

# RELACIÓN ENTRE EL CONOCIMIENTO DE GEOMETRIA Y EL “TRUNCAMIENTO” DEL RAZONAMIENTO CONFIGURAL

## Relationships between geometrical knowledge and the “truncation” of configural reasoning

Francisco Clemente, Salvador Llinares  
Universidad de Alicante

### Resumen

*El objetivo de esta investigación es identificar las relaciones entre el conocimiento de geometría usado durante la resolución de problemas de probar y el truncamiento del razonamiento configural. Los resultados muestran diferentes trayectorias de resolución vinculadas a las sub-configuraciones relevantes. Estos resultados parecen indicar que el truncamiento del razonamiento configural está relacionado con la capacidad de los estudiantes de establecer relaciones significativas entre lo que conocen de la configuración y la tesis que hay que probar a través de algún conocimiento geométrico previamente conocido.*

**Palabras clave:** *aprendizaje de la geometría, razonamiento configural, prueba*

### Abstract

*The goal of this study is to identify the geometrical knowledge used during the resolution of geometrical proof problems and its relation to the “truncation” of configural reasoning. The findings show different resolution trajectories linked to relevant sub-configurations. These findings seem to indicate that the truncation of configural reasoning is related to how the students are able to related what is known about the configuration (the date of problem, and new generated fact) to thesis of problem (the thesis, what has to be proofed) through of some known geometrical fact.*

**Keywords:** *learning of geometry, configural reasoning, proof*

### INTRODUCCIÓN

El análisis de la relación entre los procesos de visualización y el conocimiento de geometría en la resolución de problemas de probar ha puesto de manifiesto las dificultades que tienen algunos resolutores en aplicar el conocimiento de geometría previamente aprendido (Chinnappan y Lawson, 1998; Battista, 2007, 2008; Gal y Linchevski, 2010). En el contexto del aprendizaje de la geometría y de la resolución de problemas de probar, Duval (1995, 2007) y Fischbein (1993) subrayan el papel heurístico de las figuras puestas de manifiesto a través de dos tipos de aprehensiones. Duval caracteriza la aprehensión operativa como la modificación de una figura para considerar sub-configuraciones; esto se puede hacer añadiendo o quitando nuevos elementos geométricos, o manipulando las diferentes partes de una configuración geométrica como un puzle para fijar la atención sobre sub-configuraciones particulares. Y la aprehensión discursiva se evidencia cuando el estudiante asocia configuraciones o sub-configuraciones con afirmaciones matemáticas.

En este ámbito, la idea de razonamiento configural entendida como la coordinación de las aprehensiones operativas y discursivas nos está ayudando a comprender cómo los estudiantes para maestro resuelven los problemas de probar centrando la atención en la relación entre los procesos de visualizar y el conocimiento de geometría (Torregrosa y Quesada, 2007; Torregrosa, Quesada y Penalva, 2010). En la resolución de los problemas de probar el razonamiento configural puede desembocar en “truncamiento” (la coordinación proporciona la “idea” para resolver deductivamente el problema); o bien, en un “bucle” (situación de bloqueo que no permite el avance hacia la

Clemente, F., Llinares, S. (2014). Relación entre el conocimiento de geometría y el “truncamiento” del razonamiento configural. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 247-256). Salamanca: SEIEM.

solución). Las investigaciones previas han identificado dos momentos relevantes en los procesos de resolución de algunos problemas de probar en geometría (Clemente & Llinares, 2013; Llinares, & Clemente, 2014). En primer lugar, cuando el resolutor asocia algunas propiedades o definiciones a la configuración geométrica dada mediante aprehensiones discursivas. En segundo lugar, cuando los diferentes hechos geométricos se relacionan mediante cadenas lógicas de inferencias “si... entonces...”. En la resolución de estos problemas, algunos estudiantes tienen dificultades en “truncar” el proceso de razonamiento configural para inferir información adicional sobre la configuración (razonamiento deductivo). Esta evidencia pone de manifiesto la necesidad de comprender mejor la relación entre el razonamiento configural, el conocimiento de geometría y la generación de procesos deductivos durante la resolución de problemas de probar en geometría. Un factor que parece incidir en la generación de los procesos deductivos a partir del truncamiento del razonamiento configural, es la posibilidad de considerar un hecho geométrico no solo para identificar una propiedad de una configuración (aprehensión discursiva), sino también como parte de una secuencia de relaciones deductivas. Es decir, la posibilidad de reconocer que un hecho geométrico puede desempeñar papeles diferentes en el proceso de resolución (Herbst, et al. 2009).

