LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL APRENDIZAJE ESTADÍSTICO

Blanca Dulce Miriam Benítez Pérez, Alma Alicia Benítez Pérez
Facultad de Ciencias - UNAM México
CECyT 11 "Wilfrido Massieu" - IPN
blanca.benitez@gnp.com.mx, albenper@gmail.com

Resumen. La presente investigación identifica las estrategias que emplea el alumno de nivel superior (22-23 años) de la carrera de Actuaría (Octavo Semestre), en la resolución de un problema de Teoría de Riesgo, el entendimiento de métodos para la identificación de la distribución de la suma de variables aleatorias y el paso de un enfoque determinístico a un enfoque estadístico, para ello se emplearon diversas representaciones en situaciones que abordan tópicos del Cálculo Actuarial. Particularmente se evidencia la identificación y exploración que el alumno desarrolla cuando analiza y discute la representación de la "agregación" de la pérdida en términos de monto y de frecuencia, donde cada pérdida (en este caso 2) es una variable aleatoria. La agregación es la suma de las 2 variables aleatorias, esta expresión es validada y discutida para poder calcular la masa de probabilidad, su densidad y distribución. Los registros y las transcripciones de las clases fueron analizados considerando un modelo particular de la investigación cualitativa, empírico / experimental

Palabras clave: representaciones, contexto, datos, riesgo.

Abstract. This research identifies strategies used by the top-level students (22-23 years) career Actuary (Eighth Semester), the resolution of a problem in Risk Theory, understanding of methods for identifying the distribution of the sum of random variables and the passage of a deterministic approach to a statistical approach to this diverse representations in situations that address topics of Actuarial calculation were used. Particularly the identification and exploration develops when the student analyzes and discusses the representation of the "aggregation" of loss in terms of amount and frequency, where every loss (in this case 2) is a random variable evidence. Aggregation is the sum of two random variables, this expression is validated and discussed in order to calculate the probability mass, density and distribution. The records and transcripts of the classes were analyzed considering a particular model of qualitative research, empirical/ experimental.

Key words: representations, context, data, risk.

Introducción

La enseñanza y aprendizaje de la Estadística en Escuelas de Actuaría es un procesos dirigido a la adquisición por el alumno de conocimientos científicos, prácticos y eficaces dirigidos a la adquisición de conocimientos, habilidades y destrezas prácticas y útiles que se acumulen en sus acervo, de tal suerte les capaciten para afrontar problemas contextualizados en el área de seguros, aspectos de gran relevancia tanto personal como profesional (Campos, 2007). El término "Contexto" en el aprendizaje de la matemática y en particular en el aprendizaje actuarial, está enfocado al desarrollo de las competencias de los alumnos para aplicar las matemáticas escolares a los contextos extra matemáticos de la vida real, ya que consiste en entender con más detalle el entorno de la situación, considerando el importante papel que adquiere el contexto entre un objeto matemático y la práctica en la que dicho objeto es determinante. Bajo esta óptica las situaciones extra matemáticas, que contextualizan un objeto matemático, los "Problemas contextualizados" permiten simular situaciones del mundo real. Para poder tratar con la incertidumbre existente en todo proceso estadístico, es necesario estimar a partir de las muestras un modelo de tipo estadístico que defina el proceso del que proceden los datos, proceso que permite al alumno realizar tareas de interés en Actuaría como para conseguir un mejor entendimiento de los datos disponibles.

Marco teórico

Las investigaciones en educación matemática (Jurdak y Shahin, 2001; Díez, 2004) muestran que las matemáticas informales son dominantes en la resolución de problemas en la vida cotidiana y en el mundo laboral, mientras que las matemáticas más formales son las que predominan en la escuela. Por otro lado en situaciones de la vida real donde los alumnos se encuentran involucrados, se ha observado el empleo de un tipo especial de matemáticas, ajenas a las que estudiaron en la escuela. No obstante, las nuevas tendencias sobre la introducción de problemas en contextualizados en el currículum destaca su participación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, uno de sus principios básicos afirma que para conseguir una actividad matemática significativa hay que partir de la experiencia real de los estudiantes (Freudenthal, 1983). Por lo que los lineamientos Curriculares de las Matemáticas preparan la transición hacia el dominio de las competencias al incorporar una consideración pragmática del conocimiento matemático, en que se emplean conceptos, proposiciones, y estructuras matemáticas como herramientas para ser llevadas a la práctica desarrollando con ello un pensamiento lógico y matemático que será desarrollado dentro y fuera del aula.

