CONSTRUCCIONES MENTALES PARA LA APROPIACIÓN DEL CONCEPTO DE LA INTEGRAL DESDE REGISTROS GEOMÉTRICOS

Karla Liliana Puga Nathal, Eduardo Miranda Montoya
Instituto Tecnológico de Cd Guzmán México
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente
karlalpn4@gmail.com, emiranda@iteso.mx

Resumen. Se presentan los resultados de una investigación de corte cualitativo en la que se describen los niveles de construcciónpor los que transita un sujeto cuando bosqueja la gráfica de una función primitiva a partir de acumulación de áreas. En la investigación participaron estudiantes universitarios inscritos en los cursos de Cálculo Diferencia y Mecánica Clásica. La metodología aplicada fue de tipo descriptiva, a partir de la observación y exploración; esto debido a que la investigación tuvo como objetivo analizar las estructuras mentales que desarrolla un estudiante para comprender y apropiarse del concepto de Integral a partir de registros de representación geométricos.

Palabras clave: esquema mental, APOE, abstracciones

Abstract. The results presented by this qualitative research originate from the description of levels of construction which a subject traverses when a primitive function of a graphic is outlined from the accumulation of areas. Graduate students registered in the courses of Differential Calculus and Classic Mechanics participated in this research. The methodology used was descriptive, based on observation and exploration, by reason of analyzing the development of mental structures of students when trying to understand and comprehend the concept of Integral derived from geometric representation registers.

Key words: mental schemme, APOE, abstractions

Antecedentes

La idea de sumar cantidades infinitamente pequeñas ha venido a resolver una gran variedad de problemas en diversos campos de la ciencia, los cuales son abordados en las universidades. Específicamente en las carreras de Ingeniería el Cálculo Integral se ubica en los dos primeros periodos escolares. La importancia que tiene particularmente la Integral en la retícula básica, es fundamental, debido a que se trata de uno de los conceptos medulares para los subsecuentes cursos de matemáticas, así como para los diversos cursos dentro del mismo programa educativo en otras áreas del conocimiento, por ejemplo, en Ingeniería Electrónica el concepto se aplica en los cursos de Física, Instrumentación, Teoría de control, Electrónica en Comunicaciones, Electrónica de Potencia, entre otros.

En diversos libros de cálculo (Boyce y Diprima, 1994; Edwards y Penny, 2008; Larson, Hostetler y Edwards, 2009; Leithold, 1983; Stewart, 2008; Swokowski, 1989) la Integral se aborda inicialmente desde distintos enfoques como: el área limitada por curvas, un límite con características especificas, la operación inversa a la derivada, el trabajo realizado por una fuerza, la longitud de una curva, el volumen de un sólido y como la función primitiva.

Diferentes autores hacen alusión a que la Integral debe ser abordada desde diversos registros de representación, al respecto Souto y Gómez (2010) mencionan que para entender el concepto de la Integral, se deben coordinar diferentes registros de representación: registro analítico, visual (geométrico) y numérico. Sin embargo, algo que escasamente se observa en los libros citados de cálculo es el énfasis en la relación geométrica entre la Integral ysu Derivada lo que se considera de gran ayuda, dado que si el estudiante comprende esta relación, principalmente desde un registro geométrico, será una alternativa para interpretar diferentes fenómenos físicos, por citar algunos: la obtención de una función posición a partir de la gráfica de la función velocidad, la obtención de una función trabajo a partir de la representación geométrica de una fuerza variable y otras aplicaciones dentro del campo de acción de los estudiantes de ingeniería

Para entender cómo se apropia un sujeto del concepto de la Integral desde registros de representación geométrico se consultaron diversas investigaciones respecto a la construcción del concepto de la Integral (Boigues, 2010; González y Aldana 2010; Delgado, 2009; Sealey, 2006, Torres y Martínez (2008), Souto y Gómez, 2010; Crisóstomo, 2011; Ordóñez y Contreras, 2010; Prabhu & Vidakovic (2001); Paschos & Farmaki, 2006). Se encontró que tales reportes relacionan registros geométricos con numéricos, otros algebraicos con algebraicos, algebraicos con numéricos, pero al momento del desarrollo de la investigación no se encontraron investigaciones que describieranun mecanismo —con fundamentación teórica y metodológica— que posibilitara documentar la construcción de un esquema mental para la apropiación del concepto *"Integral de una función"* desde registros geométricos, lo cual posibilitaría el análisis y obtención de funciones primitivas (a partir de la grafica de su Derivada), desde un registro geométrico (acumulación de cantidades que varían) a otro registro geométrico (la gráfica de una función primitiva).