Esta situación plantea la necesidad de estudiar cómo los resolutores consideran los hechos y proposiciones geométricas identificadas en una configuración, o dadas como datos de un problema, como premisas en secuencias deductivas. Llegar a comprender mejor cómo se relacionan los ítems de conocimiento geométrico en este proceso puede ayudarnos a entender lo que favorece el truncamiento del razonamiento configural. Por ejemplo, cuando en el problema 2 de la Figura 1 se considera como premisas del criterio de congruencia de triángulos A-L-A los hechos geométricos siguientes: la congruencia de los ángulos  $\sphericalangle$ CAM y  $\sphericalangle$ MAN (derivada de la definición de AM bisectriz del ángulo  $\sphericalangle$ CAB), y la congruencia de los ángulos  $\sphericalangle$ CMA y  $\sphericalangle$ AMN (derivada de la propiedad de la suma de los ángulos en un triángulo rectángulo conocido uno de los ángulos), para deducir la congruencia de los triángulos  $\triangle$ ACM y  $\triangle$ AMN, y por tanto la congruencia de los segmentos CM y MN.

La posibilidad de reconocer la relación entre los hechos geométricos identificados en la configuración y uno de los criterios de congruencia de triángulos, conlleva que los estudiantes puedan o no truncar el razonamiento configural para generar un proceso de deducción lógica. Esta situación pone de manifiesto la relación que debe existir entre los procesos de visualización puestos de manifiesto mediante la coordinación de aprehensiones operativas y discursivas que constituyen el razonamiento configural, y el conocimiento de geometría previamente aprendido por el estudiante. Considerando lo anterior, planteamos los siguientes objetivos de investigación:

- Identificar el conocimiento de geometría activado durante la resolución de problemas de probar y su relación al truncamiento del razonamiento configural al generarse procesos deductivos
- Caracterizar las relaciones establecidas entre los hechos geométricos que permiten generar el truncamiento del razonamiento configural

## **Método**

### *Participantes*

En el estudio participaron 51 estudiantes de un programa de formación de maestros. Los alumnos cursaban una asignatura centrada en el sentido geométrico organizada según los procesos cognitivos de visualización, prueba y construcción (Duval, 1995). Parte del contenido consistía en aprender a visualizar propiedades geométricas de figuras planas como polígonos, triángulos, cuadriláteros, paralelogramos, y generar procesos de probar y construir. Así como contenidos relativos a las transformaciones geométricas.

*Instrumentos*

Los estudiantes resolvieron dos problemas de probar (Figura 1) en los que se presentaba una configuración geométrica con información sobre algunos hechos geométricos vinculados a la configuración y se les pedía probar la congruencia de dos segmentos. Para su resolución, los estudiantes debían desarrollar aprehensiones operativas y discursivas identificando sub-configuraciones que les permitieran reconocer algunos objetos geométricos para generar una prueba. Para identificar los hechos geométricos que definían los problemas y que podrían usarse para resolverlos en el contexto en el que se encuentran los resolutores, se pidió a un grupo de formadores de maestros que propusieran diferentes alternativas para su resolución. En la Tabla 1, hemos situado en primer lugar los elementos geométricos que podían proceder de realizar asociaciones directas de elementos geométricos a la configuración a partir de los datos del problema; y, en segundo lugar, los elementos geométricos susceptibles de ser usados para inferir información adicional.

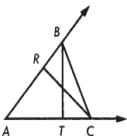
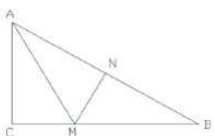
Problema 1	Problema 2
<p>Dado el triángulo <math>\triangle ABC</math> de la figura, con <math>AB=AC</math> y <math>\sphericalangle RCB=\sphericalangle TBC</math>, probar que <math>RC=BT</math></p> 	<p>En la figura, AM es bisectriz de <math>\sphericalangle CAB</math>, <math>\triangle ACB</math> es un triángulo rectángulo en C y <math>MN \perp AB</math> en N. Probar que <math>CM=CN</math></p> 

Figura 1. Problemas de probar

Tabla 1. Contenido geométrico susceptible de ser usado en cada uno de los problemas

