

# TRIADAS Y N-PLAS DE NÚMEROS TRIANGULARES

**Haydee Jiménez Tafur**

*Universidad Pedagógica Nacional*

*Bogotá D.C, Colombia*

[jimenezhaydee@gmail.com](mailto:jimenezhaydee@gmail.com)

**Carlos Ruiz Huérfano**

*Universidad Pedagógica Nacional*

*Bogotá D.C, Colombia*

[kaer26@gmail.com](mailto:kaer26@gmail.com)

**Carlos Julio Luque Arias**

*Profesor Universidad Pedagógica Nacional*

*Bogotá D.C, Colombia*

[caluque@uni.pedagogica.edu.co](mailto:caluque@uni.pedagogica.edu.co)

## Resumen

Presentamos algunos resultados obtenidos con niños entre 11 y 16 años que asistieron al Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en el I semestre de 2006. La actividad con los niños inicia con una tabla construida a partir del número 1, sumando consecutivamente 0, 1, 2, etc., las sumas parciales de esta tabla, nos dan otra tabla cuyos elementos son los números poligonales; fijamos nuestra atención sobre los números triangulares, en particular cuando las sumas de algunos de ellos también es un número triangular.

## 1. La tabla de partida

Iniciemos nuestra actividad construyendo una tabla a partir del número 1 de la siguiente forma: cada fila comienza con 1, la primera fila se construye sumando 0 a cada término para conseguir el siguiente, por supuesto es una fila con sólo unos; en la segunda fila sumamos 1 a cada término para obtener el siguiente, es decir que esta es una fila donde está la lista de los primeros números naturales; en la tercera fila repetimos el procedimiento de las filas anteriores pero sumando dos, y así sucesivamente para la fila  $k$ , sumamos al 1 el número  $k - 1$ , y al resultado le sumamos  $k - 1$ , para obtener el siguiente, etc. Con este método obtenemos la siguiente tabla:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	...
1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	...
1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	...
1	6	11	16	21	26	31	36	41	46	...
1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	...
1	8	15	22	29	36	43	50	57	64	...
1	9	17	25	33	41	49	57	65	73	...
1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	...
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	...
1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	...
1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabla 1

Determinemos cuál es el número que corresponde a la columna  $n$  y a la fila  $k$ .

En la fila 1 el término que corresponde a una columna  $n$  es 1.

En la fila 2 el término que corresponde a una columna  $n$  es  $n$ .

En la fila 3 tenemos que el número de la primera columna es 1, el de la segunda columna es 3, el de la tercera columna es 5, y así sucesivamente; escribiendo esto de otra manera tenemos que:

$$\begin{aligned}1 &\longrightarrow 1 \\2 &\longrightarrow 3 \\3 &\longrightarrow 5 \\4 &\longrightarrow 7 \\5 &\longrightarrow 9 \\6 &\longrightarrow 11 \\&\vdots \\n &\longrightarrow ?\end{aligned}$$

El número en la segunda columna es el de la primera aumentado en el número anterior a él, esto es:

$$\begin{aligned}
 1 &\longrightarrow 1 = 1 + 0 = 1 + (1 - 1) \\
 2 &\longrightarrow 3 = 2 + 1 = 2 + (2 - 1) \\
 3 &\longrightarrow 5 = 3 + 2 = 3 + (3 - 1) \\
 4 &\longrightarrow 7 = 4 + 3 = 4 + (4 - 1) \\
 5 &\longrightarrow 9 = 5 + 4 = 5 + (5 - 1) \\
 6 &\longrightarrow 11 = 6 + 5 = 6 + (6 - 1).
 \end{aligned}$$

Conjeturamos que el número correspondiente a la columna  $n$  es

$$n + (n - 1) = 2n - 1.$$

Este mecanismo se puede emplear para hallar en una fila  $k$  el término correspondiente a la columna  $n$ , con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \text{Fila 1} &\longrightarrow 1 \\
 \text{Fila 2} &\longrightarrow n \\
 \text{Fila 3} &\longrightarrow 2n - 1 \\
 \text{Fila 4} &\longrightarrow 3n - 2 \\
 \text{Fila 5} &\longrightarrow 4n - 3 \\
 \text{Fila 6} &\longrightarrow 5n - 4 \\
 &\vdots \\
 \text{Fila } k &\longrightarrow (k - 1)n - (k - 2).
 \end{aligned}$$

Otra forma de hallar esto, es describir el proceso de construcción de la tabla, es decir: En cada fila tenemos que:

$$\begin{aligned}
 &1 \\
 3 &= 1 + 2 = 1 + 1(2) \\
 5 &= 1 + 2 + 2 = 1 + 2(2) \\
 7 &= 1 + 2 + 2 + 2 = 1 + 3(2) \\
 9 &= 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 1 + 4(2) \\
 11 &= 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 1 + 5(2)
 \end{aligned}$$

Por tanto en la columna  $n$  el término correspondiente es  $1 + [(n - 1)(2)]$ .

