Unidad didáctica sobre operaciones con números enteros

Diana Lucía Domínguez
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
anaidlucia@yahoo.com

Diana Pilar Pinilla
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
diana31416@yahoo.com

Carlos Julio Luque Arias
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
caluque@uni.pedagogica.edu.co

Resumen

El objetivo general de esta unidad didáctica es trabajar con los estudiantes la noción de números enteros, teniendo en cuenta que es una estructura algebraica que se extiende de la estructura del conjunto de los números naturales; en los números enteros se definen las operaciones adición y multiplicación, las cuales cumplen las propiedades clausurativa, conmutativa, asociativa, existencia de elemento neutro, existencia de elemento inverso aditivo y multiplicativo, respectivamente, y finalmente la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Las actividades las hemos planteado a partir de la adición y la multiplicación[1], de tal manera que durante el proceso utilicen las propiedades mencionadas anteriormente. En el desarrollo de la actividades no hará énfasis en qué consisten las propiedades, sino en su uso.

Las operaciones las implementaremos por medio de una actividad didáctica titulada "**CHICAS SUPER - PODEROSAS** *vs.* **LOS SUPER - HEROES**"en donde cada conjunto de números, es decir los enteros positivos y los enteros negativos[2], están representados por colores diferentes (Un conjunto será representado por las chicas Súper- poderosas junto con el color rojo y el otro conjunto por los Súper - héroes con el color azul) y luego por medio de unas reglas (las cales se mencionan en el planteamiento de las actividades) se debe lograr un objetivo[3]; para esto se hará énfasis en que realicen las operaciones.

El recurso que utilizaremos para llevar a cabo la actividad, son 32 cartas de tal manera que 16 representen a las Chicas Súper - Poderosas y las 16 restantes representarán a los Súper - Héroes; éstas tendrán por un lado un representante del equipo y en el otro lado un número del 1 al 15 del color referente al equipo; el formato de las tarjetas es el siguiente:

[1]La actividad No. 1 se refiere a la adición de números enteros, la actividad No.2 hace énfasis en la sustracción de números enteros (se busca que se observe que la sustracción es realmente una adición) y en la actividad No. 3 se abordará la multiplicación de números enteros.

[2]En cuanto al cero cada equipo tiene una tarjeta con este número que también hace parte del conjunto de los números enteros. En la actividad el cero cumplirá la función del elemento neutro.

[3]El objetivo y las reglas de cada actividad se mencionan en el planteamiento de las actividades.

"Nada es espontáneo. Nada está dado. Todo es construido."
Bachelard

1. Orientación metodológica

Uno de los propósitos de la educación matemática es el brindar a los estudiantes la oportunidad de conocer y aprender los conceptos matemáticos que normalmente se desarrollan y, que a través de la historia, han tenido un gran significado.

La propuesta que aquí exponemos pretende que los estudiantes observen de manera intuitiva la estructura algebraica de los números enteros, pues durante el desarrollo del juego se utilizan las propiedades de éste conjunto, y de ninguna manera buscamos acoplar éste conjunto a la vida cotidiana, ya que no conocemos ningún modelo que los represente; pues aunque usualmente se usan las deudas, éstas funcionan para la adición, pero no en la multiplicación. eliminar texto. Consideramos que este es un error común en los docentes de matemáticas, y una vía de acceso a los frecuentes errores que cometen los estudiantes.

Las actividades se realizarán con orientación del docente, de tal manera que a las preguntas que formulen los estudiantes no se les de una respuesta explicita, esperamos que ellos se enfrenten (preferiblemente) solos a la solución de cada actividad; al finalizar, se hará un resumen de las conclusiones obtenidas y una evaluación de la actividad.

2. Fundamentación matemática

2.1. Breve resumen de la historia de los números enteros

La introducción conceptual de los números negativos ha sido un proceso de una lentitud sorprendente. No puede haber, ciertamente, número negativo sin la presencia de un cero; sin embargo, en Europa, los matemáticos dispusieron del cero desde el siglo XIV, y será preciso esperar hasta el final del siglo XV para ver aparecer entes numéricos no positivos, que sin embargo no serían completamente aceptados como números. Las reglas de uso se establecieron rápidamente y los matemáticos manipularon los números relativos, pero tenían una comprensión muy parcial de ellos, con asombrosas lagunas. Serán durante mucho tiempo un útil de cálculo que facilitaba la resolución de ecuaciones, de las cuales, por otra parte, sólo se consideraba las soluciones positivas.

Varios obstáculos pueden explicar esta dificultad de reconocimiento: el más evidente de estos obstáculos es el cero absoluto, por debajo del cual no hay nada. Esta dificultad es especialmente señalada por el matemático francés Lazare Carnot (1753 - 1823), miembro de la Academia de Ciencias y renombrado matemático:

"*Para obtener realmente una cantidad negativa aislada, sería necesario restar una cantidad efectiva de cero, quitar algo de nada: operación imposible. ¿Cómo concebir pues una cantidad negativa aislada?.*"
(Geometría de Posición, 1803)

Un autor de manuales de matemáticas del siglo XIX, F. Busset, asociará el fracaso de la enseñanza de las matemáticas en Francia con la admisión de cantidades negativas. Ofendido porque se ponía en duda su conocimiento sobre la existencia "de cantidades más pequeñas que nada", expresa que eso es "el colmo de la aberración de la razón humana". Existe una especie de impedimento para manejar el cero origen, junto al cero absoluto.

Proponemos estudiar aquí el lento nacimiento de las cantidades negativas, y los obstáculos que fue preciso franquear para alcanzar la noción abstracta de número negativo.

2.2. Utilización de los enteros negativos en matemáticas

Es común estimar que la noción de número negativo nació de necesidades contables (ganancias y pérdidas). Parece que los chinos utilizaron desde el primer siglo de nuestra era los "números negativos". En las tablas de cálculo, a menudo son representados por varillas negras; las varillas rojas representan a los positivos. Sin embargo, aparecen solamente como auxiliares de cálculo; no hay números negativos en los enunciados de los problemas, tampoco los hay en las respuestas. Aparecen también en los matemáticos indios de los siglos VI y VII; por ejemplo, los encontramos en los escritos de Bramagupta (siglo VII). Este matemático enseña la manera de hacer sumas, restas, etc, usando bienes, deudas, la nada.

"*Una deuda restada de la nada se convierte en un bien, un bien restado de la nada se convierte en una deuda.*"

Las reglas de cálculo están dadas, pero nadie se preocupa de justificarlas. Los "números negativos"van a parecer así en el cálculo, y los matemáticos se permitirán a lo largo de la historia practicar cada vez mejor las operaciones, aunque las reglas no estén claramente establecidas. Los números negativos aparecen en Occidente a finales del siglo XV, relacionados con la resolución de ecuaciones, por ejemplo, en los escritos del matemático italiano Cardano (1501 - 1576).

Cardano es de nuevo el primero en percibir la multiplicidad de los valores de la incógnita en las ecuaciones, y su distinción en positivas y negativas. Este descubrimiento que, junto con otro de Vieta, es el fundamento de todos los de Harriot y Descartes sobre el análisis de ecuaciones, este descubrimiento, está claramente contenido en su Ars Magna. A partir del artículo tercero observa que las raíces de un cuadrado son igualmente más y menos el lado del cuadrado, y en el artículo 7 propone una ecuación que, reducida a nuestro lenguaje, sería $x^2 + 4x = 21$, y subraya que el valor de x es igualmente $+3$ o -7, y que cambiando el signo del segundo miembro, el valor se convierte en -3 o 7. Estas raíces negativas las llama falsas. Cardano reparará con esto el error de Pacioli, quien no habiendo mencionado estas raíces negativas, parece no haberlas observado[4].