Problema 1	Problema 2
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ángulos opuestos por el vértice son iguales</li> <li>• Caracterización de triángulo isósceles (dos lados congruentes, y por tanto, dos ángulos congruentes). En un triángulo, los ángulos opuestos a dos lados congruentes son congruentes y los lados opuestos a dos ángulos congruentes son congruentes</li> <li>• Si a dos ángulos congruentes se les resta la misma parte lo que queda son ángulos congruentes</li> <li>• Criterio de congruencia de triángulos A-L-A</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Definición bisectriz de un ángulo (es la semirrecta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes congruentes)</li> <li>• Definición de rectas perpendiculares</li> <li>• Definición de triángulo rectángulo</li> <li>• La suma de los ángulos interiores de un triángulo es <math>180^\circ</math> (conocidos dos ángulos en un triángulo, conocemos el tercero)</li> <li>• Criterio de congruencia de triángulos A-L-A</li> </ul>

Los resolutores podían identificar alguna sub-configuración (Figura 2) mediante una aprehensión operativa lo que les podía permitir reconocer triángulos con ángulos congruentes y lados congruentes como premisas de alguno de los criterios de congruencia de triángulos.

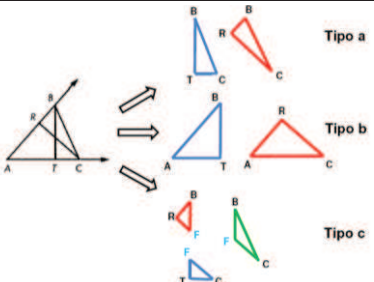
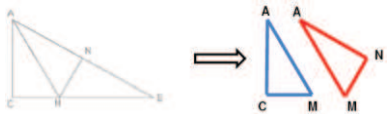
Problema 1	Problema 2
	

Figura 2. Posibles sub-configuraciones consideradas en la resolución de los problemas

### Análisis

El análisis de las respuestas de los estudiantes para maestro se realizó en dos fases, que describimos usando como ejemplo protocolos del problema 2.

- En la *fase 1*, identificamos:
  - Si los estudiantes reconocían los objetos geométricos dados como datos del problema en la configuración. Por ejemplo, si indicaban de alguna manera que la bisectriz del ángulo  $\sphericalangle CAB$  determinaba dos ángulos iguales en  $\sphericalangle A$ ; que el ángulo  $\sphericalangle C$  era recto por ser  $\triangle ACB$  un triángulo rectángulo en  $C$ ; y que el ángulo  $\sphericalangle N$  es recto por ser  $MN$  perpendicular a  $AB$ .
  - Si los estudiantes usaban un conocimiento no dado en los datos del problema para generar información adicional. Por ejemplo, si utilizaban el hecho de que los ángulos interiores de un triángulo suman  $180^\circ$ , y por tanto, conocidos dos ángulos en un triángulo podemos conocer el tercero.
  - Evidencias de que los estudiantes han generado alguna aprehensión operativa que les permite identificar sub-configuraciones relevantes. Por ejemplo, cuando indican que están considerando los triángulos  $\triangle ACM$  y  $\triangle AMN$ .
  - Cuando los estudiantes volvían a usar un hecho geométrico no dado en los datos para generar información adicional sobre la configuración. Por ejemplo, si usaban el criterio de congruencia de triángulos A-L-A al reconocer la información reunida en la configuración como premisas de este criterio de congruencia.

En esta fase de análisis identificábamos los momentos del proceso de resolución en los que intervenía un conocimiento de hechos geométricos no dados en los datos del problema, y la secuencia en la que mediaba la identificación de sub-configuraciones relevantes mediante una aprehensión operativa. Esta manera de describir la trayectoria de resolución nos permitió identificar qué estudiantes asignaban un status lógico a algunos hechos geométricos al poderlos considerar premisas de alguna proposición a partir de la identificación de una sub-configuración relevante (Figura 3).

- En la *fase 2*, a cada respuesta a un problema se le asoció un 3-vector (Lin y Yang, 2007)  $V [(1),(2),(3)]$ , con el fin de identificar diferentes trayectorias de resolución de los problemas definidas por la manera en la que se identificaban y relacionaban diferentes ítems de conocimiento de geometría necesarios para su resolución (Tabla 2).