Este mecanismo se puede emplear para hallar en una fila  $k$  el término correspondiente a la columna  $n$ , con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \text{Fila 1} &\longrightarrow 1 \\
 \text{Fila 2} &\longrightarrow 1 + [(n - 1)(1)] \\
 \text{Fila 3} &\longrightarrow 1 + [(n - 1)(2)] \\
 \text{Fila 4} &\longrightarrow 1 + [(n - 1)(3)] \\
 \text{Fila 5} &\longrightarrow 1 + [(n - 1)(4)] \\
 \text{Fila 6} &\longrightarrow 1 + [(n - 1)(5)] \\
 &\vdots \\
 \text{Fila k} &\longrightarrow 1 + [(n - 1)(k - 1)].
 \end{aligned}$$

Luego la tabla quedaría como:

1	1	1	1	1	1	...	1
1	2	3	4	5	6	...	$n$
1	3	5	7	9	11	...	$2n - 1$
1	4	7	10	13	16	...	$3n - 2$

1	5	9	13	17	21	...	$4n - 3$
1	6	11	16	21	26	...	$5n - 4$
1	7	13	19	25	31	...	$6n - 5$
1	8	15	22	29	36	...	$7n - 6$
1	9	17	25	33	41	...	$8n - 7$
1	10	19	28	37	46	...	$9n - 8$
...	...	...	...	...	...	...	...
1	$1+(k-1)$	$1+ 2(k-1)$	$1+ 3(k-1)$	$1+ 4(k-1)$	$1+ 5(k-1)$	...	$(k - 1)n - (k - 2)$

Tabla 2

## 2. Suma de filas

Con base en la tabla anterior construimos otra tabla de manera que cada fila es de las sumas parciales de la tabla 1; así la primera fila está formada por los números naturales, la segunda por la suma de los dos primeros naturales, los tres primeros, etc., es decir que la segunda fila está formada por los números triangulares, y así sucesivamente.

Intentemos sumar los primeros  $n$  números de una fila  $k$  sin hacer todos los cálculos; por ejemplo, para encontrar la suma de los primeros  $n$  números de la fila 4, podemos utilizar un método<sup>1</sup> que consiste en colocar en una fila los números que deseamos sumar y en una segunda fila escribir los mismos números pero en el orden opuesto y sumar de la siguiente manera:

---

<sup>1</sup>LUQUE, C., JIMÉNEZ, H., DOMINGUEZ, D., (2007). *Algunas sumas en la tabla pitagórica de multiplicar*. En Memorias del XVII Encuentro de Geometría y V de Aritmética, Bogotá D.C.: Universidad Pedagógica Nacional.

$$\frac{\begin{array}{cccccccc} 1 & + & 4 & + & 7 & + & 10 & + & \dots & + & 3n - 2 \\ 3n - 2 & + & 3(n - 1) - 2 & + & 3(n - 2) - 2 & + & 3(n - 3) - 2 & + & \dots & + & 1 \end{array}}{\begin{array}{cccccccc} 3n - 1 & + & 3n - 1 & + & 3n - 1 & + & 3n - 1 & + & \dots & + & 3n - 1 \end{array}}$$

En todos los casos la suma es la misma, y ésta se repite  $n$  veces, es decir, la suma total es  $n(3n - 1)$ ; pero como se realiza una doble suma, hay que dividir el resultado entre dos, con lo que obtenemos que:

$$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

Observamos que éste procedimiento se puede emplear para hallar la suma de los primeros  $n$  números de una fila  $k$ , sin importar que tan grande sea  $n$ , o sea:

$$\frac{\begin{array}{cccccccc} 1 & + & 1 + (k - 1) & + & 1 + 2(k - 1) & + & \dots & + & (k - 1)n - (k - 2) \\ (k - 1)n - (k - 2) & + & (k - 1)(n - 1) - (k - 2) & + & (k - 1)(n - 2) - (k - 2) & + & \dots & + & 1 \end{array}}{\begin{array}{cccccccc} (k - 1)n - (k - 3) & + & (k - 1)n - (k - 3) & + & (k - 1)n - (k - 3) & + & \dots & + & (k - 1)n - (k - 3) \end{array}}$$

Entonces, la suma de los primeros  $n$  elementos de la fila  $k$  es:

$$1 + (1 + (k - 1)) + (1 + 2(k - 1)) + \dots + ((k - 1)n - (k - 2)) = \frac{n[(k - 1)n - (k - 3)]}{2}.$$