Sin embargo en la misma época, otros matemáticos, como el francés Vieta, no darán sino las soluciones positivas de las ecuaciones. Las reglas de cálculo se construyen como prolongación de las reglas para los positivos, y a lo largo de la historia los matemáticos practicaron cada vez mejor sus cálculos, pero con una cierta incomodidad, pues se trata, a menudo, de reglas de cálculo referidas a cantidades o magnitudes que se añaden o se quitan, y no de números positivos o negativos. Cardano expresa así sus dudas:

> "*Es un sencillo consejo no confundir las cantidades defectuosas (ausentes) con las cantidades abundantes. Es preciso añadir entre sí las cantidades abundantes, añadir también entre sí las cantidades defectuosas, y restar las cantidades defectuosas de las abundantes, pero teniendo en cuenta las especies, es decir, no operar más que con semejantes; combinar los números entre sí, lo mismo con los cuadrados, e incluso con los cubos, etc...*"
> (Ars Magna, 1545)

Esto lleva a imaginar, un libro de cuentas en el cual se escribe en una columna los gastos, en otra los ingresos, cuidando sobre todo no mezclarlos. Claireaut (1713 - 1765) da sus reglas en sus "*Elementos de Álgebra*" de 1746:

> "*Se preguntará quizás si se puede sumar negativo con positivo, o más bien, si se puede decir que se suma algo negativo. A lo que yo respondo que esa expresión es exacta cuando no se confunde sumar con aumentar. Que dos personas, por ejemplo, sumen sus fortunas, cualesquiera que sean estas, yo diría que esto significa sumar sus bienes; que uno tenga deudas y efectos reales, si las deudas superan a los efectos, significa que lo que tiene es negativo; y la unión de esta fortuna con la del primero disminuirá los bienes de éste, de manera que la suma será menor que lo que poseía el primero, o incluso, enteramente negativa.*"

[4] MONTUCLA, J. F. Historia de las matemáticas.

Esto pone de relieve la confusión entre el signo de la operación y el signo del número, y la diferencia entre sumar y aumentar, dificultades que se manifiestan desde que se empieza a enseñar el negativo. La distinción no se hará realmente hasta fines del siglo XIX, pero el problema pedagógico persistirá.

Desde la época de Vieta, a principios del siglo XVII, las reglas sobre el cálculo literal serán dominadas perfectamente, pero las letras representan siempre cantidades positivas y nunca negativas. No se puede, por tanto, encontrar como solución de una ecuación, por ejemplo, $x = -3$; esto sería absurdo.

2.3. Obstáculos para la comprensión de los números negativos

En el "Diccionario de Matemáticas"de J. Ozanam, de 1691, se encuentran varios tipos de números: enteros (positivos), quebrados (fraccionarios), inconmensurables, sordos... Los negativos no son mencionados, aparecen en la resolución de ecuaciones, pero son calificados de falsas raíces, engañosos, al contrario que los verdaderos, que son los positivos.

A menudo ocurre que algunas de estas raíces son falsas, o menores que nada, como si se supusiese que x designa también el defecto de una cantidad, que si es 5, se tiene que $x + 5 = 0$, que si es multiplicada por $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$ se convierte en $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$, una ecuación en la cual hay cuatro raíces, a saber, tres verdaderas que son 2,3,4, y una falsa que es 5. (Descartes, La Geometría, 1637)

En el fragmento anterior, Descartes habla de una raíz falsa que es 5. Las soluciones negativas de las ecuaciones plantean problemas a los matemáticos, pues es preciso interpretarlas. He aquí un ejemplo que propone De Morgan (1806 - 1871) en 1831, ante las soluciones negativas de un problema:

"*La expresión imaginaria y la expresión negativa $-b$ se parecen en que cada una de ellas, cuando aparece como solución de un problema, indica que hay alguna inconsistencia o absurdo. En lo que respecta a la realidad de su significación, las dos son igualmente imaginarias puesto que 0 - a es tan inconcebible como.*

Un ejemplo: un padre tiene 56 años y su hijo 29. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será doble que la del hijo? Sea x el número de años; x verifica:

$$56 + x = 2(29 + x)$$

Encontramos que $x = -2$. Este resultado es absurdo pero si cambiamos x por $-x$ y resolvemos:

$$56 - x = 2(29 - x)$$

encontramos que $x = 2$. La respuesta negativa muestra que hemos cometido un error en la primera formulación de la ecuación. Cuando la respuesta a un problema es negativa, cambiando el signo de la x en la ecuación que ha producido este resultado, podemos descubrir que se ha cometido un error en el método utilizado para formular esta ecuación o mostrar que la pregunta planteada por el problema es muy limitada"

Se admite las cantidades negativas en el cálculo, como auxiliares obligatorios, aunque no tengan ningún sentido por sí mismas. Es exactamente la misma posición que la de los imaginarios (llamados en la actualidad números complejos). El malestar se manifiesta particularmente en los escritos de carácter pedagógico, pues los autores no llegan a dar explicaciones satisfactorias.

Hasta el siglo XVII hay pocas ocasiones para manipular números negativos que tengan sentido físico. En 1730 Reaumur construye el primer termómetro científico y será preciso esperar aún un siglo para que el gran público se habitúe a temperaturas por debajo de cero. En 1713, Fahrenheit se las arregla para evitar estas temperaturas.

Algunos, a pesar de todo, mantienen opiniones muy prudentes, incluso hostiles ante el uso de cantidades negativas, que no serían definitivamente números. He aquí cómo lo expresa Mac Laurin (1698 - 1746) en su "*Tratado de las Fluxiones*", en 1742:

> "*El uso del signo negativo en álgebra da lugar a varias consecuencias, en principio, difíciles de admitir y han ocasionado ideas que parecen no tener ningún fundamento real*"

He aquí algunas de estas ideas:

Pascal (1623 - 1662), en sus "Pensamientos": "*Demasiada verdad nos asombra; yo sé que no pueden comprender que, a quien de cero resta cuatro, le queda cero*".

Francis Maseres, matemático ingles, en su "*Disertación sobre la utilización del signo negativo en álgebra*"(1759):

"*Sirven solamente para tanto como yo sea capaz de imaginar, para oscurecer toda la doctrina de las ecuaciones y para volver tenebrosas cosas que son en su naturaleza excesivamente evidentes y simples. En consecuencia habría sido deseable que las raíces negativas no hubiesen sido jamás admitidas en el álgebra o que hubiesen sido rechazadas*"

Ante tales obstáculos, ven la luz entonces estrategias de evitación:

- En la escritura de ecuaciones: por ejemplo, habrá varios tipos de ecuaciones de segundo grado, que podemos citar con nuestra escritura algebraica contemporánea:
  $x^2 + px = q$
  $x^2 + q = p$
  $x^2 = px + q$
  ($x^2 = px$ no es verdaderamente una ecuación de segundo grado); el cero (0), como solución, tardará mucho tiempo en ser aceptado puesto que significa "nada"; p y q representan números, por lo tanto son por esencia positivos.

- Para la elección de los ejes para referenciar los puntos: o bien no se tiene en cuenta la parte de la curva correspondiente a x o y negativas (por ejemplo, la curva denominada Folium de Descartes, así llamada porque representa la cúbica de ecuación $x^3+y^3=3axy$, con x e y positivos); o bien se eligen los ejes de manera que a la curva considerada no le correspondan sino coordenadas positivas. Será preciso esperar al siglo XVIII para que Mac Laurin, y sobre todo Euler, expliquen cómo se pueden considerar las coordenadas negativas; se trata de una tímida aproximación a la que será llamada "la recta real".
- Para no tener que aceptar una solución negativa de un problema, casi hasta el siglo XX, si la resolución de una ecuación conduce a una solución negativa, se aconseja rescribir el problema como hemos visto en el texto de De Morgan.

2.4. Fundamentos matemáticos del conjunto de los números enteros

El conjunto de los números enteros[5] tiene estructura de grupo con la adición, y además, se define en él una multiplicación que es asociativa, conmutativa, tiene elemento idéntico y es distributiva respecto a la adición.