Tabla 2. Descripción, puntuación e identificación del conocimiento activado en el proceso de resolución del problema 2

Ítem	Descripción	Puntuación	Conocimiento activado
(1)	Identificación de una sub-configuración relevante	0: no identifica 1: sí identifica	-Triángulo (CA1)
(2)	Identificación de ítems de conocimiento susceptibles de ser usados como hipótesis para aplicar un teorema (premisas en una cadena deductiva). Dos tipos de ítems:  - Obtenidos directamente a partir de los datos del problema: H1: $AM \equiv AM$ H2: $\sphericalangle ACM \equiv \sphericalangle MNA$ H3: $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle MAN$  -Obtenido a partir de conocimiento de geometría previo: H4: $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle AMN$	0: no identifica  1: identifica H1, H2 y H3  2: identifica H1, H2, H3 y H4	-Bisectriz (semirrecta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes iguales) (CA5) -Definición de rectas perpendiculares (CA6) -Definición de triángulo rectángulo (CA7)  -Ángulo (la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a $180^\circ$ ) (CA8)

(3)	Obtención de conclusiones: C1: $\triangle ACM \equiv \triangle AMN$ (menciona la utilización del criterio A-L-A) para derivar... C2: $CM \equiv MN$ (menciona la utilización del criterio de congruencia de triángulos)	0: no obtiene conclusiones  1: obtiene C1 y C2	-Congruencia de triángulos (criterio A-L-A) (CA9)
-----	---	--	---

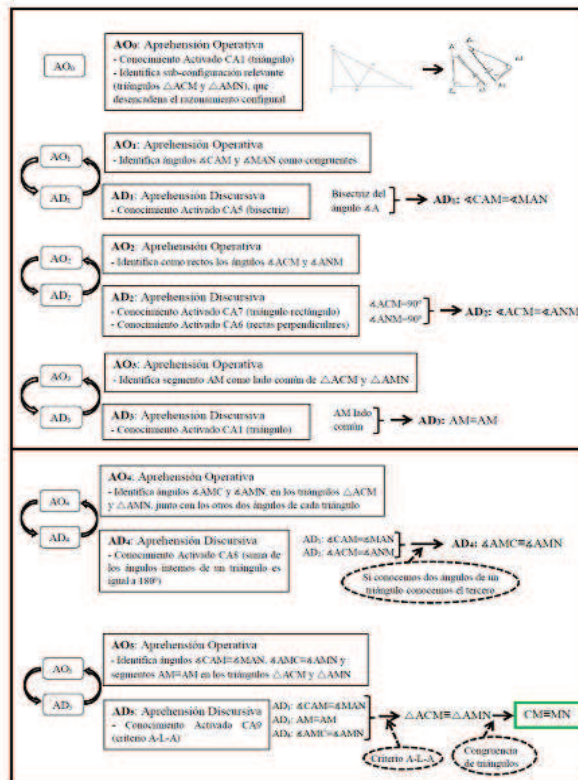
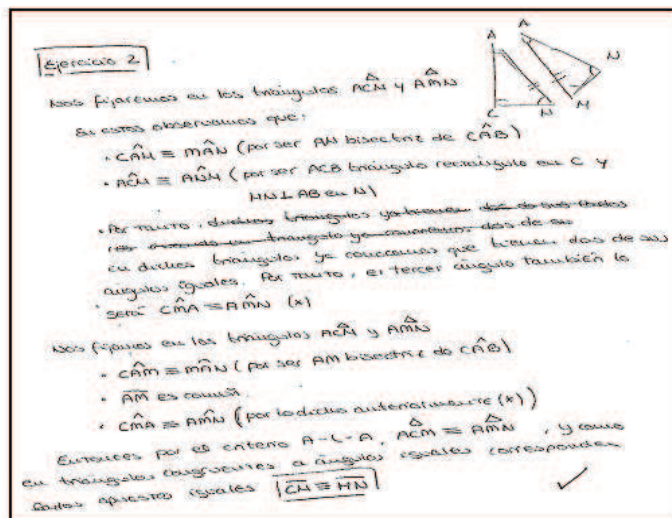


Figura 3. Ejemplo de respuesta de un estudiante al problema 2 descompuesto en unidades de análisis en la fase 1 del proceso de análisis seguido.

