View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Funes

LA CONJETURA EN GEOMETRÍA DINÁMICA A PARTIR DEL *ARBELOS* DE ARQUÍMEDES

Mario Dalcín, Mónica Olave
Instituto de Profesores Artigas, Uruguay.
filomate@adinet.com.uy – almamat@adinet.com.uy
Campo de investigación: Formación de profesores – Métodos de demostración – Pensamiento geométrico; Nivel educativo: Medio y Superior

Resumen

Trabajando en un ambiente de Geometría Dinámica y a partir de actividades que involucran al arbelos *de Arquímedes se busca explicitar la formulación de conjeturas y elaborar demostraciones que den cuenta de las conjeturas formuladas, poniendo de relieve la diversidad de resultados obtenidos así como la riqueza de los caminos tomados.*

Palabras clave: Prueba, demostración, Geometría Dinámica.

Introducción

El fracaso en la enseñanza de la demostración, el reconocimiento de que la actividad de demostrar debe tener en cuenta los motivos de los propios estudiantes y la aparición de programas computacionales de Geometría Dinámica han llevado a buscar alternativas para su enseñanza y aprendizaje. (Hadas, Hershkowitz y Schwarz, 2000)

Hoy en día los *Standards and Principles for School Mathematics* (NCTM, 2000) promueven "aprender a razonar y construir demostraciones como parte de la comprensión matemática para que todos los estudiantes

- reconozcan los razonamientos y las demostraciones como partes esenciales y poderosas de las matemáticas;
- hagan e investiguen conjeturas matemáticas;
- desarrollen y evalúen argumentos matemáticos y demostraciones;
- seleccionen y usen varios tipos de razonamiento y métodos de demostración."

Marco teórico

Asumimos que "Crear las condiciones que permitan restaurar dentro del aprendizaje en situación escolar el significado original de la demostración es una cuestión importante para la didáctica de las matemáticas. Pensamos que uno de los medios para lograrlo consiste concretamente en situar de nuevo la demostración en una práctica social, en un debate en el que esté en juego el valor de verdad de una aserción. Para esto es necesario que los partenaires se pongan de acuerdo sobre las reglas del debate, es decir, sobre la construcción y aceptación de un sistema común de validación. Pensamos que, una vez colocados en este tipo de situación, los alumnos podrán más fácilmente reconstruir y apropiarse del sistema de validación específico de las matemáticas." (Balacheff y Laborde, 1998, págs. 268-269)

Balacheff concibe *prueba* como una explicación cuyo fin es establecer la veracidad de un enunciado y que es reconocida y aceptada por un colectivo. Ésta puede evolucionar o cambiar con el tiempo y puede ser aceptada por un colectivo y no por otro. *Demostración* es una prueba con una forma particular: es una sucesión de enunciados cada uno de los cuales es, o bien una definición, axioma o teorema, o bien es derivado deductivamente de los enunciados mencionados.

Balacheff identifica dos categorías de demostraciones, las ‘pragmáticas’, basadas en el uso de ejemplos, en una acción o en mostrar algo, y las ‘intelectuales’, basadas en formulaciones abstractas de las propiedades involucradas y en sus relaciones. En las pragmáticas distingue *empirismo ingenuo* (asegurar la validez de un resultado basándose para su verificación en algunos casos) y *experiencia crucial* (basa la validez de un resultado en la verificación de un caso especialmente elegido). Entre las intelectuales *ejemplo genérico* (la justificación se basa en operaciones o transformaciones realizadas sobre un ejemplo que es considerado como representante de una clase. Las operaciones o transformaciones se hacen sobre un ejemplo pero entendiendo que se podrían hacer sobre cualquier elemento de la clase) y *experiencia mental* (las razones que fundamentan la validez de la proposición se basan en un análisis de las propiedades de los objetos en juego. Estas propiedades no pueden ser testificadas por medio de sus representantes sino que deben ser formuladas en su generalidad).