Tomaremos como partida el producto cartesiano de $\mathbb{N}$ consigo mismo ($\mathbb{N} \times N$), en el que se define la siguiente relación:

$$(a,b) \sim (c,d) \leftrightarrows a+d=b+c$$

Teorema 1. *La relación $\sim$ en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definida antes es una relación de equivalencia*[6]*.*

Demostración. 1. Como primera medida se verifica que la relación sea reflexiva, así

$$(a,b) \sim (a,b) \Rightarrow a+b=b+a$$

Como $a+b=b+a$, porque la suma se números naturales es conmutativa, se cumple entonces que la relación es reflexiva

2. La segunda propiedad que se debe comprobar es la simétrica, es decir:

$$(a,b) \sim (a_1,b_1) \Rightarrow (a_1,b_1) \sim (a,b)$$

Partimos de $(a,b) \sim (a_1,b_1)$, por definición de relación se tiene $a+b_1=b+a_1$, como a,b,a_1,b_1 pertenecen al conjunto de los números naturales, se cumple la propiedad conmutativa, luego

$$(a,b) \sim (a_1,b_1) \Rightarrow a_1+b=b_1+a$$

Finalmente por definición de la relación se tiene

$$(a,b) \sim (a_1,b_1) \Rightarrow (a_1,b_1) \sim (a,b)$$

[5]El orden que se sigue, los teoremas y las definiciones enunciadas fueron tomadas de: BRAVO, Raúl. Fundamentos de los sistemas numéricos, México, 1971.

[6]Para que una relación sea de equivalencia debe ser reflexiva, simétrica y transitiva.

3. Ahora, se probará que la relación es transitiva, o bien:

$$\text{Si } (a,b) \sim (a_1,b_1) \text{ y } (a_1,b_1) \sim (a_2,b_2) \text{ entonces } (a,b) \sim (a_2,b_2)$$

Partimos de la hipótesis,

$$(a,b) \sim (a_1,b_1) \Rightarrow a+b_1 = b+a_1 \text{ y } (a_1,b_1) \sim (a_2,b_2) \Rightarrow a_1+b_2 = b_1+a_2$$

luego

$$a+b_1+a_1+b_2 = b+a_1+b_1+a_2$$

Por la propiedad conmutativa, se tiene que

$$a+b_2+a_1+b_1 = b+a_2+a_1+b_1$$

Ahora por la propiedad cancelativa de la adición de número naturales, queda

$$a+b_2 = b+a_2$$

Finalmente por la definición de la relación se concluye que

$$(a,b) \sim (a_2,b_2)$$

Como la relación es reflexiva, simétrica y transitiva, entonces se concluye que es una relación de equivalencia. $\square$

Definición 1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *con la relación* $\sim$*, es el conjunto de las clases de equivalencia y se llama el conjunto de los números enteros y cada clase de equivalencia se llama número entero. La notación utilizada es:*

$$\mathbb{Z} \ \textit{para} \ (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$$

Ahora tenemos la notación $[a,b]$ para la clase de equivalencia, y se definirá así:

$$[a,b] = C_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (x,y) \sim (a,b)\}$$

Para dar al nuevo conjunto $\mathbb{Z}$ (el conjunto de los números enteros) una estructura algebraica definimos una adición y un producto entre clases de equivalencia de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [a,b] + [c,d] =& [a+c, b+d] \\ [a,b] \cdot [c,d] =& [ac+bd, ad+bc] \end{aligned}$$

Para que estas operaciones formen junto al conjunto de los números enteros una estructura algebraica, deben estar bien definidas, es decir, tienen que cumplir las siguientes propiedades, las cuales se enunciaran a continuación por medio de teoremas.

Teorema 2. *Sean* $a_i, b_i, c_i, d_i \in B$, $i = 1, 2, \ldots$. *Si*

$$[a_1, b_1] = [a_2, b_2] \text{ y } [c_1, d_1] = [c_2, d_2]$$

están en $\mathbb{Z}$, *entonces*

1. $[a_1, b_1] + [c_1, d_1] = [a_2, b_2] + [c_2, d_2]$
2. $[a_1, b_1] \cdot [c_1, d_1] = [a_2, b_2] \cdot [c_2, d_2]$

Demostración. Recordemos que $[x, y] = [x_1, y_1]$ en el conjunto $\mathbb{Z}$ si y sólo si $(x, y) \sim (x_1, y_1)$ en $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ y esto ocurre si y sólo si $x + y_1 = x_1 + y$ en el conjunto $\mathbb{N}$.

Por tanto de la hipótesis del teorema se concluye que

$$[a_1, b_1] = [a_2, b_2] \ \text{ y } \ [c_1, d_1] = [c_2, d_2]$$

si y sólo si

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1 \ \text{ y } \ c_1 + d_2 = c_2 + d_1$$

Respectivamente, ahora si sumamos estas dos igualdades, obtenemos que:

$$\begin{array}{c} a_1 + b_2 = a_2 + b_1 \\ c_1 + d_2 = c_2 + d_1 \\ \hline a_1 + b_2 + c_1 + d_2 = a_2 + b_1 + c_2 + d_1 \end{array}$$

Luego, para el primer caso se tiene que cumplir que:

1. $[a_1, b_1] + [c_1, d_1] = [a_2, b_2] + [c_2, d_2]$

   $$[a_1, b_1] + [c_1, d_1] = [a_2, b_2] + [c_2, d_2]$$

   Por definición de adición se tiene que

   $$[a_1 + c_1, b_1 + d_1] = [a_2 + c_2, b_2 + d_2]$$

   Usando la definición de equivalencia, es suficiente mostrar que

   $$a_1 + b_2 + c_1 + d_2 = a_2 + b_1 + c_2 + d_1$$

   lo cual ya se tiene. Es decir que se demostró lo que queríamos.

2. Para demostrar la segunda parte,

   $$[a_1, b_1] \cdot [c_1, d_1] = [a_2, b_2] \cdot [c_2, d_2]$$

   es decir que se quiere probar que

   $$[a_1c_1 + b_1d_1, a_1d_1 + b_1c_1] = [a_1, b_1] \cdot [c_1, d_1]$$

   $$= [a_2, b_2] \cdot [c_2, d_2] = [a_2c_2 + b_2d_2, a_2d_2 + b_2, c_2]$$

   Para ellos mostraremos

i $[a_1, b_1] \cdot [c_1, d_1] = [a_2, b_2] \cdot [c_1, d_1]$

ii $[a_2, b_2] \cdot [c_1, d_1] = [a_2, b_2] \cdot [c_2, d_2]$

Mostrando esto se completa la afirmación que inicialmente queremos demostrar.

Para demostrar (i), es suficiente probar que

$$[a_1c_1 + b_1d_1, a_1d_1 + b_1c_1] = [a_2c_1 + b_2d_1, a_2d_1 + b_2c_1]$$

lo cual es equivalente con

$$a_1c_1 + b_1d_1 + a_2d_1 + b_2c_1 = a_1d_1 + b_1c_1 + a_2c_1 + b_2d_1$$

y esta se reduce a

$$(a_1 + b_2)c_1 + (b_1 + a_2)d_1 = (a_1 + b_2)d_1 + (b_1 + a_2)c_1$$

Para que esto se cumpla, se tiene que

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1 = b_1 + a_2$$

Para probar (ii), tenemos:

$$[a_2, b_2] \cdot [c_1, d_1] = [a_2, b_2] \cdot [c_2, d_2]$$

Para esto es suficiente probar que

$$[a_2c_1 + b_2d_1, a_2d_1 + b_2c_1] = [a_2c_2 + b_2d_2, a_2d_2 + b_2c_2]$$

Lo cual es equivalente con

$$a_2c_1 + b_2d_1 + a_2d_2 + b_2c_2 = a_2d_1 + b_2c_1 + a_2c_2 + b_2d_2$$

y esta se reduce a

$$(c_1 + d_2)a_2 + (d_1 + c_2)b_2 = (d_1 + c_2)a_2 + (c_1 + d_2)b_2$$

Para que esto se cumpla, se tiene que

$$c_1 + d_2 = c_2 + d_1 = d_1 + c_2$$

Con lo cual llegamos a lo que queríamos demostrar. □

Ahora probaremos que el conjunto de los números Enteros, $\mathbb{Z}$, con estas dos leyes de composición interna satisfacen todas las propiedades para la suma y el producto que representa el conjunto de los números naturales.