## Resultados

### Conocimientos geométricos

El análisis ha permitido identificar los ítems de conocimiento usados por los estudiantes en cada problema en relación a la sub-configuración identificada (tablas 3.1 y 3.2). El porcentaje de identificación de una sub-configuración relevante fue el mismo en los dos problemas: 92,2% (47 de 51). Sin embargo, el hecho de que el problema 1 pudiera tener tres trayectorias de resolución vinculadas cada una a determinadas sub-configuraciones (tipo a, b y c) ha implicado la activación de determinados conocimientos geométricos y plantea la cuestión de la relación con el nivel de éxito (generar un proceso deductivo correcto) vinculado a cada una de ellas. Las tablas 3.1 y 3.2 muestran la frecuencia en la que los estudiantes usaban diferentes hechos geométricos en relación a cada sub-configuración.

La identificación y las relaciones entre algunos de estos hechos geométricos pueden ayudar a producir el truncamiento del razonamiento configural, mientras que el uso de otros hechos geométricos podía introducir a los estudiantes en un bucle. Por ejemplo, en el problema 1 la sub-configuración *tipo a* fue identificada con más frecuencia (n=29), y vinculada a ella, los estudiantes usaron en el razonamiento configural los hechos geométricos: caracterización del triángulo isósceles (CA2, n=15), propiedad aditiva de los ángulos congruentes (CA3, n=9) y ángulos opuestos por el vértice son congruentes (CA4, n=1). Sin embargo, en la trayectoria de resolución asociada a esta sub-configuración no se requieren los hechos geométricos CA3 y CA4. Es decir,

hubo estudiantes que activaron estos conocimientos innecesariamente. En esta situación, para poder determinar la relación entre el uso de un hecho geométrico en una determinada configuración y la realización o no del truncamiento en el razonamiento configural identificamos las trayectorias de resolución seguidas por los estudiantes.

Tabla 3.1 Conocimiento geométrico usado durante la resolución del problema 1

(CAi: ítem de conocimiento activado)

Conocimiento activado en P1		Frecuencia		
		Sub-configuración relevante		
		a	b	c
CA1	-Triángulo: identificación de una sub-configuración	29	12	6
		47		
CA2	- Caracterización de Triángulo isósceles: tiene dos lados congruentes y por tanto dos ángulos congruentes	15	12	5
		32		
CA3	-Si a dos ángulos congruentes se les resta la misma parte, lo que queda son ángulos congruentes	9	11	2
		22		
CA4	-Ángulos opuestos por el vértice son congruentes	1	0	6
		7		
CA9	-Congruencia de triángulos (criterio A-L-A)	10	12	2
		24		

Tabla 3.2. Conocimiento geométrico usado durante la resolución del problema 2

(CAi: ítem de conocimiento activado)

Conocimiento activado en P2		Frecuencia
CA1	-Triángulo: identificación de una sub-configuración	47
CA5	-Bisectriz: semirrecta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes congruentes	41
CA6	-Definición de rectas perpendiculares	36
CA7	-Definición de triángulo rectángulo	29
CA8	-La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Consecuencia: conocidos dos ángulos en un triángulo, conocemos el tercero)	33
CA9	-Congruencia de triángulos (criterio A-L-A)	30

### Trayectorias de resolución

Una trayectoria de resolución es la secuencia de hechos geométricos (conocimiento) y sus relaciones seguida por un estudiante al intentar resolver el problema vinculado a una determinada configuración. El objetivo aquí es considerar el momento en el que una aprehensión operativa y/o discursiva genera un truncamiento del razonamiento configural. La tabla 4 muestra los vectores con los valores asociados a las respuestas de los estudiantes que nos permiten identificar las trayectorias de resolución. Dicha tabla recoge el número de respuestas asignadas a cada vector (no se muestran los vectores:  $V [0,1,0]$ ,  $V [0,2,0]$ ..., ya que no se dieron estas trayectorias en las respuestas de los estudiantes). Las trayectorias de resolución de los estudiantes se han agrupado en tres grupos:

- El *primer grupo* ( $V [0,0,0]$ ) corresponde a los estudiantes ( $n=4$ ) que no identificaron una sub-configuración relevante y no iniciaron el razonamiento configural.
- El *segundo grupo* lo forman los estudiantes que han activado al menos un hecho geométrico (identificación de triángulos, CA1) permitiéndoles identificar alguna sub-configuración, pero que generaron un bucle y no fueron capaces de resolver el problema. En este grupo hemos identificado tres sub-grupos:
  - los que no han activado nuevos conocimientos siendo incapaces de considerar los hechos geométricos identificados como premisas susceptibles de ser usados como hipótesis de un teorema ( $V [1,0,0]$ );

