculos sin paréntesis ni signos operativos”; e implementamos estrategias del “El currículum basado en el Modelo de la Representación Triple (TRM)”, enunciada por Schwartz. Dreyfus & Bruckheimer (1990) en el cual, la Transferencia parte de una *Situación Real* hacia una *Representación numérica*, o hacia una *Representación algebraica*, o hacia una *Representación geométrica* y viceversa ... y está basado en la resolución de problemas incluyendo *transferencia entre representaciones*.

Concebimos como una de las habilidades elementales de la HUEM, a la *habilidad de representar*, definida en la Geometría Descriptiva y en el aporte teórico de Álvarez García J. (2001), quien define a la habilidad de *representación gráfica* como *proceso* y como *macrohabilidad*, para la

formación del arquitecto. Pero el objetivo en programas de Arquitectura o Dibujo Industrial, es analizar propiedades de los Sistemas de Proyección con *punto al infinito* o *propio* y desarrollar la habilidad de trazar y/o analizar Intersecciones, Paralelismo o Perpendicularidad entre rectas o entre planos, sin considerar *Sistemas coordenados*. Desarrollar la habilidad de transferencia de las percepciones tridimensionales a representaciones bidimensionales y viceversa, forma parte de la formación básica exigida en el nivel universitario. Pero, en La Geometría Analítica del Espacio, en la Geometría Diferencial, en el Cálculo de dos variables, en el Cálculo Vectorial y la Matemática que requiera de gráficos en el sistema coordenado tridimensional, las *referencias espaciales* deben darse en relación a las siguientes *lateralidades definidas para el nivel superior*: “Arriba – abajo del piso”(del plano coordenado  $Z=0$ ), “Al frente – atrás del plano  $X=0$ ” o “A la derecha – izquierda del plano  $Y=0$ ”. Por lo tanto, en la presente investigación se concibe a la *visualización matemática tridimensional* como la habilidad de codificar un objeto volumétrico de 3D para modelarlo, representarlo y ubicarlo en un sistema coordenado tridimensional en 2D o viceversa (decodificarlo).

### **3. Habilidad Ubicación Espacial Matemática (HUEM)**

Del análisis curricular sobre temas de Geometría, en libros de texto de Primaria y Secundaria en los Programas oficiales de la Secretaría de Educación Pública (SEP), México, se identificó que: una primer etapa de la *Habilidad de Ubicación Espacial* (en el Plano), se debe desarrollar en 1° y 2° grado, con actividades para ubicar a su persona y objetos en el entorno, en mapas sencillos y en dibujos sobre hojas planas con “dos “pares de referencia”. Como una segunda etapa, en 3° y 4° grado se trabajan “tres pares de referencia” en mapas y dibujos con las nociones iniciales del sistema coordenado bidimensional, en términos de cuatro puntos cardinales. Saiz,I (1998) constató dificultades conceptuales presentes en 2° y 3° grado, al identificar las lateralidades del objeto y transferir las del sujeto. Pero, a partir de 5° y 6° grado y en Secundaria, ya no se define explícitamente el objetivo de desarrollar la habilidad de ubicación espacial y se trabajan propiedades, fórmulas y construcciones de sólidos básicos. En Programas del Nivel Medio Superior, se incluyen conceptos y gráficas de funciones lineales y cuadráticas, en el Sistema coordenado bidimensional, pero se adolece de estrategias didácticas que contribuyan al desarrollo de la habilidad de ubicación espacial tridimensional. Acuña C. (2001), investigó en grupos de bachillerato, sobre la localización de puntos y regiones en el plano a partir de ecuaciones o signos de las componentes de los pares ordenados, pero no hace referencia explícita a la habilidad de ubicación espacial. A través de entrevistas a los docentes de matemáticas de Licenciaturas e Ingenierías de la UANL, México, se identificó que los docentes presuponen que la alfabetización geométrica y la habilidad de visualización tridimensional se desarrollaron en los estudiantes, en niveles educativos precedentes. Pero las experiencias didácticas con los grupos de matemáticas de FCFM, dan cuenta de deficiencias en la relación dialéctica conocimientos-habilidades del pensamiento geométrico para la enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el Nivel Superior.