Con estos resultados formamos la tabla:

1	2	3	4	5	6	...	$\frac{n(n+1)}{2}$
1	3	6	10	15	21	...	$\frac{n(2n)}{2}$
1	4	9	16	25	36	...	$\frac{n(3n-1)}{2}$
1	5	12	22	35	51	...	$\frac{n(4n-2)}{2}$
1	6	15	28	45	66	...	$\frac{n(5n-3)}{2}$
1	7	18	34	55	81	...	$\frac{n(6n-4)}{2}$
1	8	21	40	65	96	...	$\frac{n(7n-5)}{2}$
1	9	24	46	75	111	...	$\frac{n(8n-6)}{2}$
1	10	27	52	85	126	...	$\frac{n(9n-7)}{2}$
...	...	...	...	...	...	...	...
1	$2 + (k - 1)$	$3 + 3(k - 1)$	$4 + 6(k - 1)$	$5 + 10(k - 1)$	$6 + 15(k - 1)$	...	$\frac{n[(k-1)n - (k-3)]}{2}$

Tabla 3

En donde cada fila es una lista de números poligonales, la segunda fila es de números triangulares, la tercera de cuadrados, la cuarta de pentagonales y la  $k$ -ésima fila es de números  $(k + 1)$ -gonales.

### 3. Triadas de números triangulares

Fijemos nuestra atención sobre la segunda fila de la tabla 3, ampliada un poco para que podamos encontrar algunas regularidades

$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$T_7$	$T_8$	$T_9$	$T_{10}$	$T_{11}$	$T_{12}$	$T_{13}$	$T_{14}$	$T_{15}$
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120
$T_{16}$	$T_{17}$	$T_{18}$	$T_{19}$	$T_{20}$	$T_{21}$	$T_{22}$	$T_{23}$	$T_{24}$	$T_{25}$	$T_{26}$	$T_{27}$	$T_{28}$	$T_{29}$	$T_{30}$
136	153	171	190	210	231	253	276	300	325	351	378	406	435	465
$T_{31}$	$T_{32}$	$T_{33}$	$T_{34}$	$T_{35}$	$T_{36}$	$T_{37}$	$T_{38}$	$T_{39}$	$T_{40}$	$T_{41}$	$T_{42}$	$T_{43}$	$T_{44}$	...
496	528	561	595	630	666	703	741	780	820	861	903	946	990	...

Tabla 4

Notamos inicialmente, que en general la suma de dos números triangulares no es un número triangular, de la misma forma que la suma de dos impares no es impar; pero a diferencia de estos, si existen algunos pares de triangulares cuya suma es un triangular. Por ejemplo,  $6 + 15 = 21$  o sea que

$$T_3 + T_5 = T_6.$$

De igual manera,

$$\begin{aligned} T_4 + T_9 &= T_{10} \\ T_5 + T_{14} &= T_{15} \\ T_6 + T_{20} &= T_{21} \end{aligned}$$

Al observar la secuencia de los subíndices de la tercera columna surgen los números triangulares, correspondientes a los subíndices de los de la primera columna; en particular 6 es el tercer triangular, 10 es el cuarto, etc., de otro lado el subíndice de la segunda columna es uno menos que el de la tercera, por tanto conjeturamos que

$$T_n + T_{T_n-1} = T_{T_n}.$$

Este resultado nos permite prever dos relaciones no vistas en un principio:

$$T_1 + T_0 = T_1 T_2 + T_2 = T_3.$$

Una forma gráfica de acceder a estos resultados la conseguimos, por ejemplo en el último caso mencionado, si tratamos de ensamblar  $T_2$  con  $T_2$  para conseguir  $T_3$  en la forma



Figura 1

debemos desarmar uno de los  $T_2$  y reubicar los cuadrados unidad sobre  $T_2$ , como lo muestra la figura 2

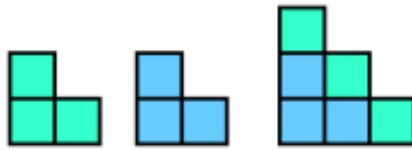


Figura 2

En el caso de  $T_3 + T_5 = T_6$ , desarmamos  $T_3$  y ubicamos los cuadrados unidad sobre

