

## VISUALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Claudio Enrique Opazo Arellano, Jesús Grajeda Rosas y Rosa María Farfán Márquez

Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

México

opazoferrari\_claudio@hotmail.com, grajedard@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

**Resumen.** El artículo reportado es fruto de las reflexiones que se dieron durante nuestro primer semestre de Maestría en el Cinvestav – IPN. En este contexto, nuestro trabajo presenta una propuesta de una situación de aprendizaje en un entorno tecnológico. Para ello, se utilizaron como referencias las reflexiones con base a algunos elementos tales como el uso de las computadoras en el aula o bien, trabajos realizados en torno a la aplicación de programas educativos de orden tecnológico, como es el caso particular de Geogebra. La propuesta de nuestro trabajo, pone como objeto matemático a la función cuadrática de tal forma de presentar a la visualización del comportamiento gráfico de ésta, a partir de la variación de sus parámetros, utilizando el programa antes mencionado

**Palabras clave:** Socioepistemología, Visualización, Función cuadrática, GeoGebra

**Abstract.** The paper reported is the result of the thoughts that occurred during our first semester of Masters in the CINVESTAV-IPN. In this context, our work presents a proposal for a learning situation in a technological environment. For this, we used as references, reflections based on elements such as the use of computers in the classroom or, work done on the application of a technological education programs, as is the case of Geogebra. The proposal of our work puts as a mathematical object to the quadratic function, in such a way to present a graphic the visualization of this behavior, from the variation of its parameters, using the above program

**Key words:** Socioepistemology, Visualization, Quadratic function, GeoGebra

### Introducción

Nuestro trabajo presenta la propuesta de una situación de aprendizaje elaborada por estudiantes de Maestría del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, con objeto de ser aplicado a estudiantes del nivel Medio Superior de los cursos normales en México. Ahora bien, con la implementación de esta situación de aprendizaje se espera observar si el alumno puede reconocer, cómo afecta la variación de los parámetros de la expresión algebraica de la función cuadrática en su representación gráfica, mediante el uso de la tecnología como herramienta en la construcción del conocimiento matemático y del desarrollo de habilidades en éste, al momento de construir la gráfica de una función cuadrática.

Lo anterior se espera abordar bajo la implementación de GeoGebra, programa matemático interactivo en el mundo educativo, el cual propone el desarrollo de Hojas Dinámicas como medio de interacción entre sus usuarios. Con base en lo anterior, se han desarrollado algunas Hojas Dinámicas, unas para la función cuadrática de la forma  $Y = ax^2 + bx + c$  y otras para la función cuadrática factorizada de forma  $Y = a(x + b)^2 + c$ . Ahora bien, a la par se han elaborado hojas de actividades en las cuales se indican los pasos a seguir en lo que respecta a cada una de las Hojas Dinámicas, ello con el fin de que el estudiante logre visualizar y adquirir en su construcción del conocimiento matemático, cómo afecta la variación de los parámetros al comportamiento de la

gráfica, esto a la espera de que el estudiante adquiriera habilidades que le permitan posteriormente realizar el bosquejo de alguna función cuadrática o bien, una de tipo polinomial, sin necesidad de utilizar un software determinado.

En este contexto, es importante indicar que nuestra hipótesis inicial, considera el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza como un factor que ayudará a que se dé de mejor manera el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que posee elementos técnicos que entre otras cosas, permite visualizar funciones de cualquier tipo de manera dinámica y rápida, junto con facilitar procesos de cálculo. Esto implica un cambio en el esquema tradicional de enseñanza y una evolución por parte del profesor y el alumno en relación al uso de las tecnologías en la actualidad.

Ahora bien, destacamos que nuestro trabajo toma como eje principal a la visualización, la cual se entiende como proceso mental, en donde lo visible de este proceso es la obtención de tal, a partir de ser evocada mediante algún tipo de grafismo (gráfica matemática, bosquejo gráfico, dibujo, escrito o fórmula), así como también por el lenguaje o los gestos de cierto sujeto (Bosch, 1994). Por otra parte Cantoral y Montiel (2001) dicen que: “Se entiende por visualización a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual” (p. 14). En este contexto se ha elaborado entonces, la situación de aprendizaje de tal manera que el estudiante logre al concluir las actividades, visualizar cualquier función cuadrática y con ello crear habilidades para que con posterioridad, éste pueda visualizar una función polinomial de grado superior a dos.