El objetivo de la investigación fue describir las construcciones mentales que tiene lugar en la estructura cognitiva de un estudiante de ingeniería para apropiarse del concepto de la Integral desde registros de representación geométrico. Para ello, se identificaron los esquemas previos que trajo a su mente así como las dificultades que enfrentó en sus construcciones.

Marco teórico

Para entender el objeto de estudio, la investigación se fundamentó dentro del marco de la epistemología genética, la cual afirma que los individuos nacen con una tendencia a organizar sus procesos de pensamiento en estructuras psicológicas las cuales les permiten adaptarse y comprender el medio que les rodea (Woolfolk, 1996). La organización también se refiere a relacionar diferentes estructuras que posee el individuo para que éstas generen estructuras coordinadas más complejas o de más alto nivel que las actuales. Las estructuras cognoscitivas no son fijas, ya que se modifican a medida que el individuo desarrolla y enfrenta nuevas experiencias, lo que promueve la construcción de *estructuras* de pensamiento más complejas que le permiten mejores adaptaciones al entorno y a la nueva información (Piaget y García, 2004).

Para interpretar cómo tiene lugar la organización de las estructuras mentales que desarrolla el sujeto en la apropiación del concepto de la Integral, fue necesario retomar algunos planteamientos de la teoría APOE, tales como acciones, procesos, objetos. Esta teoría propone elementos que permiten reflexionar sobre la comprensión de un concepto matemático y además de elementos didácticos para su instrucción. El desarrollo de la comprensión de un concepto inicia cuando el sujeto realiza las acciones, que son la parte medular del marco APOE, esto es, acciones sobre objeto matemáticos, ya que mediante éstas es como el sujeto se acerca al objeto de conocimiento, a partir de un procesos dialéctico logra internalizar y generalizar en procesos que son encapsulados en objetos matemáticos. El nivel de comprensión del concepto se evidencia en la manera en que el sujeto intenta dar solución a una situación problema (Dubinsky, 1991). Toda esta relación de acciones, procesos, objeto y otros esquemas son denominados esquema mental.

Las *acciones* se refieren a la ejecución de una instrucción emitida desde el exterior del sujeto. La acción se manifiesta cuando éste realiza una actividad sin reflexionar sobre ella, sino que se limita a sólo repetir los pasos que otros siguieron.

Los *procesos* son construcciones internas, lo que los diferencia de las acciones y se refieren al momento en que el sujeto logra interiorizar las acciones. Las actividades y transformaciones sobre un objeto que realiza están en su mente y son tan claras que puede desarrollar todo un procedimiento de transformación del objeto sin necesidad de escribirlo.

Si el estudiante es capaz de generalizar un proceso como un todo, e internaliza las acciones y los procesos aplicados sobre un objeto, se dice que ha logrado construir un *objeto*. En el mecanismo de encapsulamiento de un objeto matemático, el individuo recurre a esquemas mentales previos, lo que implica realizar acciones y acudir a los procesos que se requirieron para dar lugar a otros esquemas, e incluso a objetos matemáticos y esquemas que ya posee.

Metodología

Dado que la investigación tuvo como objetivo analizar las estructuras mentales que desarrolla un estudiante universitario para comprender y apropiarse del concepto de Integral a partir de registros de representación geométricos, la metodología empleada fue de tipo descriptiva e interpretativa, a partir de la observación y exploración. El método utilizado fue el de exploración crítica (Inhelder, Sinclair y Bovet, 1996). Los instrumentos para la recolección de datos consistieron en una serie de situaciones problema ubicadas en diferentes contextos en los que el estudiante debía construir la función primitiva a partir de la acumulación de áreas. Las técnicas consideradas para estudiar el fenómeno fueron la observación no participante (Hernández, Fernández y Baptista, 2010) acompañada por la entrevista en profundidad (Rodríguez, Gil y García, 1999), cuyos tópicos fueron: indagar sobre los argumentos que proporciona el estudiante para cada paso del proceso de solución de cada problema que se le solicitó resolver, indagar sobre las estructuras mentales que posee, necesarias para la apropiación el concepto de la Integral, observar e indagar cómo el sujeto moviliza y coordina diversas estructuras mentales, así como el análisis, descripción e indagación de los niveles de construcción que el sujeto manifestó.