Teorema 3. *$\mathbb{Z}$ con la suma y el producto definidos antes es un anillo conmutativo unitario.*

Debemos verificar que:

1. La adición es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro y cada elemento tiene opuesto aditivo.
2. La multiplicación es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro y es distributiva con respecto a la adición.

Demostración. Comenzaremos por verificar las propiedades de la suma, así:

Propiedad Asociativa:

$$([a,b]+[a_1,b_1])+[a_2,b_2]=[a,b]+([a_1,b_1]+[a_2,b_2])$$

Partiendo de esto, la definición de adición nos da

$$[a+a_1,b+b_1]+[a_2,b_2]=[(a+a_1)+a_2,(b+b_1)+b_2]$$

Por la propiedad asociativa de los números naturales, y aplicando la definición de suma, obtenemos

$$[a+(a_1+a_2),b+(b_1+b_2)]=[a,b]+[a+a_2,b_1+b_2]$$

O bien,

$$[a,b]+([a_1,b_1]+[a_2,b_2])$$

Que era lo que se pedía.

Propiedad conmutativa

$$[a,b]+[a_1,b_1]=[a_1,b_1]+[a,b]$$

Partiendo de esto, la definición de adición nos da

$$[a,b]+[a_1,b_1]=[a+a_1]+[b+b_1]$$

Que, usando la conmutatividad de los naturales, y alicando la definición de suma, obtenemos

$$[a_1+a]+[b_1+b]=[a,b1]+[a,b]$$

Que era lo que se quería demostrar.

Existencia de Elemento Neutro y Opuesto Aditivo

Se toma como elemento neutro la clase de equivalencia $[0,0]$, y como opuesto aditivo de $[a,b]$ la clase de equivalencia $[-a,-b]$.

Ahora verificaremos las propiedades de la multiplicación:

Propiedad Asociativa

$$([a,b]\cdot[a_1,b_1])\cdot[a_2,b_2]=[a,b]\cdot([a_1,b_1]\cdot[a_2,b_2])$$

Por la definición de producto tenemos

$$[aa_1 + bb_1, ab_1 + ba_1] \cdot [a_2, b_2] = [(aa_1 + bb_1)a_2 + (ab_1 + ba_1)b_2, (aa_1 + bb_1)b_2 + (ab_1 + ba_1)a_2]$$

Por la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma de los números naturales, queda
$[(aa_1 + bb_1)a_2 + (ab_1 + ba_1)b_2, (aa_1 + bb_1)b_2 + (ab_1 + ba_1)a_2]$
$= [aa_1a_2 + bb_1a_2 + ab_1b_2 + ba_1b_2, aa_1b_2 + bb_1b_2 + ab_1a_2 + ba_1a_2]$
Luego, por las propiedades conmutativa y asociativa de los números naturales, y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición, tenemos que $[aa_1a_2 + ab_1b_2 + ba_1b_2 + bb_1a_2, aa_1b_2 + ab_1a_2 + ba_1a_2 + bb_1b_2]$
$= [a(a_1a_2 + b_1b_2) + b(a_1b_2 + b_1a_2), a(a_1b_2 + b_1a_2) + b(a_1a_2 + bb_1b_2)]$
Que, por la definición de producto, es equivaente a

$$[a, b] \cdot ([a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2])$$

Lo que queríamos.

Propiedad Conmutativa

$$[a, b] \cdot [a_1, b_1] = [a_1, b_1] \cdot [a, b]$$

Usando la definición de producto, y la propiedad conmutativa de la multiplicación en los naturales, se llega a que

$$[a, b] \cdot [a_1, b_1] = [a, a + b_1b, b_1a + a_1b]$$

Con lo que se concluye que

$$[a, a + b_1b, b_1a + a_1b] = [a_1, b_1] \cdot [a, b]$$

que era lo pedido.

Existencia de Elemento Neutro El elemento neutro para la multiplicación es $[1, 0]$, pues dada la clase de equivalencia $[a, b]$, se tiene:

$$[a, b] \cdot [1, 0] = [a1 + b0, a0 + b1] = [a, b]$$

Finalmente, verificaremos la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma

Propiedad Distributiva de la Multiplicación con respecto a la Suma

$$[a, b] \cdot ([x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [a, b] \cdot [x_1, y_1] + [a, b][x_2, y_2]$$

Como

$$[a, b] \cdot [x_1 + x_2, y_1 + y_2] = [a\{x_1 + x_2\} + b\{y_1 + y_2\}, a\{y_1 + y_2\} + b\{x_1 + x_2\}]$$

Por la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, en los números naturales, obtenemos que

$$[a\{x_1 + x_2\} + b\{y_1 + y_2\}, a\{y_1 + y_2\} + b\{x_1 + x_2\}]$$

$$= [ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2, ay_1 + ay_2 + bx_1 + bx_2]$$

O bien,

$$[ax_1 + by_1, ay_1 + bx_1] + [ax_2 + by_2, ay_2 + bx_2] = [a, b] \cdot [x_1, y_1] + [a, b] \cdot [x_2, y_2]$$

El conjunto de los números Enteros, por ser anillo, goza de algunas propiedades que conviene destacar. La primera es que, 0 representa al neutro aditivo y la segunda es que 1 es la unidad de $\mathbb{Z}$.

Si a es un entero, se denota por $-a$ al opuesto aditivo de a, es decir por definición $-a$ satisface:

$$(-a) + a = a + (-a) = 0$$

Además $-a$ es claramente el único entero que satisface dicha igualdad. En efecto, si b pertenece al conjunto de los números enteros es tal que $b + a = 0$, entonces

$$b + a + (-a) = 0 + (-a) = -a$$

Es decir,

$$-a = b + (a + (-a)) = b + 0 = b$$

Luego

$$b = -a$$

Es inmediato entonces que

$$-(-a) = a$$

El entero $b + (-a)$ se denota $b - a$. $\square$

Teorema 4. *Sean a, b, c, d números enteros. Entonces,*

1. *$b - a$ es el único entero que verifica $(b - a) + a = b$, es decir, $x = b - a$ si y sólo si $x + a = b$.*
2. - $a - (b + c) = a - b - c$
   - $a - (-b) = a + b$
   - $a - (b - c) = a - b + c$
   - $a + (b - c) = a + b - c$
3. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$
4. $a(b - c) = ab - ac$

5. $a(-b) = (-a)b = -ab$
6. $(-a)(-b) = ab$

Demostración. 1. Partimos de que

$$(b-a)+a = b4$$

si sumamos cero al lado derecho de la igualdad, se obtiene que

$$(b-a)+a = b+(-a)+a$$

de lo cual se sigue que

$$b+(-a)+a = b+((-a)+a) = b$$

y $b-a$ es el único entero que satisface la ecuación

$$x+a = b$$

ya que si n es solución se tiene

$$n+a = b$$

luego

$$n = n+a(-a) = b+(-a) = b-a$$

es decir $n = b-a$.