En relación a lo anterior declaramos que el foco de atención de nuestro trabajo, está puesto en la *visualización*, ya que entendemos la relevancia de este campo de estudio que hoy la Matemática Educativa ha abordado y reportado, con objeto de hacer ver otras áreas a desarrollar en el proceso de enseñanza y aprendizaje, tal que en los estudios realizados, se ha observado el privilegio del contexto algebraico en el discurso de la matemática escolar del nivel Medio Superior y Superior tal como lo reporta Campos (2003). Dicha situación, preocupa a la comunidad por el hecho de observar un alejamiento a los aspectos visuales. Por ello, la situación de aprendizaje propuesta pretende justamente atender lo que el discurso escolar ha olvidado. Finalmente, nos interesa indicar que el diseño que hemos propuesto, es sustentado por la visión Socioepistemológica, la cual tiene como función, buscar las bases para que la reorganización matemática sea coherente y pertinente con los fenómenos didácticos a través de relaciones complejas que abarcan dimensiones epistemológicas, cognitivas, didácticas y sociales.

## Metodología

El diseño metodológico del presente trabajo de investigación presenta sus bases en la Ingeniería Didáctica, esto a partir de la búsqueda de una plataforma que cumpliera con la necesidad de contar con un bosquejo claro y estructurado a la hora de poner a prueba nuestras actividades.

Es importante reconocer que el término Ingeniería Didáctica, surge en el seno de la escuela francesa a comienzo de los años ochenta, en analogía al quehacer en ingeniería, ya que ella basa su trabajo en el conocimiento científico, a partir de la toma de decisiones y el control sobre las inherentes componentes del proceso. De esta manera, tal como lo expone García (2007) la Ingeniería Didáctica, se constituye como una metodología de investigación aplicable a los productos de la enseñanza o derivados de ella, como es la metodología de producción para guiar la experimentación en clase.

Teniendo en cuenta lo anterior dejamos como antecedente, el hecho de que la Ingeniería Didáctica, se basa a su vez en la teoría de la Transposición Didáctica y en la teoría de Situaciones Didácticas. A lo anterior, sumamos la relación que genera la Ingeniería Didáctica con el ambiente escolar, al establecer ciertas analogías con el trabajo de un ingeniero, el cual considera como referencia en su desarrollo profesional, centrar su esfuerzo y dedicación en torno a un trabajo determinado, con base en un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articula de forma coherente, al igual que en el caso de un profesor.

Ahora bien, creemos relevante destacar la existencia de dos tipos de Ingenierías Didácticas, la de investigación y la de producción. La primera, se considera una metodología de investigación y busca caracterizar a-priori una situación y confrontarla con un análisis a-posteriori de la realidad observada. La segunda es más estandarizada, pues cumple con todos los requisitos de una ingeniería, es decir, es eficaz, posee solidez y se adapta a diversos contextos.

Es importante indicar que la Ingeniería Didáctica cuenta con cuatro fases fundamentales para la elaboración de ella, las cuales son descritas por López (2009) de la siguiente manera:

- 1) Análisis preliminar.
- 2) Análisis a priori y diseño de la situación didáctica.
- 3) Experimentación.
- 4) Análisis a posteriori y validación.

En relación a lo anterior, indicamos que al considerar las distintas fases de la Ingeniería Didáctica y a razón de la aplicación del diseño de situación de aprendizaje, se ha considerado desarrollar solo

dos las cuatro fases de la ingeniería, siendo estas, el análisis preliminar y el análisis a priori. En el caso de la primera, desarrollaremos un análisis del concepto de visualización a partir de la revisión de los textos escolares de matemática del Nivel Superior en México, de tal forma de observar en ellos, cómo es abordado el tema de nuestro interés. Para la segunda fase, levantaremos las hipótesis en torno a las posibles respuestas que pudiésemos obtener de parte de los estudiantes que realicen la situación de aprendizaje. La decisión de solo considerar estas dos fases, es en virtud de que al ser nuestra primera experiencia, las reflexiones que surjan de ella, nos ayudaran a lograr en el futuro, un instrumento más objetivo y próspero en torno a nuevas investigaciones.

Nos parece relevante indicar en este contexto, que tanto para el caso de la experimentación y análisis a posteriori, nos planteamos la tarea de dar cabida de estas dos fases restantes, en un próximo trabajo. Ahora bien, debemos destacar además, que la Ingeniería Didáctica la entenderemos en esta oportunidad, como una metodología de investigación, en consideración a una de las formas de las cuales se puede percibir a ella.