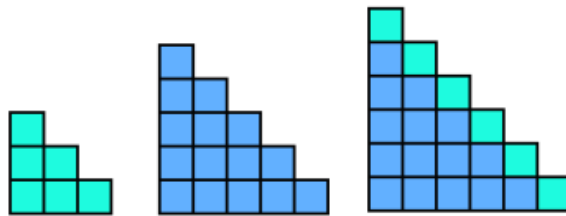


Figura 3

Para encontrar nuevas triadas podemos invertir el proceso; que ilustramos con  $T_4 + T_9 = T_{10}$ , partimos del primer sumando  $T_4 = 10$ , para encontrar el segundo sumando desarmamos  $T_4$  y ubicamos en una cuadrícula cuadrada de lado 10 cada cuadrado unidad formando una diagonal,

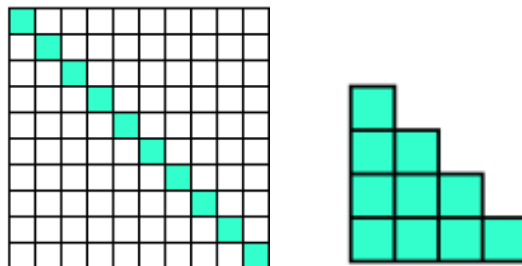


Figura 4

El segundo sumando es el triangular que se forma debajo de la diagonal es decir  $T_9$  y el resultado es  $T_{10}$ .

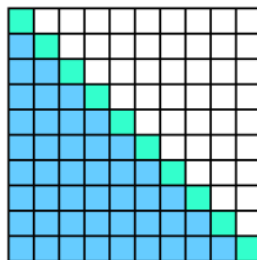


Figura 5

En general, podemos iniciar con  $T_n$ , con  $n$  mayor que 1, como primer sumando, el segundo sumando es el triangular cuyo índice es  $T_n$  disminuido en 1 y el resultado es  $T_{T_n}$ .

Podríamos pensar que ya terminamos, pero hay casos que no han sido considerados, por ejemplo

$$\begin{aligned}T_2 + T_0 &= T_2 \\T_5 + T_6 &= T_8 \\T_6 + T_9 &= T_{11} \\T_9 + T_{21} &= T_{23} \\T_{10} + T_{26} &= T_{28}\end{aligned}$$

Si asumimos que la primera fórmula corresponde al número 1, la segunda al 2 y la  $k$ -ésima al número  $k$ , podemos observar dos tipos de regularidades: si  $k$  es impar, las filas 1, 3, 5 y 7 corresponden a

$$\begin{aligned}T_2 + T_0 &= T_2 \\T_6 + T_9 &= T_{11} \\T_{10} + T_{26} &= T_{28} \\T_{14} + T_{51} &= T_{53}\end{aligned}$$

donde el primer sumando es  $T_{2k}$ , y si tratamos de expresar el segundo sumando en términos del primero, notando que  $T_2 = 3$ ,  $T_6 = 21$ ,  $T_{10} = 55$ ,  $T_{14} = 105$  vemos que

$$\begin{aligned}9 &= \frac{21 - 3}{2} \\26 &= \frac{55 - 3}{2} \\51 &= \frac{105 - 3}{2}\end{aligned}$$

y suponemos que el segundo sumando es:

$$\frac{T_{T_{2k} - 3}}{2}$$

En general, si  $k$  es impar suponemos que

$$T_{2k} + \frac{T_{T_{2k} - 3}}{2} = T_{\frac{T_{2k} - 3}{2}} + 2.$$

Si  $k$  es par, las filas 2, 4 y 6 corresponden a

$$\begin{aligned}T_5 + T_6 &= T_8 \\T_9 + T_{21} &= T_{23} \\T_{13} + T_{44} &= T_{46}\end{aligned}$$



donde el primer sumando es  $T_{2k+1}$ , y si tratamos de expresar el segundo sumando en términos del primero, notando que  $T_5 = 15$ ,  $T_9 = 45$ ,  $T_{13} = 91$ , vemos que

$$6 = \frac{15 - 3}{2}$$

$$21 = \frac{45 - 3}{2}$$

$$44 = \frac{91 - 3}{2}$$

suponemos que el segundo sumando es:

$$\frac{T_{T_{2k+1} - 3}}{2}$$

. En general, si  $k$  es par conjeturamos que

$$T_{2k+1} + T_{\frac{T_{2k+1} - 3}{2}} = T_{\frac{T_{2k+1} - 3}{2}} + 2.$$

En forma similar al primer caso, podemos usar una ayuda gráfica; por ejemplo, en el caso  $T_5 + T_6 = T_8$

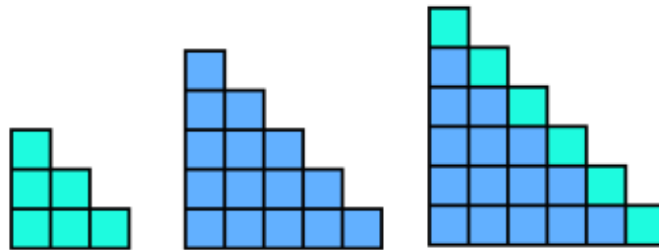


Figura 6

Desarmamos  $T_5$  y lo ubicamos sobre  $T_6$  en una diagonal doble y obtenemos:

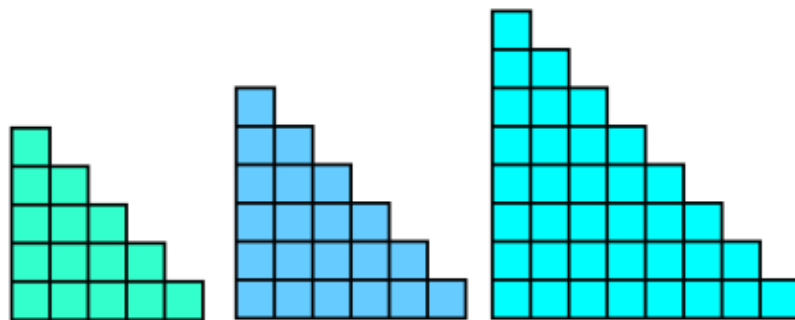


Figura 7

Observamos que, cada escalón del número triangular inferior, que es el segundo sumando, tiene dos cuadrados a su lado derecho, que forman la doble diagonal y arriba de éstos hay tres cuadrados, lo que significa que, en este caso, el número triangular que forme la diagonal debe ser impar y por tanto no todos los triangulares sirven como primer sumando.

Cuando consideramos  $T_6$  podemos construir una diagonal doble en una cuadrícula de lado 11:

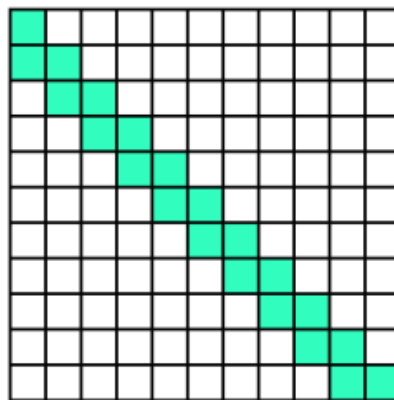


Figura 8

El número triangular debajo de la doble diagonal es el segundo sumando y el resultado tiene índice aumentado en dos, es decir  $T_6 + T_9 = T_{11}$ .

Con base en lo que hemos conseguido, intentemos ahora una generalización buscando una fórmula para la suma de dos triangulares cuyo resultado sea un triangular que tenga un subíndice tres unidades mayor que el segundo sumando, sabemos que el primer sumando debe formar una diagonal triple (de tres unidades por cada paso) y los primeros casos en que esto es posible son  $T_5 + T_3 = T_6$  y  $T_6 + T_5 = T_8$  como se ilustra en las figuras 9 y 10

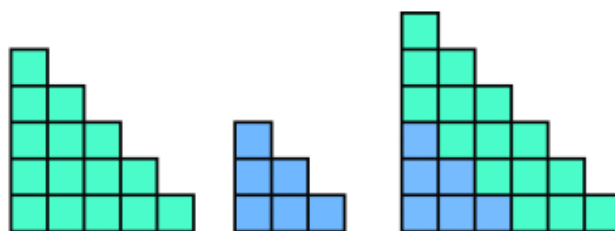


Figura 9

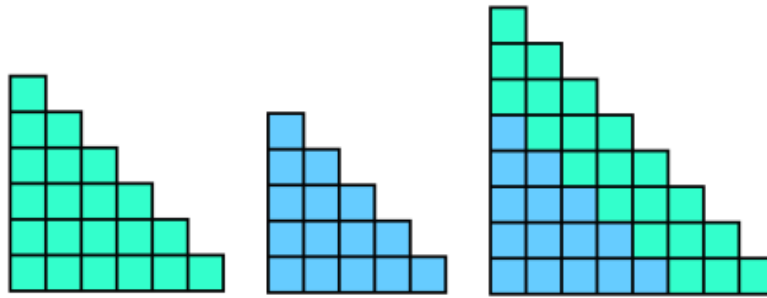


Figura 10

Pero estos resultados ya están incluidos en nuestras consideraciones anteriores. Miremos algunos casos en los cuales los números triangulares del primer sumando, son menores que el segundo, como en  $T_8 + T_{10} = T_{13}$  y  $T_9 + T_{13} = T_{16}$ , ilustrados en las figuras 11 y 12 respectivamente:

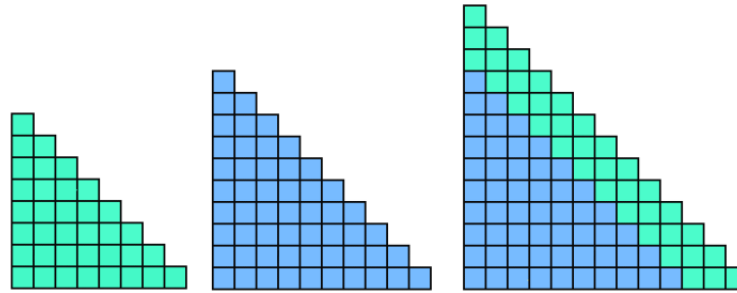


Figura 11

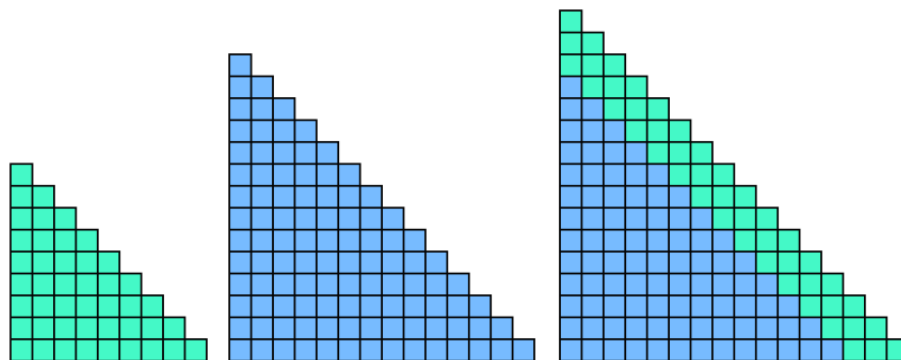


Figura 12

Como en el caso de diferencia 2, no todos los números triangulares pueden ser tomados como primer sumando, algunos de ellos son:

$$T_5 = 15 \quad T_6 = 21 \quad T_8 = 36 \quad T_9 = 45$$

notemos que todos son múltiplos de tres y en cada caso la diagonal triple está formada por un múltiplo de 3 más un triángulo superior de 6 unidades, que corresponde con  $T_3$ ;

siguiendo el mismo método aplicado en los casos anteriores de expresar el subíndice del segundo sumando en términos del primero, suponemos que las triadas de diferencia tres están dadas por:

$$T_k + T_{\frac{T_k - 3}{3}} = T_{\frac{T_k - 3}{3}} + 3.$$

si  $T_k$  es múltiplo de tres.

Si observamos las siguientes graficas, correspondientes a la parte superior de las triadas de diferencia 4, 5 y 6 respectivamente,

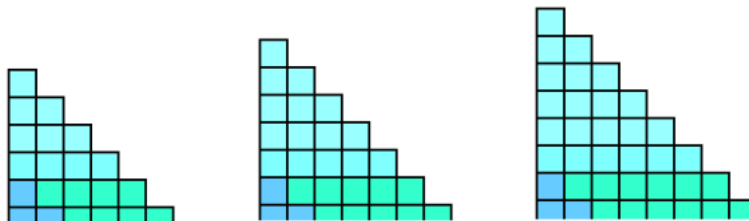


Figura 13

notamos que son  $T_4$ ,  $T_5$  y  $T_6$ ; reuniendo las informaciones precedentes y acomodando un poco su forma, tenemos que el segundo y tercer sumando son en cada caso

$$\begin{aligned} & T\left(\frac{T_k - T_1}{1}\right) \text{ y } T\left(\frac{T_k - T_1}{1} + 1\right) \\ & T\left(\frac{T_k - T_2}{2}\right) \text{ y } T\left(\frac{T_k - T_2}{2} + 2\right) \\ & T\left(\frac{T_k - T_3}{3}\right) \text{ y } T\left(\frac{T_k - T_3}{3} + 3\right) \\ & \vdots \\ & T\left(\frac{T_k - T_n}{n}\right) \text{ y } T\left(\frac{T_k - T_n}{n} + n\right) \end{aligned}$$

con lo que llegamos a la fórmula:

$$T_k + T_{\frac{T_k - t_n}{n}} = T_{\frac{T_k - T_n}{n}} + n.$$

Sólo nos falta encontrar los valores de  $k$  para los que son válidas las anteriores igualdades.

Para la diferencia 1, es decir  $n = 1$ , todos los valores de  $k$  nos dan una fórmula válida.

Si  $n = 2$ , los primeros números triangulares que nos dan una fórmula válida son:

$$\begin{array}{ccccc} T_5 & T_9 & T_{13} & T_{17} & T_{21} \\ T_6 & T_{10} & T_{14} & T_{18} & T_{22} \end{array}$$

De nuevo, las acomodamos para que el patrón surja y teniendo la forma para una fila la otra es inmediata.