- los que han generado aprehensiones discursivas desde los datos del problema (V [1,1,0]);
- los que han activado ítems de conocimiento que les ha permitido generar nueva información adicional a partir de los datos y del conocimiento previo (V [1,2,0]), pero no son capaces de considerar algunos ítems de conocimiento que han reunido como premisas de proposiciones del tipo “si... entonces...” (que en estos problemas era el criterio de congruencia de triángulos)
- El *tercer grupo* (V [1,2,1]) son los estudiantes que han activado los ítems de conocimiento necesarios para la resolución seguida, y en los que el razonamiento configural ha desembocado en un truncamiento, resolviendo el problema con éxito.

Tabla 4. Clasificación de las trayectorias de resolución adoptadas por los estudiantes

Grupo	Vector	P1			P2
Sin identificación de sub-configuración relevante	V [0,0,0]	<b>4</b>			4
Bucle	V [1,0,0]	Sub-configuración relevante			2
		Tipo a	Tipo b	Tipo c	
		5	0	1	
		<b>6</b>			
	V [1,1,0]	12	0	3	11
	<b>15</b>				
V [1,2,0]	2	0	0	4	
	<b>2</b>				
Truncamiento	V [1,2,1]	10	12	2	30
		<b>24</b>			

En el problema 1, de los 47 estudiantes que identificaron alguna sub-configuración, 24 consiguieron generar los procesos deductivos (51%). De los 24 estudiantes que generaron un truncamiento del razonamiento configural generando un proceso deductivo, 10 siguieron la trayectoria vinculada a la *sub-configuración a* (CA1+CA2+CA9), 12 (50%) siguieron la trayectoria vinculada a la *sub-configuración b* que implicaba la activación de cuatro ítems de conocimiento geométrico (CA1+CA2+CA3+CA9); y solo 2 se apoyaron en la *sub-configuración c* (CA1+CA2+CA3+CA4+CA9).

De los 29 estudiantes que la iniciaron la trayectoria vinculada a la *sub-configuración a*, solo 10 consiguieron generar un truncamiento (34,5%). En esta trayectoria (CA1+CA2+CA9) identifican en primer lugar los dos triángulos de la *sub-configuración a* (CA1); también fueron capaces de relacionar la caracterización de triángulo isósceles a partir del dato del problema de que los lados AB y AC eran congruentes, derivando por tanto que el triángulo ABC es isósceles, y como consecuencia, que los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes (H3:  $\sphericalangle TCB \equiv \sphericalangle RBC$ ), (CA2), (esta información es utilizada en las trayectorias de resolución vinculadas a las sub-configuraciones *a*, *b* y *c*). La relación de este hecho con el dato dado por el problema H2:  $\sphericalangle RCB \equiv \sphericalangle TBC$  a través del criterio de congruencia de triángulos A-L-A (CA9) les permitía inferir que  $RC \equiv BT$ .

En la *sub-configuración b*, los 12 estudiantes que la iniciaron consiguieron realizar el truncamiento (100%). En la trayectoria de resolución de estos estudiantes (CA1+CA2+CA3+CA9) identifican en primer lugar los dos triángulos de la *sub-configuración b* (CA1); asimismo, utilizan el dato del problema H1:  $AB \equiv AC$ ; a partir de este dato y empleando la caracterización de triángulo isósceles obtienen que tiene dos ángulos congruentes (CA2); junto con la hipótesis H2:  $\sphericalangle BAT \equiv \sphericalangle CAR$ , y a través de la propiedad aditiva de ángulos congruentes (CA3), derivan un ítem de información (H3:  $\sphericalangle ACR \equiv \sphericalangle ABT$ ), (esta información es utilizada en las trayectorias de resolución vinculadas a las *sub-configuraciones b* y *c*). Al ser capaces de relacionar esos dos ítems de conocimiento a través del

criterio de congruencia de triángulos (CA9), generan el truncamiento del razonamiento configural que les permite resolver el problema.