### Los instrumentos de investigación

Nuestra situación de aprendizaje, cuenta con el desarrollo de algunas Hojas Dinámicas en GeoGebra y sus correspondientes hojas de trabajo dirigidas al estudiante, de tal manera de que éste, pueda trabajar de manera autónoma, sin necesidad de que el profesor intervenga en la dicha actividad. Ahora bien, a continuación, ofrecemos algunos ejemplos de las Hojas Dinámicas que se han confeccionado para los fines antes descritos. En la figura 1 se muestra la carátula de la primera Hoja Dinámica, la cual aborda la función cuadrática de la forma  $Y = ax^2 + bx + c$ .



Figura 1. Carátula de la Hoja dinámica de la actividad uno.

En la figura 1 se muestra una parte de la Hoja Dinámica, donde se intenta dar un primer acercamiento a la función cuadrática. En esta Hoja Dinámica, mientras más se recorre el deslizador en dirección a la derecha, más se cierra el segmento de parábola, es decir, Alexis se pone más feliz. En las hojas de trabajo vienen preguntas como: Para la expresión  $Y = ax^2$  ¿Qué valores de  $a$  crees que harán que nuestro amigo se ponga más feliz? ¿Cómo tendría que ser  $a$  para que se ponga triste (que la boca se voltee para abajo)? y una serie de preguntas cuya finalidad es,

encaminar al alumno a construir su propio conocimiento en relación a los comportamientos tendenciales de las funciones.

Indicamos que para la función cuadrática de la forma  $Y = ax^2 + bx + c$  se han desarrollado tres Hojas Dinámicas en total, mientras que la expresión de la forma  $Y = a(x + b)^2 + c$  se ha desarrollado solo una Hoja Dinámica, cuya carátula se muestra en la figura 2.

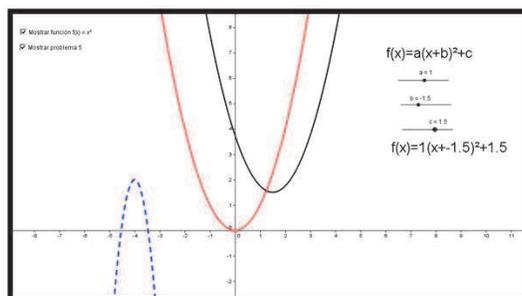


Figura 2. Carátula de la Hoja Dinámica para la manipulación de la función  $Y = a(x + b)^2 + c$ .

Indicamos que en la hoja de trabajo correspondiente a la figura 2, se dan una serie de indicaciones en donde se le pide al alumno que mueva libremente los deslizadores marcados con las letras  $a$ ,  $b$  y  $c$  con la finalidad de que puedan ir reconociendo cómo afectan a la gráfica, los cambios de valores. Posteriormente se asigna un conjunto de preguntas que permitan guiar al alumno en la construcción de aquellos valores que debe tener  $a$ ,  $b$  o  $c$  para que la gráfica se contraiga o dilate en primera instancia, luego para que se desplace horizontalmente a la izquierda o derecha, o bien, lo haga verticalmente para arriba o para abajo respectivamente, en función de la variación de los parámetros que representan a la expresión algebraica de la función cuadrática. Finalmente se le pide al alumno que prediga qué valores deben tener los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que la gráfica negra de acuerdo a la figura 2 quede arriba de la gráfica azul puntuada. Todo ello, con la finalidad de que el estudiante pueda tener un control de su propio aprendizaje y por cierto, sobre la construcción del conocimiento que ha desarrollado hasta ese apartado.

### Resultados Preliminares

Destacamos en este apartado, el que nuestro trabajo no ha sido aplicado aún, sin embargo, nos parece importante mencionar los resultados a priori. Ello porque es parte de nuestra estructura metodológica y porque con base en los estudios que hemos realizado sobre el tema, estamos en condiciones de hacer algunas indicaciones.

A partir de la aplicación del instrumento, se espera que el estudiante pueda:

- ❖ Tener acceso fácil a las instrucciones que se brinden en éste.

- ❖ Manifestar complicaciones con los parámetros de las funciones presentadas. Tal que las investigaciones dan cuenta de que los estudiante, son parte de una formación escolarizada, con base a estructuras clásica de la enseñanza, manifestadas en procesos algorítmicos.
- ❖ De los parámetros que son parte de la expresión algebraica de la función cuadrática  $Y = ax^2 + bx + c$ ; creemos que los estudiantes tendrán mayor complicación en el parámetro  $b$ . Esto porque la formación que han recibido ellos, solo da espacio al análisis de  $a$  y  $c$ , lo cual manifiesta una perspectiva algorítmica, centrada en los aspectos esenciales tales como: Poner atención al signo que acompaña al primer parámetro, de tal manera de observar su concavidad. Así también, es el caso del último parámetro, donde la enseñanza es puesta en escena, como el punto de intersección de la parábola con el eje de las ordenas.
- ❖ De nuestra última actividad, esperamos que los estudiantes puedan presentar complicaciones cuando se les solicite expresar el bosquejo que representa el comportamiento de la expresión algebraica de la función cuadrática de la forma:  $Y = a(x + b)^2 + c$ .