2. - Nuestro punto de partida es

$$a-b-c$$

luego sumamos$(a+b)$, así

$$a-b-c+(a+b)$$

y se puede decir también que

$$a-b-c+(a+b) = a+(-c)+(-b)+b+c$$

ahora, por las propiedades asociativa y conmutativa llegamos a que

$$a+(-c)+(-b)+b+c = a+c+(-c)+b+(-b)$$

y esto a su vez cumple que

$$a+c+(-c)+b+(-b) = a+(c+(-c))+(b+(-b))$$

por definición tenemos que

$$a+(c+(-c))+(b+(-b)) = a+0 = a$$

es decir

$$a = a-b-c+(a+b)$$

y por la parte 1 del teorema 4, concluimos que

$$a-(b+c) = a-b-c$$

- Partimos de
$$a - (-b)$$
aquí deducimos que
$$a - (-b) = a + (-(-b))$$
y por definición
$$-(-b) = b$$
luego
$$a + (-(-b)) = a + b$$
que era a donde queríamos llegar.
- Vamos a partir de la parte izquierda de la igualdad, es decir
$$a - (b - c)$$
por la demostración anterior tenemos que
$$a - (b - c) = a - (b + (-c))$$
ahora, como
$$a - (b + c) = a - b - c$$
entonces
$$a - (b + (-c)) = a - b - (-c)$$
y nuevamente por la demostración anterior podemos concluir que
$$a - b - (-c) = a - b + c$$
es decir que
$$a - (b - c) = a - b + c$$
- Partimos de
$$a + (b - c)$$
luego
$$a + (b - c) = a - (-(b - c))$$
ahora
$$a - (-(b - c)) = a - ((-b) - (-c))$$
como
$$a - (b - c) = a - b + c$$
entonces
$$a - ((-b) - (-c)) = a - (-b) + (-c)$$
es decir
$$a - (-b) + (-c) = a + b - c$$
con esto concluimos que
$$a + (b - c) = a + b - c$$

3. Tenemos que
$$b \cdot a = (b+0)a$$
luego por la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma se tiene que
$$(b+0)a = ba + 0a$$
es decir
$$0 \cdot a = 0$$
Por la propiedad conmutativa de la multiplicación
$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

4. Partimos de
$$a(b-c)$$
ahora por la propiedad distributiva de a multiplicación con respecto a la suma se tiene que
$$a(b-c) + ac = a((b-c)+c)$$
luego
$$a((b-c)+c) = a(b+(c+(-c)))$$
y esto a su vez es igual a
$$a(b+(c-c))$$
es decir
$$a((b-c)+c) = a(b+0)$$
y esto es
$$a(b+0) = ab + a0 = ab + 0 = ab$$
Luego
$$a(b-c) = ab - ac$$

5. Vamos a partir de la parte izquierda de la igualdad, es decir
$$a(-b)$$
luego esto se puede reescribir así
$$a(0-b)$$
es decir
$$a(-b) = a(0-b)$$
luego por la parte 4 del teorema 4, se tiene que
$$a(0-b) = a0 - ab = -ab$$
Por tanto concluimos que
$$a(-b) = -ab$$

Ahora

$$(-a)b = -a(0+b) = -a0 + (-a)b = 0 + (-ab) = -ab$$

Finalmente

$$a(-b) = (-a)b = -ab$$

6. Partimos de

$$(-a)(-b)$$

luego

$$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-ab) = ab$$

Que era a donde queríamos llegar.

$\square$

Se hace necesario que desataquemos que como las propiedades del teorema 4 se cumplen, éstas son validas para cualquier anillo y particularmente para el conjunto de los números enteros.

Ahora mostraremos que el conjunto de los números enteros es efectivamente una extensión del conjunto de los números naturales en el sentido que los enteros contienen una "copia" de los naturales. Es decir que hay una inyección $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ que respeta las operaciones en los naturales, lo cual significa que

$$h(n+m) = h(n) + h(m) \text{ y } h(n \cdot m) = h(n) \cdot h(m)$$

Esto permite traducir en el conjunto de los números enteros toda propiedad que se verifique en los Naturales efectuando todo tipo de operaciones con los $f(n)$ en $f(\mathbb{N})$ en lugar de hacerlos con los n en $\mathbb{N}$. En buenas cuentas, esto da motivo para identificar $n \in \mathbb{N}$ con $f(n) \in \mathbb{Z}$, utilizando si se desea la misma notación para ambos elementos, ya que desde el punto de vista algebraico no hay diferencia salvo la distinta notación para cada uno de ellos.

Teorema 5. *La aplicación*

$$\begin{aligned} h :& \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ & n \mapsto [n+1, 1] \end{aligned}$$

es una inyección respetuosa de la estructura algebraica de los naturales, o sea,

$$h(n+m) = h(n) + h(m) \;\; y \;\; h(n \cdot m) = h(n) \cdot h(m)$$

Demostración. h es inyección porque si $h(n) = h(m)$, entonces

$$[m+1, 1] = [n+1, 1]$$

luego

$$m + 1 + 1 = n + 1 + 1$$

por tanto

$$m + 2 = n + 2$$

ahora

$$m + 2 - 2 = n + 2 - 2$$

obteniendo

$$m + 0 = n + 0$$

finalmente concluimos que

$$m = n$$

o sea

$$h(n) = h(m)$$

entonces

$$n = m$$

- h respeta la suma, ya que

$$h(n + m) = [n + m + 1, 1] = [n + m + 1 + 1, 1 + 1] = [n + 1, 1] + [m + 1, 1]$$

$$= h(n) + h(m)]$$

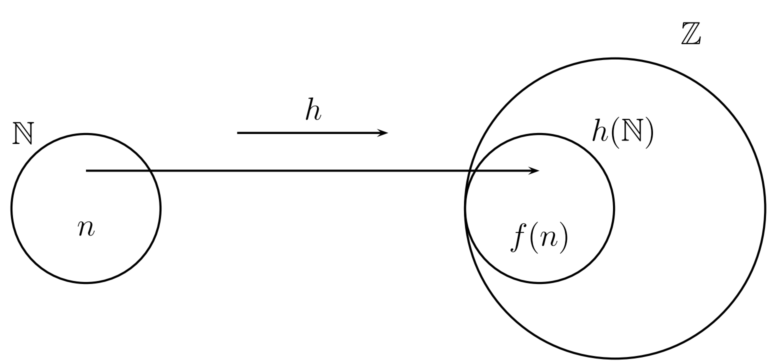
- h respeta la multiplicación, ya que

$$h(nm) = [nm, 1] = [nm + n + m + 1, n + m + 1 + 1] = [n + 1, 1] \cdot [m + 1, 1]$$

$$= h(n) \cdot h(m)$$

$\square$

La identificación se lleva a cabo de la siguiente manera:



Formar el conjunto $\mathbb{Z} - h(\mathbb{N})$, es decir, sacar del conjunto de los enteros el conjunto $h(\mathbb{N})$. Ahora en el lugar dejado libre por $h(n)$ en $\mathbb{Z}$ poner el elemento $n \in \mathbb{N}$ y considerarlo ahora como elemento del conjunto de los números enteros. Para efectuar operaciones con n y otros elementos de $\mathbb{Z}$, hacerlas como se hacían con $h(n)$, es decir, para $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{N}r = h(n) \cdot r$$

Con esta identificación $\mathbb{N}$ pasa a ser propiamente un subconjunto se $\mathbb{Z}$, y claramente se verifica para $m, n \in \mathbb{N}$, que $m + n$ y $m \cdot n$ son elementos de $\mathbb{N}$ además, si α es un entero cualquiera, se tiene $\alpha = [p, q]$ para ciertos $p, q \in \mathbb{N}$. Luego

$$\begin{aligned} \alpha = [p, q] &= [p + 1 + 1, q + 1 + 1] = [p + 1, 1] + [1, q + 1] \\ &= [p + 1, 1] - [q + 1, 1] = h(p) - h(q) \end{aligned}$$

Y hecha la identificación podemos escribir

$$\alpha = p - q$$

Por último la forma de definir h, es claro que la unidad de $\mathbb{N}$ se identifica con la unidad $\mathbb{Z}$. resumiendo todo esto, se tiene el

Corolario 1. *Mediante la inyección*

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto [n + 1, 1] \end{aligned}$$

$\mathbb{N}$ *se identifica con un subconjunto de* $\mathbb{Z}$ *tal que cada entero es diferencia (en* $\mathbb{Z}$*) de dos números naturales y la unidad de* $\mathbb{N}$ *se identifica con la unidad de* $\mathbb{Z}$*. además para* $p, q \in \mathbb{N}$, $p - q \in \mathbb{N}$ *si, y sólo si* $p > q$*. En tal caso,* $p - q$ *es el único número natural* d *que verifica* $p = q + d$.