La segunda fila es

$$2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 7, 2 \times 9, 2 \times 11, \dots, 2(2m + 1) = 4m + 2$$

En la primera fila, cada subíndice de los números triangulares es uno menos que los de la segunda fila, por lo tanto estos tienen la forma  $4m + 1$ . Este resultado coincide con lo obtenido en los párrafos anteriores.

Para las triadas de diferencia 3, los primeros números triangulares que nos reportan una fórmula válida son:

$$\begin{array}{ccccc} T_5 & T_8 & T_{11} & T_{14} & T_{17} \\ T_6 & T_9 & T_{12} & T_{15} & T_{18} \end{array}$$

Los subíndices de los números triangulares de la segunda fila ya los habíamos mencionado y corresponden a los múltiplos de tres, a partir de 6, los de la primera fila son uno menos que los de la segunda, o sea que tiene la forma:  $3m - 1$  con  $m \geq 1$ . En resumen la fórmula

$$T_k + T_{\frac{T_k - 3}{3}} = T_{\frac{T_k - 3}{3}} + 3.$$

Es válida si  $k = 3m$  o si  $k = 3m - 1$  con  $m \geq 1$ .

Para  $n = 4$ , obtenemos

$$\begin{array}{cccccc} T_{11} & T_{19} & T_{27} & T_{35} & T_{43} & \dots \\ T_{12} & T_{20} & T_{28} & T_{36} & T_{44} & \dots \end{array}$$

cuya segunda fila es de la forma:

$$4 \times 3, 4 \times 5, 4 \times 7, 4 \times 9, 4 \times 11, 4 \times 13, \dots, 4(2m + 1) = 8m + 4$$

y la primera fila es uno menos, o sea  $8m + 3$ .

De manera similar, llegamos a que las triadas de diferencia 5, 6 y 7 tienen como primer sumando los números triangulares con subíndices

$$T_{5m+4} \text{ y } T_{5m+5} \qquad T_{12m+5} \text{ y } T_{12m+6} \qquad T_{7m+6} \text{ y } T_{7m+7}$$

En general, conjeturamos que para las diferencias impares los subíndices del primer sumando tienen como coeficiente de  $m$  la misma diferencia impar y los sumandos son: ese impar y el impar menos 1.

Para las diferencias pares los subíndices del primer sumando, tienen como coeficiente de  $m$  el doble de la diferencia y los sumandos son esa diferencia par y la diferencia menos 1.

En resumen, tenemos que con los sumandos de las formas siguientes, conseguimos triadas de números triangulares de diferencia  $d$ :

$$\begin{array}{l} T_{dm+(d-1)} \\ T_{dm+d} \end{array} \text{ Para } d \text{ impar}$$

$$\begin{array}{l} T_{(2d)m+(d-1)} \\ T_{(2d)m+d} \end{array} \text{ Para } d \text{ par.}$$

#### 4. $N$ -plas de números triangulares

Consideremos ahora la suma de tres números triangulares cuya suma sea un número triangular, lo que llamaremos una cuádrupla de números triangulares. En la tabla 4, observamos que

$$\begin{array}{l} T_1 + T_2 + T_3 = T_4 \\ T_1 + T_3 + T_6 = T_7 \\ T_1 + T_4 + T_{10} = T_{11} \\ T_1 + T_5 + T_{15} = T_{16} \\ T_1 + T_6 + T_{21} = T_{22} \end{array}$$

En esta lista, vemos que el subíndice del tercer sumando es el número triangular correspondiente al subíndice del segundo sumando; es decir que

$$\begin{array}{l} T_2 = 3 \\ T_3 = 6 \\ T_4 = 10 \\ T_5 = 15 \\ T_6 = 21 \end{array}$$

En la lista

$$\begin{array}{l} T_2 + T_3 + T_8 = T_9 \\ T_2 + T_4 + T_{12} = T_{13} \\ T_2 + T_5 + T_{17} = T_{18} \\ T_2 + T_6 + T_{23} = T_{24} \\ T_2 + T_7 + T_{30} = T_{31} \end{array}$$

que inicia con  $T_2$  como primer sumando, el índice del tercer sumando es el número triangular correspondiente al subíndice del segundo sumando disminuido en 2.

En la lista

$$\begin{aligned} T_3 + T_4 + T_{15} &= T_{16} \\ T_3 + T_5 + T_{20} &= T_{21} \\ T_3 + T_6 + T_{26} &= T_{27} \\ T_3 + T_7 + T_{33} &= T_{34} \\ T_3 + T_8 + T_{41} &= T_{42} \end{aligned}$$

que inicia con  $T_3$  como primer sumando, el índice del tercer sumando es el número triangular correspondiente al subíndice del segundo sumando disminuido en 5.