A partir del análisis curricular, de la investigación bibliográfica y experiencias didácticas, identificamos tres niveles de desarrollo de la HUEM, con carácter secuencial y de ascenso en la relación dialéctica *conocimientos-habilidades* del Pensamiento Geométrico:

- *Ubicación Espacial*: Es la habilidad del sujeto de controlar (identificar, comprender y comunicar) sus relaciones de posición con el *espacio sensible*. Permite establecer espacialmente la relación objeto-sujeto e identificar las direcciones principales del espacio y de las referencias espaciales. Se basa en una Percepción Espacial bidimensional o tridimensional, a partir de un Punto de referencia (Martínez y Rivaya, pp. 49-65). Se identifican lateralidades del objeto (arriba-abajo, al frente y atrás, a la izquierda y derecha) y se transfieren las del el sujeto (Saiz, I, 1998)
- *Ubicación Espacial Matemática*: Se caracteriza en la relación dialéctica *conocimientos-habilidades del Pensamiento Geométrico*, considerando, la transferencia entre los conocimientos (símbolos, definiciones y propiedades) y la ubicación espacial de objetos (gráficos) en el *espacio modelado* (Sistema coordenado bidimensional o tridimensional).
- *Ubicación y Reubicación Espacial Matemática*: En éste nivel, los objetos tridimensionales deben ser modelados, ubicados e interpretados antes y después de transformaciones geométricas (traslaciones, rotaciones y reflexiones) y/o antes y después de efectuar transformaciones de coordenadas.

#### 4. Implementación de instrumentos semióticos para el desarrollo de la HUEM

Coincidimos con Godino y Flores (1998) respecto a que “un recurso didáctico, es una *situación didáctica integral* ... que en la praxis, no debe desplazar a la expresión matemática”. También estamos de acuerdo con Velásquez, B. et al (2001), quien afirma que las *situaciones didácticas* que se estructuran para promover el desarrollo de la habilidad de comprender, *visualizar* y comunicar, constituyen una forma de integrar las orientaciones didácticas de los diversos Materiales de Apoyo oficialmente establecidos. Por tanto, se concibe la demanda de desarrollar e implementar *instrumentos semióticos* en el PEA de la Geometría, para el desarrollo de la Habilidad de Transferencia entre los registros de Representación de los conceptos. En la actualidad, los gráficos especializados y la Visualización Científica son un soporte para la investigación en el desarrollo de la Ciencia y la Tecnología. Por lo que la investigación basada en superordenador, es urgente ante las complejas demandas de la globalización, la competitividad e internacionalización de los mercados, el desarrollo vertiginoso de las tecnologías de la comunicación y la abrumadora generación de conocimientos.

Para la Validación Didáctica, se enfrentó al alumno en clase ante la demanda de aplicar la Transferencia entre el Status Objeto y el Status Herramienta en el TRM, por ejemplo:

I. Se pidió modelar matemáticamente al diseño de *dos ductos* que descansan sobre una superficie plana (Fig.1), tales que uno tiene el doble del diámetro del otro, con tareas:

<p>Tarea 1: Representar y Ubicar “de manera adecuada” a los objetos tridimensionales en el sistema coordenado tridimensional. (3D/2D en la hoja de la libreta o en el pizarrón) (Fig.2)</p> <p>Tarea 2: Identificar la Ecuación algebraica de cada cilindro, en función de la elección del plano coordenado al que son tangentes. (Transferencia hacia el Registro Algebraico)</p> <p>Tarea 3: Parametrizar la curva de intersección y obtener el gráfico de la Curva de Intersección, mediante el uso de Tecnología (Matemática, Derive, Maple o el diseño de algún graficador programado por los mismos estudiantes). (Fig.3) Ver figuras en Anexo.</p>
---