Con base a ello se consideran dos elementos básicos: La práctica, que expone los escenarios sociales de relación del estudiante con su entorno, y contribuye a su vida profesional. La formal, constituida por los sistemas matemáticos y sus justificaciones.

En este sentido, en la práctica Actuarial, donde predomina la resolución de problemas relacionados con la identificación y medida de los riesgos, es necesario el diseño de situaciones que permitan al alumno contextualizar y analizar registros y métodos apropiados, así como la asociación de la semántica y el método, la póliza será en adelante un riesgo, la frecuencia un contador de eventos, y reclamo la ocurrencia del evento desfavorable, así, un portafolio (línea de negocios) tiene n-riesgos independientes (póliza), entonces la frecuencia anual de reclamos para este portafolio es la suma de las frecuencias anuales de reclamos para cada póliza individual.

Supongamos que un portafolio tiene n-riesgos (pólizas) con pérdidas con pérdida anuales totales $x_1, x_2, \ldots x_n$ son independientes e idénticamente distribuidas. La pérdida anual agregada para el portafolio completo es representado por la suma $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

El método de las Convoluciones, es utilizado para calcular la distribución de la suma de las variables aleatorias independientes. Es un método recursivo, el cual a continuación se describe:

Si $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ son las funciones de densidad de las variables aleatorias independientes X y Y, entonces la función de densidad de la suma S= X+ Y es referida como la convolución de f_X con f_Y y en algunos casos se denota como $f_X * f_Y(s)$

$$f_X * f_Y(s) = p_r(X + Y = S) = \sum_x P_r(X = x, Y = S - X) \rightarrow caso\ discreto$$

$$= \sum_x P_r(X = x) P_y(Y = s - x) \rightarrow por\ independientes$$

$$= \sum_x f_X(x)\, f_Y\,(s - x)$$

$$f_X * f_Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_Y(s - x)dx \ \rightarrow caso\ continuo$$

En la teoría de "pérdidas" las variables aleatorias puedan tomar solamente valores no-negativas. Esta suma debe ser muy intuitiva, los posibles caminos para obtener X + Y = S consiste en todas las combinaciones donde X está entre 0 y S, y donde Y= S –X

Por inducción se puede demostrar cómo será la suma de n-variables aleatorias independientes, utilizando este método.

En ésta dinámica las representaciones (Duval, 2002), juegan un papel fundamental, ya que potencializa la resolución de problemas en las ciencias y en particular en matemáticas, permitiendo al estudiante dar significado a la información que brinda el problema y operar con ella hasta dar respuesta a la exigencia del mismo. Duval (2000), considera que los sistemas semióticos proveen nuevos significados a la representación parte fundamental en la resolución de problemas, ya que el objeto matemático presenta diversas representaciones producidas por diferentes sistemas semióticos, por lo cual expone la necesidad de enfocar la atención a tres aspectos básicos para lograr la aprehensión conceptual; el objeto, un sistemas semióticos y la composición de signos. Además externa la necesidad de emplear varios sistemas semióticos para la aprehensión del objeto, pero advierte los problemas que origina la coordinación de estos sistemas. Particularmente, Benítez (2009) considera que el estudio de las representaciones son básicas, no obstante puntualiza la importancia de la primera representación con la cual se inicia el proceso de solución, pues de ella depende el desarrollo del problema o bien la deserción del proceso.

El presente trabajo identifica las diferentes estrategias en alumnos universitarios de la carrera de Actuaría, cuando se impulsa la resolución de problemas contextualizados (Actuarial) para generar conocimiento significativo, empleando diversas representaciones en un ambiente franco de discusión académica La situación que se plantea es un problema cotidiano en la ciencia actuarial, para determinar el costo de un seguro (prima), es muy importante conocer el tamaño de las obligaciones contraídas es decir el riesgo cubierto. En este sentido el riesgo se entiende como la esperanza (como uno de los momentos que se estudian) de la pérdida, ésta pérdida se traduce en el análisis cuantitativo y cualitativo de las reclamaciones o siniestros.