Resultados

De acuerdo con la teoría APOE, un objeto matemático es construido a partir de las acciones que el sujeto realiza sobre otros objetos. En esta interacción sujeto-objeto, en la mente del sujeto se desencadena una serie de abstracciones que dan lugar a la construcción de estructuras, entonces se entiende que detrás de los objetos matemáticos hay un andamiaje mental que le permite al sujeto tener ciertos niveles de comprensión de un objeto o concepto matemático. Esto es precisamente lo que se pretende a continuación, explicar los mecanismos que conducen a las construcciones de un estudiante de Ingeniería Electrónica; para ello, fue necesario entender primero los objetos matemáticos (y su nivel de construcción) que el estudiante coordinó con y hacia las nuevas construcciones.

El sujeto resolvió una serie de situaciones problema que permitieron indigar sobre su proceso de construcción,el cual inició cuando al sujeto se le presentó la primer situación en la que debía trazar la gráfica de f(x) = x, a partir de conocer la gráfica de f(x) = 1, la cual representaba la velocidad con la que se mueve una persona.

Para acercar al sujeto al objeto Integral, se le sugirió la *acción* de acumular áreas limitadas por las gráficas y = 0 y y =1, ubicarlas en el plano cartesiano. Además, se le solicitó (*E*) que representara, a través de una gráfica,las acumulaciones obtenidas. El estudiante obtuvo la gráfica de la figura 1. En la entrevista el sujeto (S_3) comentó:

> *S_3: …la velocidad es constante y la recta va así (señala la gráfica g(t)=1) porque no está ni acelerando ni desacelerando. Va a la misma velocidad. En ese mismo tiempo, pensé que era esa misma velocidad y por eso así la ubiqué.*
>
> *E: …¿Qué fue lo que hiciste cuando calculaste áreas? Por ejemplo A_1*
>
> *S_3: El área A_1 es lo mismo de éste (señala un cuadrito en la gráfica) nomás multipliqué lo que es la hora por la velocidad. Tomé como referencia la fórmula v=d/t.Al principio no me di cuenta, saqué el área pero dije ¿quéme representa esa área? no sabia como qué me representaba, la multipliqué primero. Fui sacando la áreas más acá (señala la gráfica). Me*

fui dando cuenta que era este la distancia, asínomás,como sacar el área del cuadro, lado por lado.

E: …¿Cómo calculaste área A_4*?*

S_3*: La representé como si fuera un rectángulo, de aquí a aquí (señala los puntos 0 y 4 sobre el eje horizontal) pues tiene base 4. Bueno, 4 hr.,Aquí pues no cambia su altura que es un kilómetro; sólo multiplique 4x1.Aquí todavía no me checaban las unidades de lo que me estaba dando,porque lo tomé km/hr. Ya después, más adelante me di cuenta de que son km/hr y por hrs, y fui calculando los km*

E: …Generaste ésta recta que llamaste f(t), ésta recta ¿qué representa?

S_3*: Para mi es la distancia que recorre el señor.*

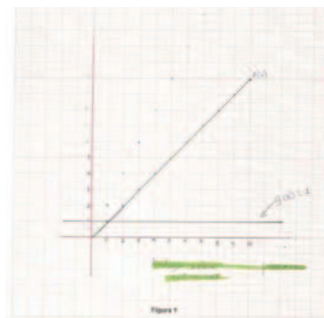

Figura 1. Respuesta del alumno

El estudiante logró resolver exitosamente la situación planteada, logró construcciones a partir de imitar procedimientos. Cuando el sujeto resuelve la situación, recurrió a esquemas mentales previos relacionados con el cálculo de áreas de cuadrados y rectángulos, operaciones de sumas, restas, multiplicación de números reales y esquemas relacionados con el el plano cartesiano. Recurrió a esquemas relacionados con la cinemática (velocidad, posición, aceleración). Además, infirió cantidades infinitesimales cuando se le preguntó cómo encontraría los puntos de la recta y = x en el intervalo [0. 1], el estudiante supuso rectángulos cuya base sería muy pequeña y debía acumular áreas.

Con la idea de provocar un conflicto cognitivo y desequilibrar su estructura mental, se le preguntó al estudiante cómo sería la gráfica distancia de la situación problema planteada si se considera la velocidad constante de 2 km/hr, el estudiante respondió correctamente. Se le mostraron diferentes gráficas velocidad, como las que aparecen en la figura 2, en donde debía asociar la gráfica velocidad con la de distancia. Logró responder correctamente y dado el argumento de sus respuestas se consideró como información sufiente para entender que el sujeto logró generalizar las acciones en procesos.