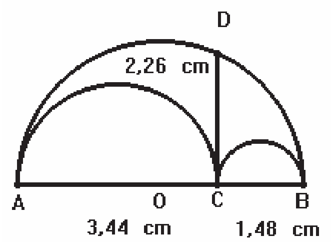
Objetivo, metodología de trabajo y actividades planteadas

El taller se planteó como objetivo introducir a los participantes –estudiantes cursando Geometría I, de la especialidad Matemática del Instituto de Profesores Artigas– en el trabajo en un ambiente de Geometría Dinámica (GD), aprovechando las posibilidades que brinda la GD para hacer mediciones, construcciones de tablas, cálculos..., para formular y reformular conjeturas, y finalmente elaborar argumentos que contribuyan a la demostración de dichas conjeturas, comparando y analizando las distintas formulaciones que elaboren los participantes. Trabajaron en parejas, siendo responsabilidad de cada pareja la formulación de conjeturas respecto a las situaciones que se les planteaban en ambiente dinámico (usando *The Geometer's Sketchpad*) y la elaboración de una prueba. Aquí el compromiso es arriesgar conjeturas para inmediatamente ponerlas a prueba, aceptando el desafío de equivocarse como también el placer de encontrar argumentos propios que agreguen claridad y comprensión y no solo certeza. Cada pareja escribe sus conjeturas y pruebas en una hoja que se es entregada al finalizar. Los docentes, observadores privilegiados, toman nota y preguntan acerca de las formas de proceder de cada pareja, así como orientan en torno al manejo del software. Las distintas pruebas se colectivizan a la clase, exponiendo cada pareja su trabajo y contestando preguntas que surgen en el transcurso de su exposición.

En el *Libro de los Lemas*, obra de Arquímedes (287 a. C. + 75 = 212 a. C.) compuesta por quince proposiciones referidas a cuestiones de geometría elemental, aparecen tres (4, 5 y 6) donde interviene el *arbelos* o cuchillo de zapatero: zona limitada por tres semicircunferencias tangentes de diámetros AB, AC, CB, donde C pertenece al segmento AB e incluidas en un mismo semiplano. El *arbelos* tiene una serie de propiedades cuyas demostraciones pueden ser hechas recurriendo solamente a conceptos manejados en Bachillerato: ángulos inscriptos, teorema de Pitágoras, semejanzas. Las actividades planteadas giran en torno al estudio del *arbelos*.

Reportamos aquí lo trabajado frente a la Actividad 1:

¿Están relacionadas de alguna manera las medidas de los segmentos AC, CB y CD?



Lo trabajado por los estudiantes

La formulación de conjeturas. Las primeras observaciones que surgen hacen referencia a casos particulares:
– Si C coincide con O entonces los tres segmentos son iguales.
– Si C pertenece al segmento OB entonces se cumple que $CB < CD < CA$.
– Si C pertenece al segmento OB entonces $AC - CD = CD - CB$.
Esta conjetura es descartada al hacer mediciones con *The Geometer's Sketchpad*.
– $AC \times CB = CD^2$
La conjetura surge a partir de la constatación hecha por una pareja de participantes que hicieron las mediciones respectivas y 'verificaron' la proposición arrastrando C en el segmento AB.
Cada uno de los participantes hace sus propias mediciones: la certeza del resultado es aceptada por todos los participantes.

La elaboración de pruebas. La cuestión que se presenta en este momento es ¿por qué se cumple $AC \times CB = CD^2$?
Empieza ahora la búsqueda de una demostración.
Al igual que en la formulación de conjeturas las primeras aproximaciones sólo son válidas en casos particulares:
– Si C = O es cierta, dice un participante.
– Si C = A o si C = B también porque ambos miembros son cero, afirma otro participante.
– Tendremos que asumir que CD es perpendicular a AB.
¿Y si C no está en las posiciones anteriores?
Ahora los participantes trabajan con lápiz y papel, haciendo alguna observación esporádica en la pantalla.