II. Se aplicó la estrategia de Transferencia entre el *registro simbólico* propio a un software y el *registro geométrico* (Fig. 4) y un cuestionario a un grupo de 25 alumnos de Cálculo Vectorial, el cual, ya cursó Cálculo Diferencial e integral de una variable y cálculo con Geometría Analítica en el Plano y en el Espacio con los siguientes resultados:

**Respuestas de 25 alumnos de Cálculo Vectorial:**

1. ¿EN DÓNDE ESTÁ EL ORIGEN?  
44 % en la esquina del cero, 10% adentro de la caja, 5% no se, 30% intentó pintarlo
2. ¿EN QUÉ OCTANTE ESTÁ ESTA LA GRÁFICA DE LA CURVA EN LA Fig. 2?  
24% no se, hay dos ceros, 44% en el primer octante, 32% en varios
3. ¿LA CURVA ESTÁ ARRIBA DEL PLANO XY?  
24% no se ve el plano xy, no están marcados los ejes coordenados, 44% si, 32% no
4. ¿CUÁL ES LA ORIENTACIÓN POSITIVA DE LA TRAYECTORIA? 48% “anti-horario”
5. ¿EN DÓNDE ESTÁ EL PIE DEL RADIOVECTOR QUE LA GENERA?  
76% en el origen, 24 % en la esquina del cero

### **Conclusiones**

De realizaciones didácticas análogas, aplicadas a grupos de Matemáticas III y Cálculo Vectorial se constató que: La deficiente Habilidad de Transferencia desde y hacia el registro geométrico de los conceptos para resolver problemas de libros, laboratorios o exámenes, se refleja en la dificultad para *traducir*, mediante el lenguaje científico y coloquial, el registro numérico, el registro algebraico y el registro geométrico, provocando un aprendizaje defectuoso que obstaculiza el aprendizaje significativo.

Se concluye que cuando el estudiante, enfrenta el problema de “ubicar adecuadamente las superficies” para encontrar la curva de intersección, para aplicar Teoremas de Cálculo Vectorial o para definir la dirección que tendría una partícula en un punto fijo o móvil sobre una curva o una superficie, que a su vez está afectada por un campo vectorial, *es esencial la habilidad de ubicación espacial matemática* (del punto, curva o superficie) en la habilidad de reubicación espacial del vector cuyo pie está en dicho punto, para saber si la dirección y sentido de dicha partícula es hacia arriba-abajo, a la izquierda-derecha y/o al frente- atrás de un plano coordenado o un objeto geométrico.

Sumado a la habilidad de estructuración de conceptos elementales y nociones espaciales iniciales, es necesario que en el estudiante se desarrolle o incluso se formen las siguientes habilidades, la habilidad de ubicación espacial física de los objetos, la habilidad de representar objetos en una hoja plana y la habilidad de ubicación espacial en el Plano coordenado, para que en él, se desarrolle (o forme) la habilidad de ubicación espacial en el sistema coordenado tridimensional, como habilidad esencial de la Visualización Matemática Tridimensional, requerida en la solución de problemas de matemáticas de nivel superior y del ejercicio profesional.

### Referencias Bibliográficas

- Acuña, C. (2001). Concepciones en graficación, el orden entre coordenadas de los puntos del plano artesiano: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(3), 203-217.
- De Guzmán, O. (1998). Visualización Matemática. *Universidad Computense de Madrid, España*. [En Línea] Disponible en: <http://www.oli.org.co/oeivirt/edumat.htm>
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Fuentes, H. (2000). Didáctica de la Educación Superior y Dinámica del PDE de la Educación Superior. *Publicación del Centro de estudios "Manuel F Gran" Universidad de Oriente, Santiago, Cuba*.
- Godino, J. D. y Flores, P. (1998). Papeles instrumentales y semióticos de los recursos manipulativos en el estudio de las matemáticas. *Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada*; [En Línea] Disponible en <http://www.ugr.es/local/jgodino/>
- Saiz, I. (1998). Ubicación espacial en los primeros años de escolaridad: *Educación Matemática* 10(2). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