Metodología

La experiencia educativa se llevó a cabo con un grupo del nivel superior de la Facultad de Ciencias de la carrera de Actuaría que cursaban el octavo semestre del ciclo escolar con 10 semanas de duración. El grupo se conformó de 20 estudiantes cuyas edades fluctuaban ente 22-23 años, cuyo trabajo en el aula se organizó por pequeños grupos, así como la metodología de la resolución de problemas. A menudo los conceptos se presentaron al inicio de la clase, sobre la base de las ideas previas de los estudiantes, estimulando de manera constante las discusiones que realizaban alrededor de una problemática, fomentando las diversas conjeturas que surgieron y las explicaciones escritas y orales que el alumno emitirá para justificar sus afirmaciones a sus compañeros. De manera paralela se realizaron entrevistas a los estudiantes y se analizaban los temas que se debían incluir durante el desarrollo del programa. Los temas incluían el uso de estrategias y habilidades desarrolladas en los cursos preliminares de probabilidad y cálculo actuarial, en particular lo relativo a la suma de variables aleatorias independientes. Se proporcionaron definiciones tanto matemáticas como del ramo de seguros poniendo énfasis en el desarrollo de habilidades cognitivas que le permitieran aprehensión del objeto de estudio, pues se esperaba que los estudiantes fueran capaces de describir y explicar estos conceptos en situaciones problemas en el ramo de daños (seguros), por lo que el propósito de la experiencia educativa fue proporcionar al estudiante diversas situaciones asociados al estudio de los datos a partir de las muestras para generar un modelo de tipo estadístico que defina el comportamiento de los datos actuariales.

Los instrumentos utilizados para la recolección de datos durante la investigación fueron:

- Reportes escritos elaborados en forma individual.
- Reportes escritos elaborados por cada pareja de estudiantes.
- Grabaciones en audio del trabajo de los estudiantes.
- Reportes elaborados por el profesor-investigador.

Análisis de Datos

Los objetivos que guiaron la investigación fueron:

- ❖ Identificar y organizar la información relevante para resolver un problema.
- ❖ Aplicar modelos destacados, así como de elaboración, construcción y validación de otros nuevos para el tratamiento de problemas novedosos.
- ❖ Desarrollar tratamientos que le permiten analizar e interpretar las representaciones gráficas de datos experimentales.
- ❖ Interpretar de los resultados a partir de los modelos estadísticos considerados.

Como parte de la teoría de riesgo se consideraron los siguientes tópicos a discutir:

a) Ubicar cuándo se trata de un modelo individual de riesgo y cuándo de un modelo colectivo de riesgo.

b) En qué tipo de seguros la variable de pérdida puede ser modelada como un modelo individual o colectivo.

c) Exposición de una serie de ejemplos y contraejemplos para ubicar al seguro de daños y al comportamiento de la variable de pérdida que cuenta el Número de reclamos como un modelo individual de riesgo.

La actividad a desarrollar fue la siguiente:

Sea Pr(N=j-1)=j/10 para j=1, 2, 3, 4 y sea X una distribución de pérdida que toma solo dos valores con probabilidades f(1) = 0.4 y f(2) = 0.6. Encontrar las correspondientes funciones de densidad y distribución de $S = X_1 + X_2$ calculando la convolución. S es la pérdida agregada anual en un modelo individual de riesgo, las distribuciones de N y X son discretas, las siguientes afirmaciones están en el contexto del cálculo actuarial:

Una compañía de seguros existe porque tiene la habilidad de manejar riesgos. En seguros muchos riesgos individuales se combinan en un riesgo agregado que sea manejable y cuya cobertura pueda tener un precio justo para los clientes.

La distribución de N no depende de ninguna manera de los valores de $x_1, x_2, \dots x_{12}$ tenemos:

N: Frecuencia (cuántos) de reclamos, en el ejemplo n=0,1,2,3

X: severidad (monto) de las reclamaciones

S: tiene una distribución compuesta

$\Pr(N = (j = 1) - 1) = 0.1 \dashrightarrow n = 0$

$\Pr(N = (j = 2) - 1) = 0.2 \dashrightarrow n = 1$ y así hasta n=3

La función de densidad de **S** está dada por

$$f_S(x) = p_r(S = x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x) \qquad x = 0, 1, \ldots$$

Desde el punto de vista actuarial, las posibles consecuencias económicas (pérdidas de sufrir un evento no deseado, se cubren a través de una póliza, por lo que existen 2 preguntas de interés:

a) ¿Cuántos pagos de beneficio se realizarán por la ocurrencia de un siniestro?

b) ¿Cuál será el monto de los pagos?