Para asociar las gráficas, el sujeto acumuló áreas asumiendo que el signo de éstas se debe al sentido geométrico de la gráfica velocidad.

Para describir las construcciones que surgen en la mente del estudiante cuando enfrenta la situacion problema, se elaboró el diagrama de la figura 3, en el que se muestran los esquemas que el sujeto trae a su mente así como las abstracciones que tiene lugar cunado el sujeto realiza acciones.

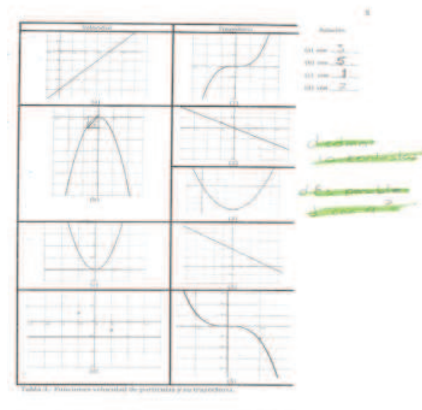

Figura 2.- Gráficas velocidad y distancia.

Se mencionó que el proceso de construcción inició cuando el sujeto realiza la acción I para manipular uno de los objetos matemáticos definido en la investigación como *acumulación de áreas*. Entonces, para que esto fuera posible, como consecuencia del mecanismo de adaptación, en su mente se desencadena una serie de abstracciones, tanto de reflejamiento como de reflexión, ya que el sujeto recurrió a esquemas mentales previos, relacionados con el cálculo de áreas de cuadrados y rectángulos (A_3), operaciones de sumas, restas, multiplicación de números reales (R_6) y esquemas que le permiten ubicar coordenadas en el plano cartesiano (F_7), como se indica en el diagrama.

El *reflejamiento,* se refiere a que el individuo es capaz de establecer representaciones (o proyectar) de un estadio inferior (actual) de conocimiento a uno superior a partir de las acciones que haya realizada sobre un objeto (de la acción a la representación). Y una *reflexión* se refiere a la reconstrucción y reorganización de aquel conocimiento para formar nuevas estructuras mentales (Piaget y García, 2004).

Además, el estudiante recurrió a conceptos comovelocidad, posición y aceleración. Se observó que aún tratándose de niveles de construcción, en donde el estudiante imita procesos o sigue instrucciones, tiene lugar un reacomodó de sus estructuras actuales, adaptándoseasí a la nueva información.

El sujeto interioriza las acciones en procesos (ver figura 3) que le permiten acumular áreas y los encapsula en objetos. Para ello, trae a su mente esquemas relacionados con operaciones con los números reales (R_6) y esquemas relacionados con cantidades infinitesimales (R_7), en el proceso de interiorización el sujeto necesitó recurrir constantemente a esquemas relacionados con la cinemática, particularmente velocidad y posición (M_5) así como a esquemas que le permitieron localizar puntos en el plano cartesiano (F_7).

En el diagrama de la figura 3 se puede observar que el sujeto logra la obtención de la gráfica de la primitiva y esto lo internaliza como un objeto matemático. Lo que le permitió resolver problemas para modelos similares, para curvas que pertenecen a la misma familia. Sin embargo, se observó que fue capaz de realizar la operación con autonomía, logrando internalizar procesos los cuales manipuló con evidente habilidad cuando se trató la parte operativa de una situación problema. El sujeto construyó gráficas de funciones primitivas por acumulación de áreas e incluso recurrió a esquemas relacionados con la derivada para corroborar si la gráfica de la primitiva es correcta o no. También en el diagrama de la figura 3 se observan las acciones, procesos y objetos que se desencadenan y en la medida que el sujeto se acerca más al objeto matemático; los esquemas a los que recurre son más complejos, ya que logró identificar familias de curvas, y la aplicación de las acciones encomendadas a varios miembros de diferentes familias (F_7).