Demostración. Sea $p > q$ en $\mathbb{N}$, es decir, $p = q + d$ siendo d número natural. d es único con esta propiedad, en virtud de ley de cancelación. Luego

$$p - q = d, \quad d \in \mathbb{N}$$

Recíprocamente, si $p - q \in \mathbb{N}$, entonces $p - q = d$ para algún $d \in \mathbb{N}$. Luego $p = q + d$, o sea, $p > q$. $\square$

Dado $\alpha = [p, q]$ en $\mathbb{Z}$ hay solo tres posibilidades para la pareja p, q:

1. $p > q$ entonces $\alpha = h(d) = d$ donde $p = q + d$. En este caso $\alpha \in \mathbb{N}$.
2. $p = q$ entonces $\alpha = [p, q] = 0 \in \mathbb{Z}$
3. $p < q$ entonces $\alpha = [p, q] = [q, p] = -h(r) = -r$, donde $r \in \mathbb{N}$ satisface $q = p + r$.

Además, estas propiedades de son independientes de la elección de representantes para la clase de equivalencia. En efecto, si $\alpha = 0 \in \mathbb{Z}$ y α tiene la representación $[m, n]$, entonces

$$[m, n] = [1, 1]$$

es decir

$$m = n$$

Por otra parte, si

$$\alpha = [p, q] = [m, n]$$

con $p > q$, entonces

$$p + n = m + q$$

implica que $m > n$, ya que para la pareja de naturales (m, n) hay sólo tres posibilidades: $m = n, m < n, m > n$, y las dos primeras son claramente imposibles.

Luego se tiene el siguiente teorema

Teorema 6. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ *verifica la siguiente propiedad:*

1. $a, b \in \mathbb{N}$ *entonces* $a + b \in \mathbb{N}$ *y* $ab \in \mathbb{N}$
2. $a \in \mathbb{Z}$ *entonces* $a \in \mathbb{N}$ *o* $a = 0$ *o* $-a \in \mathbb{N}$

y cada una de estas alternativas excluye las otras dos.

(La demostración queda a cargo del lector).

Definición 2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ *(por tener las propiedades 1 y 2 del teorema (6)) se llama conjunto de los enteros positivos.*

Cada vez que en un anillo se puede definir un conjunto de positivos, se puede definir un orden respetuoso de la estructura algebraica, para este caso se supone: $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $a < b$ si, y sólo si $b - a \in \mathbb{N}$.

Por lo dicho antes se tiene en forma inmediata:

- $a < b$ y $b < c$ si, y sólo si $a < c$.
- Para $a, b \in \mathbb{Z}$ rige una, y solo una, de las tres posibilidades $a < b$ o $a = b$ o $b < a$ (ya que $b - a$ satisface la parte 2 del teorema (6)).

Definición 3. *Sean* $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \leq b \;\; o \;\; a < b \;\; o \;\; a = b$$

$a \leq b$ *se lee* a *es menor o igual que* b *o* b *es mayor o igual que* a.

Teorema 7. *La relación $\leq$ es relación de orden total sobre $\mathbb{Z}$, respetuosa de la estructura algebraica de $\mathbb{Z}$, es decir,*

1. $x \leq y$, $z \in \mathbb{Z}$ *entonces* $x + z \leq y + z$.

2. $x \leq y$, $0 \leq z$, *entonces* $xz \leq yz$.

Demostración.
- La relación $\leq$ es orden, ya que
  - $x \in \mathbb{Z}$ entonces $x = x$ entonces $x \leq x$. es decir que se cumple la propiedad reflexiva.
  - $x \leq y$, $y \leq x$ entonces $x = y$, ya que cualquier otra alternativa para la pareja x, y es imposible. Luego, se cumple la propiedad antisimétrica.
  - $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$, porque si hay un sigo igual la demostración es trivial. Si los dos signos son $<$ el resultado surge en forma inmediata de la definición.

  Por último, dados a y b enteros, se tiene $a - b \in \mathbb{N}$ o $a - b = 0$ o $b - a \in \mathbb{N}$, por el teorema (6). luego $b < a$ o $a = b$ o $a > b$ y sólo una de estas alternativas es válida. entonces la relación $\leq$ es orden total sobre $\mathbb{Z}$.

- Para la primera parte se tiene que, dado $x < y, z$ entero. Entonces,

  $$(y + z) - (x + z) = y - x \in \mathbb{N}$$

  Luego

  $$x + z \leq y + z$$

  Además, si $x = y$, entonces $x+z = y+z$. O sea, $x \leq y, z$ entero entonces $x+z \leq y+z$.

  Para la segunda parte se tiene que si algunos de los signos $\leq$ es $=$ en la hipótesis, en la conclusión el signo es $=$. Si ambas son desigualdades escritas se tiene: $y-x, z \in \mathbb{N}$, luego $zy - zx = z(y - x) \in \mathbb{N}$ y, por tanto, $zx < zy$.

$\square$

La demostración afirma que si x, y, z son enteros, entonces:

$$x < y \text{ entonces } x + z < y + z$$

$$x = y \text{ entonces } x + z = y + z$$

$$x > y \text{ entonces } x + z > y + z$$

Luego los recíprocos de cada uno de ellos son válidos, es decir, cada implicación es realmente una doble implicación.

Análoga observación rige para el producto, es decir, si x, y son enteros y $z > 0$, entonces

$$x < y \text{ entonces } xz < yz$$

$$x = y \text{ entonces } xz = yz$$

$$x > y \text{ entonces } xz > yz$$

Además valen en $\mathbb{Z}$, propiedades análogas a las de los números naturales tales como:

1. $x \leq y, y < z$ entonces $x < z$
2. $x < y, y \leq z$ entonces $x < z$
3. $x < y, z < u$ entonces $x + z < y + u$
4. $x \leq y, z < u$ entonces $x + z < y + u$
5. $x \leq y, z \leq u$ entonces $x + z \leq y + u$

Finalmente, si se llaman positivos a los enteros mayores que cero y negativos a los menores que 0, se tiene el siguiente teorema;

Teorema 8. *El orden $\leq$ en $\mathbb{Z}$ coincide en $\mathbb{N}$ con el orden $\leq$ definido en la primera parte del teorema (7). Además $\mathbb{N}$ es el conjunto de los enteros positivos.*

Demostración. Sean m, n números naturales:

$m = n$ en los naturales entonces $m = n$ en los enteros

$m < n$ en el conjunto de los números naturales entonces $n = m + p$ algún p natural entonces $n - m = p \in \mathbb{N}$ entonces $m < n$ en $\mathbb{Z}$.

Además $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si $n - 0 = n \in \mathbb{N}$ si, y sólo si $n >$. o sea, $\mathbb{N}$= conjunto de los enteros positivos. □

3. Actividades

3.1. Actividad para introducir el tema de adición de números enteros

CHICAS SUPER - PODEROSAS vs. LOS SUPER - HEROES (Juego tomado de las escondidas Francesas)

Reglas[7]:

1. Cada equipo consta de 16 tarjetas numeradas del cero al quince (El número que tenga la tarjeta representa la cantidad de personajes), de tal manera que las chicas Súper-Poderosas estén identificadas con el color rojo y los Súper-Héroes de color azul.