Desde el punto de vista estadístico, la incertidumbre sobre estos aspectos relacionados al riesgo, puede caracterizarse a través de una variable aleatoria

Las estrategias identificadas durante el proceso de solución fueron las siguientes:

- Los equipos efectuaron el cálculo de la convolución utilizando un paquete estadístico libre R,
- Desarrollo el cálculo en una forma intuitiva y muy explícita, este proceso no es común, ya que para estudiantes de este semestre es más común generalizar y/o utilizar otras herramientas.

La actividad se centró en determinar alguna forma de sumar las variables aleatorias independientes que forman parte de un modelo individual de riesgo. La Figura 1 muestra el desarrollo del alumno, el cual consiste primero en ubica la probabilidad que tiene cada variable X y N.

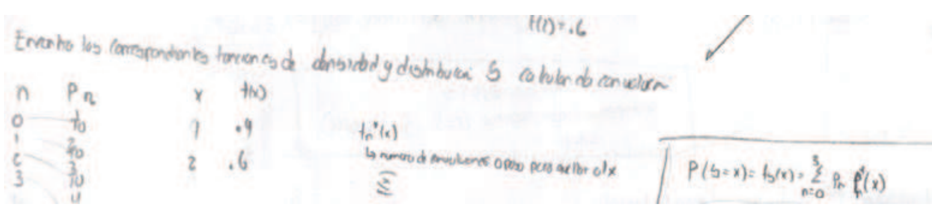

Figura 1. Primer acercamiento al tratamiento de la Información

Posteriormente incorpora las pérdidas a través de la suma desarrollando en forma puntual el cálculo de la convolución para obtener la densidad de “S”, para lo cual construye una tabla de valores al evaluar la función para cada valor de “x”, lo cual se aprecia en la Figura 2.

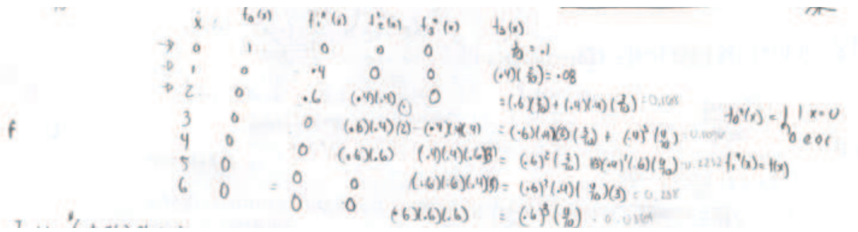

Figura 2. Exploración de la Representación Numérica

Respecto al cálculo de la función de distribución (Ver Figura 3), el alumno desarrolla la acumulación o agregación de probabilidades, utiliza nuevamente la representación numérica

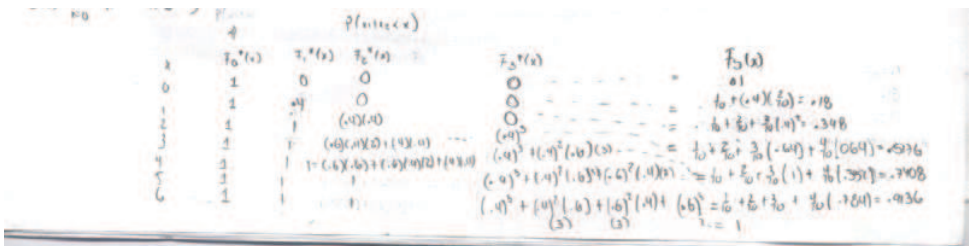

Figura 3. Tratamiento en la Representación Numérica

Para ambos casos, es decir tanto para el cálculo de la densidad como de la distribución, el recurso de la Representación Numérica le permite resolver el cálculo de cada convolución, de manera lógica y ordenada. Aplica paso a paso este método de cálculo, llega sin error a la densidad y distribución correcta. Se asegura del procedimiento desarrollando cada término de la suma.

Durante el proceso de solución de la situación el alumno compara con su compañero de equipo (Ver Figura 4), la cual presenta la simplificación que realiza el alumno, no obstante éste desarrollo le impide concluir o por lo menos no muestra su conclusión en la distribución de los datos.