Y en

$$\begin{aligned} T_4 + T_5 + T_{24} &= T_{25} \\ T_4 + T_6 + T_{30} &= T_{31} \\ T_4 + T_7 + T_{37} &= T_{38} \\ T_4 + T_8 + T_{45} &= T_{46} \\ T_4 + T_9 + T_{54} &= T_{55} \end{aligned}$$

que inicia con  $T_4$  como primer sumando, el índice del tercer sumando es el número triangular correspondiente al subíndice del segundo sumando disminuido en 9. Ya tenemos varias regularidades que organizaremos en la siguiente tabla:

Primer sumando	Segundo sumando	Tercer sumando	Total
$T_1$	$T_{1+k}$	$T_{T_{1+k}+(T_1-1)}$	$T_{T_{1+k}+(T_1-1)+1} = T_{T_{1+k}+T_1}$
$T_2$	$T_{2+k}$	$T_{T_{2+k}+(T_2-1)}$	$T_{T_{2+k}+(T_2-1)+1} = T_{T_{2+k}+T_2}$
$T_3$	$T_{3+k}$	$T_{T_{3+k}+(T_3-1)}$	$T_{T_{3+k}+(T_3-1)+1} = T_{T_{3+k}+T_3}$
$T_4$	$T_{4+k}$	$T_{T_{4+k}+(T_4-1)}$	$T_{T_{4+k}+(T_4-1)+1} = T_{T_{4+k}+T_4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_n$	$T_{n+k}$	$T_{T_{n+k}+(T_n-1)}$	$T_{T_{n+k}+(T_n-1)+1} = T_{T_{n+k}+T_n}$

Tabla 5

Ya tenemos una forma de armar cuádruplas triangulares de diferencia uno a partir de un número triangular cualquiera. Por ejemplo si iniciamos con  $T_7$ :

1. Escogemos un  $k$  arbitrario, por ejemplo 5.
2. Sumamos 5 al subíndice 7 y obtenemos el segundo sumando  $T_{12}$ .
3. El subíndice del total es  $T_{12} + T_7 = 78 + 28 = 106$ .

4. Restamos 1 al subíndice del total para así obtener el subíndice del tercer sumando  $106 - 1 = 105$ .
5. Formamos la cuádrupla triangular:

$$T_7 + T_{12} + T_{105} = T_{106}.$$

En general,

$$T_n + T_{n+k} + T_{T_{n+k}+T_n-1} = T_{T_{n+k}+T_n}.$$

Esta fórmula la podemos generalizar para n-plas de números triangulares, tomando m números triangulares, los sumamos y con ello establecemos el subíndice del triangular suma; por ejemplo, si tomamos los primeros 5 números triangulares obtenemos la siguiente expresión:

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + \square = T_{T_1+T_2+T_3+T_4+T_5} = T_{35}.$$

El último sumando que en la ecuación anterior fue reemplazado por  $\square$  se determina restando 1 al índice del triangular suma, es decir que  $\square$  corresponde a  $T_{34}$ , o sea que

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_{34} = T_{35}$$

La diferencia entre el último sumando y el triangular suma es un número natural cualquiera, en este caso 35, y 35 es el siguiente número natural que se adiciona a  $T_{34}$  para obtener  $T_{35}$

Por tanto; al adicionar tantos números triangulares como queramos, sin importar que estos sean consecutivos, podemos establecer una n-pla triangular al tomar esta suma como subíndice del triangular total y a la suma menos uno como el subíndice de último triangular sumando; por ejemplo:

$$T_3 + T_5 + T_7 + T_{10} + T_{103} = T_{T_3+T_5+T_7+T_{10}} = T_{104}$$

En conclusión, la siguiente expresión representa sumas de n números triangulares, siendo el último triangular sumando y el triangular suma, triangulares consecutivos:

## Bibliografía

- [1] BEILER, A. *Recreations in the theory of numbers*. New York: Dover. 1966.
- [2] JIMÉNEZ, R., GORDILLO, E., RUBIANO, G. *Teoría de números para principiantes*. Segunda Edición. Bogotá, D.C.: Facultad de Ciencias, Universidad Nacional. 2004.
- [3] LUQUE, C., MORA, L., PÁEZ, J., *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Contar e Inducir*. Bogotá: D.C.: Universidad Pedagógica Nacional. 2002.
- [4] OGILVY, C., ANDERSON J. *Excursions in number theory*. New York: Dover. 1988.