Por último, la trayectoria definida por *la sub-configuración c*, fue generada por 6 de 47 estudiantes (12,8%) con un éxito del 33,3% (2 de 6). En la trayectoria de resolución, estos estudiantes (CA1+CA2+CA3+CA4+CA9) identifican en primer lugar los tres triángulos de la *sub-configuración c* (CA1), que les permite usar la caracterización del triángulo isósceles teniendo dos lados/ángulos congruentes (CA2); junto con el uso de la propiedad aditiva de los ángulos congruentes (CA3); y la congruencia de ángulos opuestos por el vértice (CA4) (esta información es utilizada únicamente en la trayectoria de resolución vinculada a la *sub-configuración c*). Con las premisas anteriores aplican un criterio de congruencia de triángulos (CA9, criterio A-L-A) y resuelven el problema.

En el problema 2, de los 47 estudiantes que han seguido la trayectoria de resolución definida por la única sub-configuración identificada, 30 generaron procesos deductivo (63,8%) que implicaba la activación de seis ítems de conocimiento geométrico (CA1+CA5+CA6+CA7+CA8+CA9). En la trayectoria de resolución de este problema, los estudiantes realizaron aprehensiones discursivas con H3:  $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle MAN$  derivada del dato del problema (AM es bisectriz del ángulo  $\sphericalangle CAB$ ). A partir de este momento, para poder tener los datos para usar el criterio de congruencia de triángulos A-L-A, 33 estudiantes usan el ítem de conocimiento CA8 (la suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ , y como consecuencia: conocidos dos ángulos en un triángulo conocemos el tercero), para derivar la información H4:  $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle AMN$ . A partir de aquí, 30 estudiantes consideran los datos H1:  $AM \equiv AM$ ; H3:  $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle MAN$ ; y H4:  $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle AMN$  como premisas del criterio de congruencia de triángulos A-L-A, y generan el truncamiento del razonamiento configural para generar el proceso deductivo que les permite resolver el problema.

Las diferentes trayectorias adoptadas por los estudiantes, que llevan a la resolución o no de los dos problemas (tabla 4), indican que los estudiantes identifican ítems de conocimiento a partir de los datos mediante aprehensiones discursivas y/o operativas, pero también generan nuevos datos usando ítems de conocimiento previamente conocidos y relacionándolos con la información de la configuración. En el problema 1 el CA3, si a dos ángulos congruentes se les resta la misma parte, lo que queda son ángulos congruentes; y en el problema 2 el CA8, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ , y como consecuencia: conocidos dos ángulos en un triángulo, conocemos el tercero. Estos datos muestran diferencias en el tipo de relaciones entre los ítems de conocimiento de geometría que se establecen entre las trayectorias definidas por los vectores  $V[1,1,0]$ ,  $V[1,2,0]$  y  $V[1,2,1]$ , entre el conocimiento previo y lo puesto en evidencia por las aprehensiones discursivas y operativas (derivadas del proceso de visualización).

## Discusión

Esta investigación intenta aportar características del conocimiento de geometría de los estudiantes para maestro que apoyen el truncamiento del razonamiento configural cuando se generan procesos deductivos durante la resolución de problemas de probar. Lo que motiva esta investigación es que los estudiantes para maestro deben llegar a conocer la geometría en el ámbito curricular de la educación primaria de forma que les permita ir más allá de simplemente reconocer propiedades y hechos geométricos en las figuras planas. La calidad del conocimiento de geometría puesto de manifiesto por las relaciones establecidas entre los hechos geométricos durante la resolución de problemas de probar, aporta información sobre la manera en la que los estudiantes para maestro deben llegar a conocer el contenido curricular de geometría. En este sentido, estos resultados indican rasgos del conocimiento de geometría del maestro que aportan información para caracterizar ámbitos específicos del conocimiento de matemáticas para enseñar.

A partir de nuestros resultados, podemos generar dos reflexiones en relación al papel del conocimiento de geometría en desencadenar el truncamiento del razonamiento configural en la



resolución de los problemas de probar. En primer lugar, los resultados obtenidos muestran que las distintas trayectorias que llevan a la resolución o no de los dos problemas están determinadas por la identificación de una sub-configuración relevante que facilita el uso de ítems de conocimiento geométrico. Aunque en los problemas analizados hemos asociado inicialmente a esta identificación la activación de un conocimiento de geometría específico (CA1: triángulo), creemos que el reconocimiento de una configuración concreta (y no otra) en la figura inicial, puede responder a la activación simultánea de varios de estos conocimientos, que permiten visualizar una sub-configuración entre las varias posibles.