2. Los equipos se enfrentarán formando parejas (con las tarjetas) de tal manera que el resultado será la cantidad de jugadores que sobren, así

$$\mathbf{8} + 3 = \mathbf{5}$$

ya que

$$\begin{array}{cc} \mathbf{1} \rightarrow & 1 \\ \mathbf{2} \rightarrow & 2 \\ \mathbf{3} \rightarrow & 3 \\ \mathbf{4} & \\ \mathbf{5} & \\ \mathbf{6} & \\ \mathbf{7} & \\ \mathbf{8} & \end{array}$$

Es decir que 3 chicas forman pareja con 3 héroes, pero quedan 5 Súper-Héroes solos. Por tanto el resultado es 5

3. En el caso en que se unan Súper-Poderosas con Súper-Poderosas no se emparejan, sino que el resultado es el total de Súper-Poderosas que conforman el grupo, así:

$$9 + 4 = 13$$

$$3 + 8 = 11$$

4. De la misma manera si se unen Súper-Héroes con Súper-Héroes el resultado es el total de Súper-Héroes que conforman el grupo, o sea:

$$\mathbf{8} + \mathbf{2} = \mathbf{10}$$

[7]LUQUE, Carlos, MORA, Lyda, TORRES Johanna. *Una presentación de los números negativos.* Memorias XIV Encuentro de Geometría y II de Aritmética.

$$\mathbf{15} + \mathbf{1} = \mathbf{16}$$

(Las reglas 4 y 5 se puede resumir así: "cuando tenemos números del mismo equipo y los sumamos, obtenemos números del mismo equipo").

5. Al juntar dos números que representen la misma cantidad pero que son de equipos diferentes se eliminan unos a otros, y se obtiene cero como resultado.

$$\mathbf{5} + 5 = \mathbf{0}$$

$$15 + \mathbf{15} = 0$$

(Está regla se deduce de la número 2 ya que al formar las parejas no sobran personajes de ningún equipo.)

Comencemos a jugar

La primera parte del juego consiste en obtener la menor cantidad de puntos sumando, si aunque suene extraño.

- Se deben formar dos grupos (preferiblemente dos niñas contra dos niños)
- Luego se barajan los dos grupos de cartas, por separado
- Se reparten ocho cartas a cada equipo del respectivo color (niñas representan a las Súper-Poderosas y los niños a los Súper-Héroes)
- A continuación las cartas sobrantes se dejan sobre la mesa, de tal manera que a medida que se arroje una carta se toma una de la mesa (de las que sobraron) pero del equipo contrario.
- Luego se rifa la salida y comienza el juego, por tanto el equipo que sale arroja una carta y el otro le debe responder con otra, la idea es que gana el equipo que al realizar la adición de esos dos números quede sin puntos (Es necesario realizar la adición), es decir no le sobren concursantes.
- A continuación se van colocando los resultados en la siguiente tabla y al final se suman los puntos. Recuerde que gana el equipo que tenga menos puntos.

	Súper-Poderosas	Súper-Héroes
Total		

3.2. Actividad para introducir el tema de sustracción de números enteros

CHICAS SUPER - PODEROSAS vs. LOS SUPER - HEROES

"Los equipos se enfrentarán de tal manera que ganará el que obtenga más tarjetas del equipo contrincante."

Este juego tendrá como base la noción de sustracción de números naturales[8], pero se introducirán nuevas reglas y se tendrán en cuenta las reglas de la batalla No. 1. Reglas:

1. Cada equipo consta de 16 tarjetas numeradas del cero al quince (El número que tenga la tarjeta representa la cantidad de personajes), de tal manera que las chicas Súper-Poderosas estén identificadas con el color rojo y los Súper-Héroes de color azul.

2. Se reparten 16 tarjetas a cada equipo, de tal manera que cada equipo tendrá 8 tarjetas azules y 8 tarjetas rojas (los niños siguen representados por el color azul y las niñas por el color rojo).

3. Cuando un equipo lance una tarjeta, el otro le debe responder con otra y se debe realizar una resta entre éstos, de tal manera que el número de la primer tarjeta sea el minuendo y el de la segunda el sustraendo. Por tanto se de este punto se desprenden nuevas reglas, las cuales llamaremos las reglas de la sustracción:

[8] En los números naturales la adición no está bien definida, por tanto se aclara que la sustracción de número enteros se puede realizar siempre y cuando el minuendo sea mayor que el sustraendo.

- En el caso en que se enfrenten Súper-Poderosas con Súper-Poderosas y la primer tarjeta tiene el número mayor con respecto a la segunda (es decir el minuendo es mayor que el sustraendo) se obtendrá un número que pertenece al equipo de las Súper-Poderosas

$$\mathbf{5 - 2 = 3}$$

$$\mathbf{12 - 10 = 2}$$

$$\mathbf{8 - 1 = 7}$$

- Cuando se enfrenten Súper-Héroes con Súper-Héroes y la primera tarjeta tiene el número mayor con respecto a la segunda (es decir el minuendo es mayor que el sustraendo) se obtendrá un número que pertenece al equipo de los Súper-Héroes

$$13 - 7 = 6$$

$$9 - 0 = 9$$

$$3 - 1 = 2$$

- En el caso en que se enfrenten Súper-Poderosas con Súper-Poderosas y la primer tarjeta tiene el número menor con respecto a la segunda (es decir el minuendo es menor que el sustraendo) se obtendrá un número que pertenece al equipo de los Súper-Héroes. Para observar como se obtiene esta regla se debe llevar a cabo el siguiente algoritmo:

  a) Se toma el valor del sustraendo

  b) Se suma cero, teniendo en cuenta las reglas de la adición y tomando el valor del sustraendo.

  c) Se agrupan[9] los números a conveniencia de tal manera que resulte una adición entre una Súper-Poderosa y un Súper-Héroe.

  d) Se aplican las reglas de la primera batalla.

  Ejemplos:

3 - 5 = 3 - 5 + (5+5) = 3 + 5 + (-5+5) = 3 + 5 + (5 - 5) = 3 + 5 + 0 = 3 + 5 =2	2 - 15 = 2 - 15 + (15+15) = 2 + 15 + (-15+15) = 2 + 15 + (15 - 15) = 2 + 15 + 0 = 2 + 15 = 13
0 - 8 = 0 - 8 + (8+8) = 0 + 8 + (-8+8) = 0 + 8 + (8 - 8) = 0 + 8 + 0 = 0 + 8 = 8	10 - 11 = 10 - 11 + (11+11) = 10 + 11 + (-11+11) = 10 + 11 + (11 - 11) = 10 + 11 + 0 = 10 + 11 = 1

[9]Los estudiantes en clase ya trabajaron las propiedades de los números enteros es decir conocen la propiedad asociativa $(a + b) + c = a + (b + c)$

- En el caso en que se enfrenten Súper-Héroes con Súper-Héroes y la primer tarjeta tiene el número menor con respecto a la segunda (es decir el minuendo es menor que el sustraendo) se obtendrá un número que pertenece al equipo de las Súper-Poderosas. Para observar como se obtiene esta regla se debe llevar a cabo el mismo algoritmo de la regla anterior.

  Ejemplos:

8 - 10 = 8 - 10 + (10+10) = 8 + 10 + (-10+10) = 8 + 10 + (10 - 10) = 8 + 10 + 0 = 8 + 10 = 2	1 - 2 = 1 - 2 + (2 + 2) = 1 + 2 + (-2 + 2) = 1 + 2 + (2 - 2) = 1 + 2 + 0 = 1 + 2 = 1
0 - 5 = 0 - 5 + (5 + 5) = 0 + 5 + (-5 + 5) = 0 + 5 + (5 - 5) = 0 + 5 + 0 = 0 + 5 = 5	4 - 13 = 4 - 13 + (13+13) = 4 + 13 + (-13+13) = 4 + 13 + (13 - 13) = 4 + 13 + 0 = 4 + 13 = 9

- En el enfrentamiento entre las Súper-Poderosas y los Súper-Héroes y en el caso en que la primer tarjeta obtenga el número mayor (Es decir el minuendo es mayor que el sustraendo) se obtendrá como resultado un número que pertenece al equipo se las Súper-Poderosas. Por tanto se debe seguir el siguiente algoritmo:

  a) Se toma el valor del sustraendo

  b) Se suma cero, teniendo en cuenta las reglas de la adición y tomando el valor del sustraendo.

  c) Se agrupan los números a conveniencia de tal manera que resulte una adición entre una Súper-Poderosa y un Súper-Héroe.

  d) Se aplican las reglas del primer juego.