Primera prueba
Una pareja de profesores que trabajan juntos observan que el triángulo OCD es rectángulo por lo que:
$OD^2 = OC^2 + CD^2$.
Como $OD = AB/2$ y $OC + CB = AB/2 \to OC = AB/2 - CB = (AB - 2 \times CB)/2$
Sustituyendo tienen $(AB/2)^2 = [(AB - 2 \times CB)/2]^2 + CD^2$
$AB^2/4 = CD^2 + AB^2/4 - AB \times CB + CB^2$
$AB \times CB - CB^2 = CD^2$
$CB \times (AB - CB) = CD^2$
$CB \times AC = CD^2$

Segunda prueba
En ABD: $AB^2 = AD^2 + BD^2$
También en ACD: $AD^2 = AC^2 + CD^2$
en BCD: $BD^2 = CB^2 + CD^2$
y $AB = AC + CB$
Sustituyendo en la primera igualdad:
$(AC + CB)^2 = (AC^2 + CD^2) + (CB^2 + CD^2)$
$AC^2 + 2 \times AC \times CB + CB^2 = AC^2 + 2 \times CD^2 + CB^2$
$2 \times AC \times CB = 2 \times CD^2$
$AC \times CB = CD^2$

Tercera prueba.
Los triángulos ACD y DCB son semejantes por lo que $AC/CD = DC/CB \rightarrow AC \times CB = CD^2$.

Cuarta prueba.
Usando el teorema de la altura.

Quinta prueba.
Usando potencia de un punto respecto de una circunferencia.

La reflexión sobre las pruebas elaboradas. Generalmente la presentación de un resultado matemático termina cuando se llega al final de la demostración, cuando se ha verificado dicho resultado.
En el taller hemos propuesto a los participantes explicitar los conceptos y resultados que intervienen en cada demostración, rescatar las conexiones que establece cada demostración con conceptos anteriores.

Primera prueba.
Se centra la atención en el triángulo OCD que es rectángulo,
por el teorema de Pitágoras tenemos que $OD^2 = OC^2 + CD^2$.
De los tres segmentos involucrados en esta igualdad solo CD interviene en la proposición que queremos demostrar por lo que buscamos ahora hacer intervenir a los segmentos AC y CB. Para ello sustituimos OD por AB/2 y a OC por AB/2 – CB, donde el segmento AB = AC + CB. Lo que siguió fueron simplificaciones.

Segunda prueba.
Se tienen en cuenta tres triángulos rectángulos: ACD y BCD los son por ser CD perpendicular a AB, ADB lo es por pertenecer D a la semicircunferencia de diámetro AB.
Haciendo uso del teorema de Pitágoras en este último tenemos:
$AB^2 = AD^2 + BD^2$.
Sustituimos AD^2 y BD^2 por las sumas de cuadrados obtenidas haciendo uso del teorema de Pitágoras en ACD y BCD: $AD^2 = AC^2 + CD^2$ y $BD^2 = CB^2 + CD^2$.
A continuación se desarrollan los cuadrados y se simplifica.

Tercera prueba.
En esta demostración se atiende un aspecto que no había aparecido en las demostraciones anteriores: la semejanza de los triángulos ACD y DCB.

Cuarta prueba.
Aquellos participantes que tenían presente el teorema de la altura no hicieron más que constatar que estaban en las condiciones que pedía la hipótesis de dicho teorema: ABD rectángulo y CD altura.
Obsérvese que la tercer demostración es una demostración del teorema de la altura.

Quinta prueba.
Nuevamente aquí se apela a un resultado matemático ya establecido y lo que se hace es constatar que se está en las condiciones requeridas en la hipótesis de dicho resultado.
Si por un punto P se trazan dos secantes AA’ y BB’ a una circunferencia se cumple que

PA × PA' = PB × PB'. Algunos participantes, que no conocían la proposición de Steiner, se ponen a trabajar en una demostración para ella.

