Transformaciones rígidas del plano

Brigitte Sánchez Robayo
Profesora Instituto Pedagógico Nacional
Bogotá D.C, Colombia
juanitasan82@gmail.com

Jaime Fonseca González
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
jfgonzalez@pedagogica.edu.co

Resumen

Utilizando la calculadora graficadora, se pueden deducir diversas características de algunas transformaciones rígidas del plano que permiten, encontrar propiedades algebraicas de las mismas. Sin embargo, para utilizar las diversas funciones que tiene la calculadora y específicamente, el programa Cabri Geometrie, es necesario realizar una actividad exploratoria inicial que permita, reconocer las ayudas y funciones básicas que posee este programa.

1. Actividad de exploración en cabri geometrie

La siguiente actividad permite reconocer algunas de las herramientas básicas del programa Cabri Geometrie incluido en la calculadora graficadora:

Actividad I.1 Realizar un cuadrado que tenga dos de sus vértices móviles de tal forma, que al moverlos no cambien las características del cuadrado.

i. Con la herramienta punto en el menú F2, ubique dos puntos cualquiera en el plano, y nombrelos X e Y respectivamente.(Para ingresar letras mayúsculas, oprima la tecla que tiene una flecha indicando hacia arriba y luego, la letra que desea escribir)

ii. En el menú F2 seleccione recta y trace la recta que pasa por estos dos puntos, seleccionando ambos puntos con enter.

iii. Con la opción recta perpendicular en el menú F4, trace una recta perpendicular a la recta trazada por X, de igual forma, una recta perpendicular por Y. Para ello, debe seleccionar la recta XY y el punto por el cual desea que pase la recta.

iv. Para asegurarse de la congruencia de los lados del cuadrado, vaya al menú F3 y trace una circunferencia con centro en X y extremo en Y, nombre Z al punto de intersección entre esta circunferencia y la perpendicular a la recta XY (lo cual se denota) que pasa por X. Recuerde que para marcar el punto de intersección, se dirige al menú F2 y selecciona **punto de intersección**, luego, selecciona los dos objetos a los que les desea hallar la intersección.

v. Trace una perpendicular a $\overleftrightarrow{XZ}$ por Z, y nombre W al punto de corte entre esta recta y la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{XY}$ por Y.

vi. Compruebe las propiedades del cuadrado moviendo los dos puntos móviles X e Y. Para ello, primero es necesario seleccionar el puntero en el menú F1, diríjase con el puntero al punto que desea mover, puede ser X, cuándo la calculadora le pregunte si desea seleccionar **éste punto** oprima enter. Inmediatamente el punto quedará seleccionado, luego oprima el botón que tiene como imagen una mano. Con este botón oprimido, mueva el puntero en la dirección que quiera utilizando las cuatro flechas direccionales. Debe oprimir el botón de "la mano"y las flechas al mismo tiempo. Observe qué ocurre con la figura.

Actividad I.2 Ahora, se transformará el polígono utilizando las transformaciones: Translación, Rotación y Simetría Axial que se encuentran en el menú F5.

i. Si desea trasladar el polígono, debe primero ubicar dos puntos P y Q que le determinarán los extremos del vector. Luego de ubicar los puntos con ayuda de la selección **punto** en F2, debe construir el vector generador. En el menú F2, seleccione la opción **vector** y luego, seleccione los puntos P y Q que determinan los extremos del mismo. Una vez tenga el vector, escoja F5 y seleccione **traslación**, con el puntero seleccione el objeto a trasladar, que en este caso es el cuadrado, y luego el vector. Luego de realizar la traslación, modifique el polígono inicial o el vector, desplazando los puntos a lo largo de la pantalla y compruebe qué sucede.

ii. Para reflejar el polígono realice un proceso similar al anterior con la variante, de trazar en esta ocasión la recta respecto a la cual realizará la reflexión.

iii. Para rotar el polígono, debe ingresar un punto M que será el centro de la rotación y con edición numérica en el menú F7, puede ingresar un valor numérico para el ángulo.

2. Construcción de la imagen de un objeto, por transformaciones rígidas

1. Encontrar la reflexión de un punto P a través de una recta l utilizando sólo circunferencias.

    - ¿Cómo se puede justificar esta construcción?
    - ¿Cuáles son los argumentos matemáticos que demuestran que el punto P' es la reflexión de P a través de la recta l?

2. Sin emplear la opción *traslación* en Cabri, construya la imagen de un punto M por una traslación cualquiera $\overrightarrow{QP}$. Usted especifica los puntos P y Q que determinan la traslación.

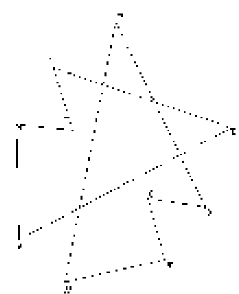
- ¿Cómo se puede justificar esta construcción?
- ¿Cuáles son los argumentos matemáticos que demuestran que el punto M' es la traslación de M por $\overrightarrow{QP}$?

3. Sin emplear la opción *rotación* en Cabri, construya la imagen de un punto N por una rotación cualquiera $[P(\alpha)]$. Usted determina el centro de rotación P y el ángulo α.

   - ¿Cómo se puede justificar esta construcción?
   - ¿Cuáles son los argumentos matemáticos que demuestran que el punto N' es la rotación N a través de $[P(\alpha)]$?

3. Determinación de transformaciones rígidas

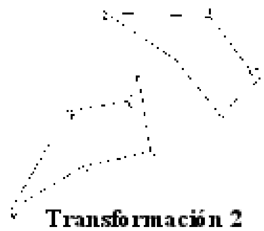
4. Abra el archivo de nombre "transformación1", mueva cualquiera de los puntos nombrados y observe que ocurre.