En segundo lugar, Chinnappan (1998) indicó que una diferencia entre los mejores y peores estudiantes en la resolución de un problema de probar, estaba en la capacidad que tenían los mejores estudiantes en relacionar la información identificada en la configuración (o dado por el problema), e inferir nueva información para ser usada en el proceso de resolución. Es decir, la capacidad que tenían los estudiantes en considerar un determinado hecho geométrico en relación a otros. En nuestra investigación, y considerando las características de los problemas usados, el truncamiento del razonamiento configural se daba en la medida en la que los estudiantes eran capaces de considerar un hecho geométrico como premisa de la proposición geométrica dada por el criterio de congruencia de triángulos. Para ello el hecho geométrico debía cambiar su estatus lógico y ser usado como premisa de un teorema o proposición lo que permite inferir información adicional. Chinnappan indicaba que los estudiantes con mayor éxito empleaban durante la resolución de problemas un mayor número de *relaciones entre los esquemas de conocimiento geométrico*, y que además, se relacionaban en mayor medida en cadenas de razonamiento deductivo. En este sentido, nuestros resultados indican que solo se genera una trayectoria con éxito cuando los estudiantes relacionaban los ítems de conocimiento geométrico considerándolos premisas en una proposición que desencadena una cadena lógico-deductiva (en este caso el criterio de congruencia de triángulos). Esta característica es la que añade sentido a la idea propuesta por Chinnappan de que "los esquemas geométricos activados por los estudiantes de mayor éxito eran más sofisticados y variados que los activados por sus homólogos de bajo rendimiento". Desde estos resultados, una característica de *la calidad del conocimiento geométrico* que determina que las estructuras de conocimiento sean cualitativamente superiores, es cuando un hecho geométrico puede desempeñar diferentes roles lógicos durante la resolución de un problema (Prior & Torregrosa, 2013).

Nosotros podemos entender que cuando los estudiantes son capaces de dotar de diferentes roles a los hechos geométricos en los intentos de resolución de los problemas, tiene como consecuencia el que sean capaces de construir una representación mental del problema, mostrando las conexiones entre los datos y la tesis (el objetivo del problema). Esta explicación incide en el hecho de que el éxito en establecer las conexiones a través da alguna proposición conocida entre los hechos geométricos dados, no depende solo de conocer los hechos y las proposiciones, sino también de haber dotado a los hechos geométricos de un estatus lógico que les permita considerarlos como premisas de una secuencia lógico-deductiva. Esto es así ya que, durante la resolución del problema, el estudiante debe establecer conexiones entre los ítems de conocimiento geométricos conocidos de manera aislada. Es decir, llegar a considerar la posibilidad de que un determinado hecho geométrico pueda ser premisa en una proposición estableciéndose una relación (conexión) entre hechos geométricos, como son los criterios de congruencia de triángulos, parece facilitar el truncamiento del razonamiento configural.

### **Reconocimientos**

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

## Referencias

- Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, N.C.: Information Age Publishing. NCTM.
- Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In M. Kathleen & G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 341-362). Charlotte: IAG.
- Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental models in geometry problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 201-217.
- Clemente, F. y Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación matemática XVII* (pp. 229- 236). Bilbao: SEIEM.
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processes. In Sutherland, R. & Mason, J. (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education* (pp. 142-157). Berlín, Germany: Springer.
- Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In P. Boero (ed.), *Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice*, (pp. 137-162). Rotterdam, Netherland: Sense Publishers.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
- Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 163-183.
- Herbst, P.; Chen, Ch.; Weiss, M.; Gonzalez, G.; Nachlieli, T.; Hamlin, M. & Brach, Ch. (2009). "Doing Proofs" in Geometry classrooms. En D. Stylianou, M.L. Blanton, & E. J.Knuth (eds). *Teaching and Learning Proof Across the Grades. A K-16 Perspectives* (pp.250-268). New York: Routledge.
- Lin, F.L. & Yang, K. (2007). The reading comprehension of geometric proofs: The contribution of knowledge and reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5, 729-754.
- Llinares, S. & Clemente, F. (2014). Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3).
- Mesquita, A.L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195.
- Prior, J. & Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. [Configural reasoning and verification procedures in geometric context]. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(3), 339-368.
- Torregrosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría [Coordination of cognitive processes in geometry]. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300.
- Torregrosa, G., Quesada, H., & Penalva, M.C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización [Configural reasoning as coordination of visualisation process]. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 327-340.
- Yang, K. y Lin, F. (2008). A model of Reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 59-76.