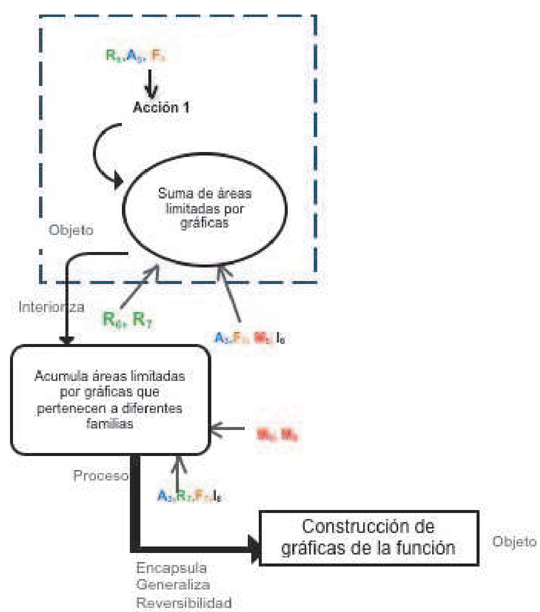

Figura 3.- Construcciones del estudiante

En el esquema se incluye elementos que le permiten al sujeto ampliar su campo de trabajo con el objeto matemático *suma de áreas limitadas por curvas*, ya que los procesos que desarrolló le permitieron acumular áreas limitadas por curvas que pertenecían a diferentes familias, no sólo para gráficas lineales como sucedió inicialmente, además mostró una mayor autonomía en la solución de las situaciones que se le plantean, no requiere de imitar procesos o que se le indique cómo deberá resolver tales situaciones.

Referencias bibliográficas

Boyce, W. y Diprima, R. (1994). Cálculo. Primera edición. México: CECSA.

Eduards, H. y Penney, D. (2008). Cálculo con trascendentes tempranas. (7ª edición). México: Pearson Education.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. Recuperado el 2 de Septiembre del 2010 de http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html#C.)%20Mathematics%20Education%20-%20Refereed

Boigues, F. (2010). Una propuesta de descomposición genética para la integral definida en estudiantes de ingeniería. Recuperado el 24 de febrero del 2011 de: http://www.seiem.es/actividades/archivosactividades/JORNADASDIDACTICAANALISIS.pdf

Crisostomo, E. (2011). Conocimiento profesional de los profesores-formadores sobre la didáctica del cálculo. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Delgado, M. (2009). Matemática visual: Simulaciones relativas al Teorema Fundamental del Cálculo. *El Cálculo y su Enseñanza*. Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México D.F. Recuperado el 12 de abril del 2011 de: http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Em3v4rTYf11.pdf

González, T. y Aldana, E. (2010). Comprensión de la Integral Definida en el marco de la Teoría APOE. 4-22. Recuperado el 24 de Febrero del 2011 de: http://www.seiem.es/actividades/archivosactividades/JORNADASDIDACTICAANALISIS.pdf

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación. (5a Edición). México: Mc Graw Hill.

Inhelder, B., Sinclair, H. y Bovet, M. (2002). Aprendizaje y Estructuras del Conocimiento. (3ra edición). España: Ediciones Morata

Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (2009). Cálculo Integral. (1ª Edición). México: Mc Graw Hill.

Leithold, L. (1983). El Cálculo con Geometría Analítica. (4ª edición). México: FEM.

Piaget, J. y García, L. (2004). Psicogénesis e Historia de las ciencias. (10ª Edición). México: Siglo XXI Editores.

Paschos, T. & Farmki, V. (2006). The Reflective Abstraction In The Construction Of The Concept Of The Definite Integral: A Case Study. Recuperado el 2 de Febreo del 2011 de: ftp://ftp.emis.de/pub/EMIS/proceedings/PME30/4/337.pdf

Rodríguez, G. Gil, J. y García, E. (1999). Metodología de la investigación cualitativa. España: Ediciones Aljibe.

Sealey, V. (2006). Definite Integrals, Riemann Sums, and Area under a Curva: What is necessary and suffuent?. Recuperado el 3 de Febrero del 2011 de: http://www.pmena.org/2006/cd/ADVANCED%20MATHEMATICAL%20THINKING/ADVANCED%20MATHEMATICAL%20THINKING-0007.pdf

Stewart, J. (2008). Cálculo, trascendentes tempranas. (6ta edición). México: CENGAGE learning.

Souto, B. y Gómez, I. (2010). Comprensión visual y concepto de la Integral en la enseñanza universitaria, 80-94. España: Memoria de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Swokowski, E. (1989). Cálculo con Geometría Analítica. (2ª edición). México: Grupo editorial Iberoamérica.

Torres, A. y Martínez, D. (2008). The understanding of the Integral defined as mathematical object in the university students. Recuperado el 3 de Febrero del 2011 de: http://tsg.icme11.org/document/get/383

Woolfolk, A. (1996). Psicología Educativa. México: Prentice Hall.