Transformación 1

- ¿Existe alguna relación entre el polígono que modifica y el otro polígono?¿Cuál? Nombre los vértices del otro polígono usando las letras A', B', C', D' o E' de acuerdo a la dependencia de estos puntos con los del polígono $ABCDE$.
- ¿Cuál es la transformación que relaciona estos dos polígonos?
- De acuerdo a su respuesta, encuentre:
  - El eje de simetría, si es una simetría axial
  - El centro de giro y ángulo de rotación, si es una rotación.
  - Los dos puntos que determinan la traslación, en el caso en que lo sea.
  - Los dos puntos que determinan la traslación y eje de simetría, si es un deslizamiento
- Justifique con argumentos matemáticos el procedimiento realizado.

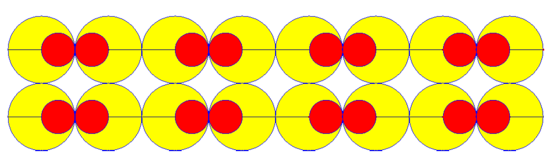
5. Abra el archivo de nombre "transformación2", mueva cualquiera de los puntos nombrados y observe que ocurre.



Transformación 2

- ¿Existe alguna relación entre el polígono que modifica y el otro polígono?¿Cuál? Nombre los vértices del otro polígono usando las letras A', B', C', D',E' o F' de acuerdo a la dependencia de estos puntos con los del polígono $ABCDEF$.
- ¿Cuál es el movimiento que relaciona estos dos polígonos?
- De acuerdo a su respuesta, encuentre:
  - El eje de simetría, si es una simetría axial
  - El centro de giro y ángulo de rotación, si es una rotación.
  - El vector generador, si es una traslación.
  - El vector generador y eje de simetría, si es un deslizamiento
- Justifique con argumentos matemáticos el procedimiento realizado.

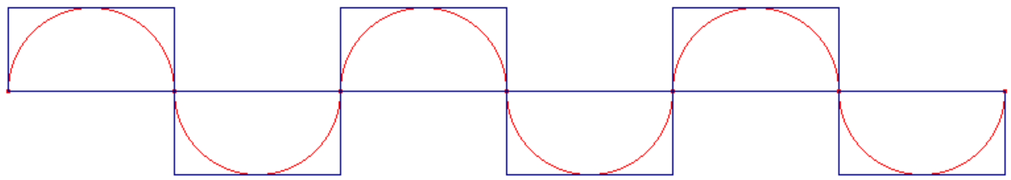
6. A continuación se presenta un friso construido a partir de un mismo elemento generador.



- Reproduzca el friso.
- ¿Qué transformaciones utilizó?
- ¿Existe una única forma para realizar este friso? ¿Por qué?
- ¿Encuentra alguna relación entre este ejercicio y la composición de transformaciones? ¿Cuál?

7. ¿Qué transformación se utilizó para obtener el siguiente friso?

- Compruebe su respuesta reproduciendo la figura en Cabri.



4. Composición de transformaciones rígidas

8. En una nueva página, ubique dos puntos J e I trace dos rectas concurrentes en un punto R y encuentre el ángulo α entre ellas. Determine una traslación cualquiera con extremos PQ. Aplique a cada uno de los puntos J e I la traslación $\overrightarrow{QP}$, y nombre a los puntos resultantes J' e I' respectivamente. Aplique la rotación con centro en R y ángulo α a los puntos J' e I', nombre a los puntos resultantes J'' y I''.

   - ¿Existe alguna transformación rígida que aplique I en I'' y J en J'' directamente?
   - Si existe, ¿Cuál es?
   - En general, ¿Qué isometría resulta de componer una rotación y una traslación? Se puede analizar la composición de dos transforma
   - ¿Qué isometría resulta de componer dos traslaciones?
   - ¿Qué isometría resulta de componer dos rotaciones?
     - Para determinar de manera más precisa el comportamiento de esta composición, modifique el centro de giro y el ángulo de las rotaciones.
   - ¿Qué isometría resulta de componer dos reflexiones axiales?
     - Modifique los ejes de simetría de tal manera que sean: Perpendiculares, paralelos o concurrentes que formen un ángulo diferente a 90^o.

9. Realizando transformaciones verifique o refute:

   - La composición de traslaciones es conmutativa
   - La composición de rotaciones es conmutativa.
   - La composición traslación-rotación es conmutativa.
   - La composición de reflexiones axiales es conmutativa.
   - La composición de transformaciones es asociativa
   - ¿Esta actividad le sugiere maneras de demostrar las proposiciones verdaderas?
   - Intente demostrar con argumentos matemáticos, tales proposiciones.

Bibliografía

[1] BEBER, K. WALTER, O. *Algunas precisiones acerca de la resolución de problemas y de su implementación en el aula*. Universidad Nacional Abierta. Recuperado septiembre 03 de 2006.

[2] FONSECA, J. SÁNCHEZ, B. *Tutorial de presentación acerca de algunas aplicaciones de los grupos cociente*. Universidad Pedagógica Nacional. 2004.

[3] GARCÍA, J. *Resolución de problemas y desarrollo de capacidades*. UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas. Nº 29. 2002.

[4] GUGGENHEIMER, H. *Plane Geometry and its groups*. Holden day. 1967.

[5] GUTIERREZ, A. PASTOR, A. *El grupo de las isometrías del plano*. Síntesis.

[6] YAGLOM, I. *Geometric Transformations*. Yale university. Panel. 1986.