Conclusiones

Todas las parejas fueron capaces de formular conjeturas, para ello hicieron uso de la capacidad de *arrastre* del ambiente dinámico permitiendo reformularlas o confirmarlas. Las actividades planteadas hicieron que los estudiantes se involucraran en el trabajo matemático y el papel de los docentes estuvo en aclarar dudas acerca del manejo del software usado así como escuchar los planteos de los estudiantes y en algunos casos indagar acerca de los caminos que estaban tomando algunos trabajos de las distintas parejas. Las parejas de estudiantes también fueron capaces de elaborar pruebas que en su mayoría fueron demostraciones. Según la distinción de Balacheff las pruebas construidas (en su gran mayoría) fueron experiencias mentales.

De las otras actividades propuestas

Con una dinámica similar a la expuesta anteriormente se trabajó en torno a las relaciones que siguen, también referidas al *arbelos*. Ofrecemos posibles pruebas que fueron elaboradas por las parejas y acordadas por la clase.

- ***La proposición 4 del Libro de los Lemas***

El área del arbelos es igual al área del círculo de diámetro CD donde CD es perpendicular a AB y D pertenece a la semicircunferencia de diámetro AB.

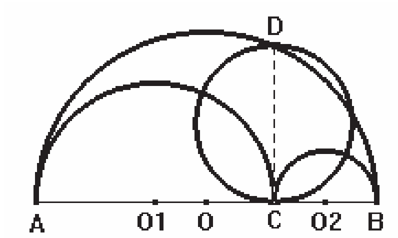
$O_1A = r_1$ y $O_2B = r_2$.

Los triángulos (ACD) y (DCB) son semejantes →

→ $CD^2 = AC \times CB \rightarrow CD = \sqrt{(2r_1 2r_2)} = 2\sqrt{(r_1 r_2)} \rightarrow$

área del circulo de diámetro CD = $\pi r_1 r_2$.

Área del arbelos = $\pi(r_1 + r_2)^2/2 - \pi r_1^2/2 - \pi r_2^2/2 = \pi r_1 r_2$.



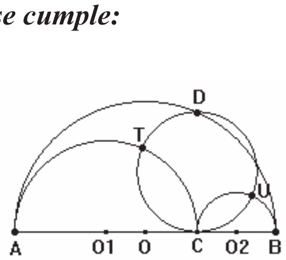
- ***Arco AC + arco CB = arco AB.***

Arco AC + arco CB = $\pi r_1 + \pi r_2 = \pi(r_1 + r_2) =$ arco AB

Si T y U son los respectivos puntos de intersección de la circunferencia de diámetro CD con las semicircunferencias de diámetros AC y CB se cumple:

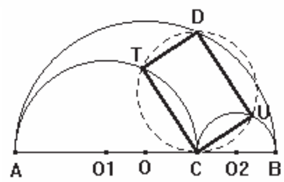
- ***A, T, D y B, U, D están alineados.***

Los ángulos inscriptos ATC y CTD son rectos
por abarcar los diámetros AC y CD respectivamente.
Idem. con B, U, D.



- ***(CUDT) es rectángulo.***

(CUDT) es paralelogramo (CU//TD, CT//UD) con ángulos rectos → (CUDT) es rectángulo.



Otra formulación de la mima conjetura:

Los segmentos TU y CD son iguales y se bisecan.

Referencias

Bankoff, L. (1994). The Marvelous Arbelos. En R. Guy and R. Woodrow (Eds.), *The Lighter Side of Mathematics*, pp. 247-253. U.S.A.: MAA.

De Villiers, M. (1998). The Future of Secondary School Geometry. *La lettre de la Preuve*: mars-avril.

http://www.cabri.net/Preuve/Resumes/deVilliers/deVilliers98

Hadas, N. ; Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44, pp. 127-150.

Heath, T. L. (1953). Book of Lemmas. En T. L. Heath (Ed.), *The Works of Archimedes*, pp. 301-318. U.S.A.: Dover.

Jackiw, N. (1991). *The Geometer's Sketchpad* (Software). U.S.A.: Key Curriculum Press.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, pp. 25-53.

NCTM (2000). *Standards and Principles for School Mathematics.* U.S.A.: NCTM.