### ANEXO

Fig. 1

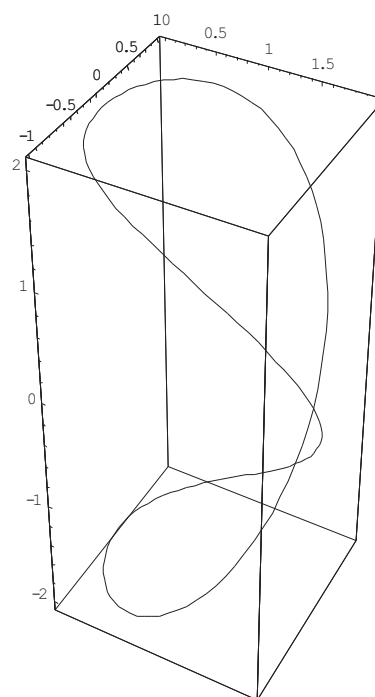
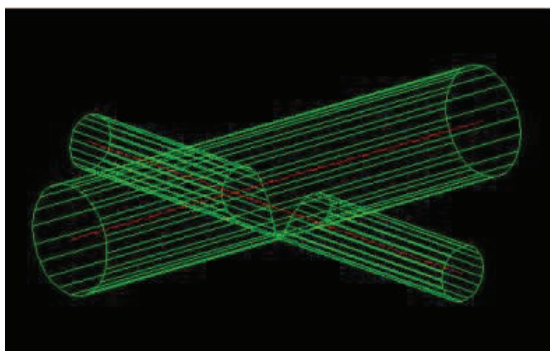


Fig. 3

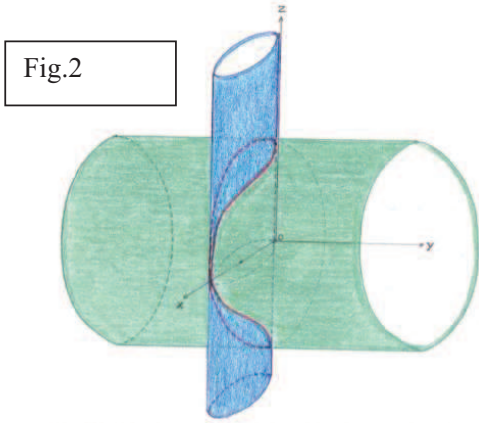


Fig.2

$$\begin{aligned}
 S_1 : x^2 + z^2 &= 4 && \text{cilindro circular (horizontal).} \\
 S_2 : (x-1)^2 + y^2 &= 1 && \text{cilindro circular (vertical).} \\
 \\ 
 \text{de } S_1 : x^2 + z^2 &= 4 && z = 2 \cos t \quad \begin{matrix} x \\ \circlearrowleft \\ z \end{matrix} \\
 & && r = 2, x = 2 \sin t \quad t \in [0; \pi] \\
 \text{de } S_2 : (x-1)^2 + y^2 &= 1 && y = \pm \sqrt{2x-x^2} \\
 x^2 - 2x + y^2 &= 0 && y = \pm \sqrt{4 \sin t - 4 \sin^2 t} \\
 \\ 
 \therefore R(t) &= (2 \sin t) \mathbf{i} + (2\sqrt{\sin t - \sin^2 t}) \mathbf{j} + (2 \cos t) \mathbf{k} \\
 \text{ó } R(t) &= (2 \sin t) \mathbf{i} - (2\sqrt{\sin t - \sin^2 t}) \mathbf{j} + (2 \cos t) \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

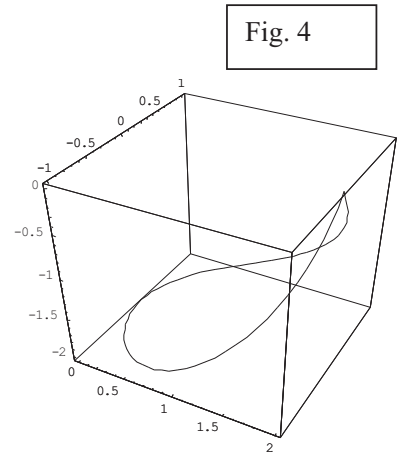


Fig. 4