  Ejemplos:

10 - 2 = 10 - 2 + (2 + 2) = 10 + 2 + (2 - 2) = 10 + 2 + 0 = 12	8 - 0 = 8 - 0 + (0 + 0) = 8 + 0 + (0 - 0) = 8 + 0 = 8
16 - 15 = 16 - 15 + (15 + 15) = 16 + 15 + (15 - 15) = 16 + 15 + 0 = 31	5 - 3 = 5 - 3 + (3 + 3) = 5 + 3 + (3 - 3) = 5 + 3 + 0 = 8

- Cuando se enfrenten las Súper-Poderosas y los Súper-Héroes y en el caso en que la primer tarjeta obtenga el número menor (Es decir el minuendo es menor que el sustraendo) se obtendrá como resultado un número que pertenece al equipo se las Súper-Poderosas. Por tanto se deben seguir los pasos del algoritmo anterior:

  Ejemplos:

3 - 12 = 3 - 12 + (12 + 12) = 3 + 12 + (12 - 12) = 3 + 12 + 0 = 15	0 - 1 = 0 - 1 + (1 + 1) = 0 + 1 + (1 - 1) = 0 + 1 + 0 = 1
15 - 16 = 15 - 16 + (16 + 16) = 15 + 16 + (16 - 16) = 15 + 16 + 0 = 31	5 - 8 = 5 - 8 + (8 + 8) = 5 + 8 + (8 - 8) = 5 + 8 + 0 = 13

- Cuando se enfrenten los Súper-Héroes y las Súper-Poderosas y en el caso en que la primer tarjeta obtenga el número mayor (Es decir el minuendo es mayor que el sustraendo) se obtendrá como resultado un número que pertenece al equipo se los Súper-Héroes.

  Ejemplos:

6 - 5 = 6 - 5 + (5 + 5) = 6 + 5 + (5 - 5) = 6 + 5 + 0 = 11	13 - 0 = 13 - 0 + (0 + 0) = 13 + 0 + (0 - 0) = 13
3 - 1 = 3 - 1 + (1 + 1) = 3 + 1 + (1 - 1) = 3 + 1 + 0 = 4	15 - 14 = 15 - 14 + (14 + 14) = 15 + 14 + (14 - 14) = 15 + 14 + 0 = 29

- En el caso en que se enfrenten los Súper-Héroes contra las Súper-Poderosas y si la primer tarjeta tiene el número menor (El minuendo es menor que el sustraendo), se obtendrá como resultado un miembro de los Súper-Héroes.

Ejemplos:

5 - 6 = 5 - 6 + (6 + 6) = 5 + 6 + (6 - 6) = 6 + 5 + 0 = 11	0 - 15 = 0 - 15 + (15 + 15) = 0 + 15 + (15 - 15) = 0 + 15 + 0 = 15
2 - 8 = 2 - 8 + (8 + 8) = 2 + 8 + (8 - 8) = 2 + 8 + 0 = 10	7 - 13 = 7 - 13 + (13 + 13) = 7 + 13 + (13 - 13) = 7 + 13 + 0 = 20

- Finalmente se encuentra el caso en el que se enfrentan los dos equipos y sus tarjetas están representadas por la misma cantidad de participantes, para esto se tiene que el resultado pertenecerá al equipo del minuendo.

  Ejemplos:

4 - 4 = 4 - 4 + (4 +4) = 4 + 4 + (4 - 4) = 4 + 4 + 0 = 16	3 - 3 = 3 - 3 + (3 + 3) = 3 + 3 + (3 - 3) = 3 + 3 + 0 = 6
10 - 10 = 10 - 10 + (10 + 10) = 10 + 10 + (10 + 10) = 10 + 10 + 0 = 20	4 - 4 = 4 - 4 + (4 + 4) = 4 + 4 + (4 + 4) = 4 + 4 + 0 = 16

Comencemos a jugar

La primera parte del juego consiste en obtener la menor cantidad de puntos sumando, si aunque suene extraño.

- Se deben formar dos grupos (preferiblemente dos niñas contra dos niños)
- Luego se barajan los dos grupos de cartas, por separado
- Se reparten ocho cartas a cada equipo del respectivo color (niñas representan a las Súper-Poderosas y los niños a los Súper-Héroes)
- A continuación las cartas sobrantes se dejan sobre la mesa, de tal manera que a medida que se arroje una carta se toma una de la mesa (de las que sobraron) pero del equipo contrario.

- Luego se rifa la salida y comienza el juego, por tanto el equipo que sale arroja una carta y el otro le debe responder con otra, la idea es que gana el equipo que al realizar la adición de esos dos números quede sin puntos (Es necesario realizar la adición), es decir no le sobren concursantes.
- A continuación se van colocando los resultados en la siguiente tabla y al final se suman los puntos. Recuerde que gana el equipo que tenga menos puntos.

	Súper-Poderosas	Súper-Héroes
Total		

3.3. Actividad para introducir el tema de multiplicación de números enteros

Lee[10] con atención la siguiente regla:

"Sólo podemos realizar multiplicaciones si el primer factor es un número que pertenece al conjunto de los números de las chicas Súper poderosas", es decir:

Si tenemos

$\mathbf{2} \times \mathbf{3} = \mathbf{3} + \mathbf{3} = \mathbf{6}$ (Colocamos dos veces el tres y sumamos).
$\mathbf{5} \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$ (Colocamos cinco veces el 3 y sumamos)

Ahora, si tenemos

[10] Para el tema multiplicación de números enteros, no se utilizarán las tarjetas, de los súper héroes y las súper poderosas, por tanto en esta actividad se planteará una guía donde los estudiantes analicen los procesos que generalmente se utilizan el la multiplicación de números naturales, y que se extiende a el conjunto de los enteros, es decir, si tenemos $-a \times b$, ¿tiene sentido decir colocar $-a$ veces b y sumar?; o cuando tenemos $-a \times -b$?.

$3 \times \mathbf{4}$, este producto no cumple la regla, entonces como existe la propiedad conmutativa en la multiplicación que dice: que el orden de los factores no altera el producto, entonces,

$3 \times \mathbf{4} = \mathbf{4} \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$

Miremos otro ejemplo,

$2 \times \mathbf{3} = 3 + 3 = 6$ y $\mathbf{3} \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$.

Ejercicios:

Realiza las siguientes multiplicaciones, explicando el procedimiento:

- $2 \times \mathbf{8} =$
- $\mathbf{3} \times 3 =$
- $\mathbf{5} \times \mathbf{4} =$
- $\mathbf{9} \times 3 =$
- $2 \times \mathbf{7} =$
- $\mathbf{7} \times (4 \times \mathbf{2}) =$

Responde:

- ¿Qué sucede si multiplicamos dos o más números que pertenecen al grupo de las chicas súper poderosas ?
- ¿Qué cree que pasará si realizamos la siguiente multiplicación 5×4? ¿Por qué?
- ¿Qué sucede si multiplicamos números que pertenecen al grupo de las chicas súper poderosas con números que pertenecen al grupo de los Súper héroes? ¿El producto a qué grupo pertenece?

Bibliografía

[1] KLINE, M. *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Vol. II, Alianza Universidad, 1994.

[2] BOYER, C. *Historia de la matemática.*Alianza Universidad, 1987.

[3] BRAVO, R. *Fundamentos de los sistemas numéricos.* México, 1971.

[4] LUQUE, C., MORA, L., TORRES, J. *Una presentación de los números negativos.* Memorias XIV Encuentro de Geometría y II de Aritmética.