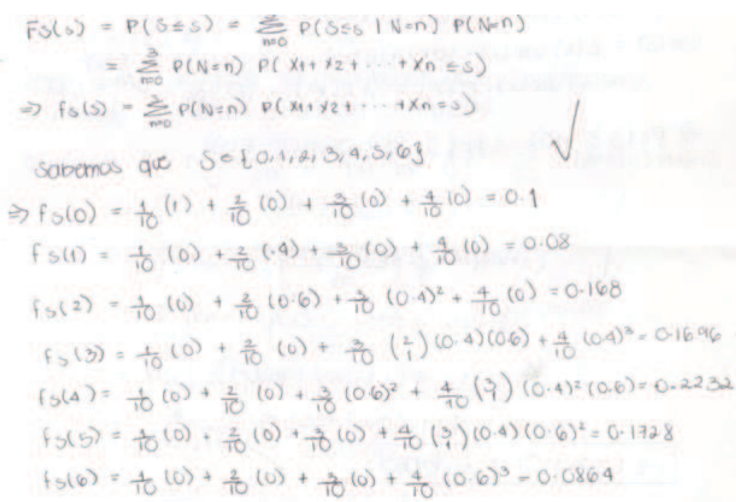

Figura 4.Presentación simplificada de la Distribución de Datos

Las variables aleatorias, "N" y "X" son de tipo discretas, ya que son de conteo, otro recurso no explorado por el alumno y/o por el equipo fue utilizar las fórmulas recursivas, para obtener la función paramétrica de la cual provienen estos datos.

Durante la experiencia el uso de representaciones fue determinante para la resolución del problema, siendo fundamental el pensamiento flexible, pues fue evidente, la tendencia a quedar sujetos a los contextos, en los cuales se presentaban la situación o debido a la familiaridad de los tratamientos en la exploración de las representaciones que los alumnos emplearon.

Hallazgos

La evaluación de la Unidad de Aprendizaje de Cálculo Actuarial del seguro de daños, mediante cuestionarios de tipo test debe cubrir los diferentes aspectos de la Estadística en la Actuaría. Hay que realizar un análisis de los conceptos aplicados correctamente y con mayor frecuencia por los estudiantes.

El diseño de los problemas contextualizados tuvieron como objetivos determinar si el alumno logra discriminar las variables en función de sus características más relevantes y si el alumno comprende los conceptos incluidos.

El uso de diversas representaciones permitió que los alumnos implementaran diversas estrategias para abordar la situación, no obstante como se menciona en el análisis, los estudiantes generalizan de manera inmediata, minimizando la intuición, elemento fundamental para construir conjeturas de la situación.

> Durante el proceso de la resolución de problemas, las representaciones adquieren un papel fundamental, ya que potencializa los diversos caminos para las posibles soluciones, permitiendo al estudiante dar sentido a la información que le brinda el problema y operar con ella hasta dar respuesta a la exigencia del mismo.

Agradecimientos Las autoras agradecen el apoyo otorgado por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, a través de la investigación con número de registro 20130860.

Referencias bibliográficas

Benítez, A. (2009). Estudio de la primera representación gráfica de ecuaciones algebraicas de ecuaciones algebraicas en contexto. *Innovación Educativa 9(46),* 41-50.

Campos, C. (2007). *Aprender practicando*. Recuperado el 09 de abril de 2010 de http://ice.unizar.es/uzinnova/jornadas/pdf/95.pdf

Díez, J. (2004), *L´ensenyament de les mate átiques en l´educació de persones adultes. Un model dialógic*, tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona. Barcelona.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. En F. Hitt (Ed.), *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 311-335): México: Cinvestav-IPN.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical phenomenology of mathematical structures.* The Netherlands: Riedel-kluwer A. P.

Jurdak, M. y Shahin I. (2001). Problem solving activity in the workplace and the school: the case of constructing solids. *Educational Studies in Mathematics Education* 47(3), 297-315.

Mogens, B. (2004). *Teoría de Riesgo I.* Recuperado el 10 de enero de 2010 de http://www.dpye.iimas.unam.mx/bladt/riesgo/notas.pdf

Stuart, A., Harry, H. y Gordon, E. (2004). *Loss Models from data to decisions*. USA: A John Wiley & Sons, INC.