### Reflexiones Actuales

Dar espacio a la reflexión en torno a un proceso siempre es sano y de necesidad en torno a éste. Es por ello entonces, el surgimiento de nuestras prospectivas en torno al trabajo realizado hasta el momento

Uno de los puntos que debemos destacar en primera instancia, es el hecho de que nuestro trabajo ha presentado ajustes en torno a su aplicación y por cierto a su estructura, en virtud de obtener un producto de calidad en ambos casos. Ahora bien, el trabajo se ha desarrollado de forma íntegra como parte de nuestra formación académica y profesional.

Es importante destacar, que nuestros intereses académicos e investigativos, están puestos en dar espacio a la reflexión en torno al concepto de *Visualización de la funciones polinomiales*. Principalmente, con objeto de abrir el abanico en torno a las acciones de enseñanza que hoy viven en la escuela y por cierto, en la formación profesores. En ese contexto, es que se ha estructurado la situación de aprendizaje que ha sido una de las ganadoras del concurso de carteles del coloquio de doctorado del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav – IPN.

Ahora bien, indicamos que los puntos de relevancia para el grupo, son el hecho de tener la posibilidad de levantar una propuesta que esté en la línea del campo de estudio de la *visualización*, ello porque es de nuestro interés poder profundizar en un ámbito donde creemos que aún se

puede aportar en torno a los elementos existentes a la fecha. Por ello es que nuestro trabajo es sin duda una colaboración a lo ya sea realizado, esto en la medida en que se valora la utilización de las nuevas tecnologías en el ámbito de estudio de la *visualización*, situación para la cual solo se ha utilizado como estudio y reflexión, el uso de las calculadoras gráficas, a diferencia nuestra, donde abordamos el problema desde el uso de las computadoras a partir del programa educativo de alto uso en este momento, hacemos referencia a Geogebra, programa que desde sus inicios fue considerado como un elemento e instrumento que daría apoyo educativo en las aula de matemáticas. A lo anterior, sumamos el hecho de que nuestro trabajo aún está en fase de desarrollo, por tanto, nos hemos puesto como desafío dar cabida a la etapa restante, la cual es aplicar el instrumento que se ha construido, desde donde se espera que surjan conclusiones y levantamientos de juicios, sobre el uso de las computadoras mediante el programa antes mencionado y por cierto en torno al concepto de *visualización*. Lo cual nos es de gran relevancia, ya que desde nuestra perspectiva, es un elementos a considerar en las nuevas propuestas de enseñanza, sobre todo, cuando en algunos lugares ya se han hecho acercamientos con objeto de probar y dar espacio a la reflexión de los resultados obtenidos.

Por último, nos parece importante plantear algunas visiones que el grupo posee en torno a los elementos que están en juego en este escrito. Lo primero es señalar que nos es relevante el poder exponer nuestro trabajo como estudiante de Maestría en una instancia académica como lo es Relme, ya que ello nos hace ser cuestionados y dar cabida a partir de esto a nuevas líneas de trabajo. A lo anterior, sumamos el hecho de estar convencidos de que nuestra línea de trabajo posee un espacio de reflexión aún abierta, por lo mismo nos ha interesado el dedicar nuestro trabajo a la confección de una situación de aprendizaje que vaya en la línea del uso de las nuevas tecnologías como herramienta de apoyo al proceso de enseñanza y aprendizaje. Esto es algo importante para el grupo, ya que establecemos nuestra posición en el uso de las tecnologías, no como algo absoluto dentro del discurso matemático escolar, sino por el contrario, como la posibilidad de acercar el conocimiento matemático a estudiantes que viven en una realidad alejada del papel y el lápiz en nuestra actualidad.

### Referencias bibliográficas

- Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la Proporcionalidad*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona, España.
- Campos, C. (2003). *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México, D.F.

Cantoral, R. & Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y pensamiento matemático*. México: Pearson Educación.

García, M. (2007). *Resignificando el concepto de función lineal en una experiencia educativa a distancia. Un estado del arte*. Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN. México.

López, A. (2009). *Un estudio sobre la noción de función Constante*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán. México.