DE LA ARITMÉTICA AL CÁLCULO: LA RAÍZ CUADRADA Y SUS DISFUNCIONES EN EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Maria Patricia Colín Uribe, Gustavo Martínez, Rosa María Farfán
Universidad Autónoma de Guerrero, México
pcolin@cimateuagro.org
Campo de investigación: Pensamiento variacional

RESUMEN

La raíz cuadrada desempeña un papel fundamental en todos los niveles escolares, desde los básicos hasta los universitarios. Concepciones del tipo: a) *la ecuación $x^2=4$ tiene sólo una solución la cual es $x=2$; b) la expresión $\sqrt{4}+\sqrt{9}$ tiene cuatro valores que se obtienen de combinar los resultados* $\sqrt{4}=\pm 2$ *y* $\sqrt{9}=\pm 3$, muestran la complejidad propia de este concepto matemático. La presente investigación se centra en estudiar este concepto desde el punto de vista de la aritmética, posteriormente del álgebra y por ultimo del cálculo, mediante el análisis de libros de texto y la aplicación de un cuestionario desde el nivel básico hasta el superior. Finalmente mostraremos concepciones específicas relativas a la raíz cuadrada que permanecen en los estudiantes.

La presente investigación tiene su marco de referencia en la Matemática Educativa, la cual tiene como uno de sus objetivos el de hacer descripciones del funcionamiento del sistema didáctico: *saber - profesor – alumno*

Nuestro tema surge a partir de las concepciones de estudiantes de diversos niveles educativos sobre la función raíz cuadrada, y, siendo el sistema didáctico nuestro objeto de estudio, reconocemos la importancia del estudio de *fenómenos didácticos*; es decir aquellos fenómenos que suceden al seno del sistema didáctico conformado con la intención comunicar contenidos, métodos y significados matemáticos, de entre los cuales se derivan los *fenómenos ligados a las concepciones y representaciones de los estudiantes*.

Nuestra investigación encuentra su marco de referencia en la línea de investigación denominada desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral y Farfán, 1998); la cuál busca determinar los procesos de construcción social del conocimiento relacionado con la matemática de la variación y el cambio. Dentro de las investigaciones en esta línea se encuentran aquellas que prestan atención a la construcción de la noción de función (Farfán et al., 2002a, 2002b). dentro de éstas se encuentran las investigaciones que elaboran explicaciones que dotan de particularidades a su explicación, especialmente en lo referente a las funciones trascendentes como lo son las funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas.

Con lo anterior podemos decir que la construcción de la noción de función posee particularidades íntimamente relacionadas con el "tipo" de función que se trate. Aquí, nuestro interés por la función raíz cuadrada adquiere pertinencia; pues una de nuestras hipótesis consiste en señalar que ésta posee particularidades específicas que generan fenómenos didácticos específicos.

Nuestro problema de investigación consiste en la descripción de los fenómenos didácticos ligados a las concepciones de los estudiantes respecto a la raíz cuadrada a lo largo de su vida escolar

De acuerdo con nuestra perspectiva sistémica la descripción de las concepciones se encuentran estrechamente ligados a los aspectos escolares y a la naturaleza y significados de la raíz cuadrada, como ejemplo podemos mencionar que en matemáticas la noción de "raíz" posee al menos dos significados explícitos. La primera es usada para señalar cada uno de los valores que puede tener la incógnita de una ecuación. La segunda acepción es usada para señalar a la cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado. En este sentido la radicación (la acción de determinar la cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado) es considerada la operación inversa de la potenciación (la acción de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado). En particular, la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado. El operador tradicional para esta operación es el símbolo $\sqrt[2]{\ }$, pero convencionalmente se utiliza el símbolo $\sqrt{\ }$.

Así, la noción de raíz cuadrada es un operador matemático relacionado con otro operador (elevar al cuadrado) a través de un proceso inverso. De esta manera los significados y funcionalidad de la raíz cuadrada esta fuertemente condicionado a aquellos presentes en el operador elevar al cuadrado y aquellos presentes en los procesos inversos de un operador.

Nuestra investigación consta de:

Análisis epistemológico: ¿Cuál es la naturaleza y significados de la raíz cuadrada?

El objetivo de este análisis es determinar los significados y funcionalidad de la raíz cuadrada desde un punto de vista histórico-epistemológico; estudiamos a grosso modo diferentes épocas rastreando que tipo de construcciones fueron realizadas en relación a la raíz cuadrada en tanto un operador matemático que se desarrolla e incluye en al menos cuatro contextos diferentes: el geométrico, el aritmético, el algebraico y el funcional. En el contexto aritmético el operador raíz cuadrada se aplica a números concretos, en el contexto algebraico es aplicado a números generalizados e incógnitas y en el contexto funcional es aplicado a variables.

En el contexto geométrico, el Libro II, Elementos de Euclides muestra la presencia del una especie de "raíz cuadrada geométrica"; entendido esto como un proceso inverso al de construir un cuadrado de una recta. Cabe notar que este proceso puede ser identificado "cuadrar" una figura. En cuanto a los babilonios, este concepto era utilizado para "cuadrar" rectángulos. En el papiro de Berlín se encuentra registrado un problema que muestra como calculaban raíces cuadradas

En el contexto aritmético no encontramos evidencia en los escritos de Euclides, pero en cuanto a los babilonios, se han encontrado tablillas que contienen tablas de cuadrados de números, e incluso un problema resuelto en el que se muestra un algoritmo para calcular raices cuadradas.

En el contexto algebraico existen diversas interpretaciones que pueden darse a la letra (Rojas et al., 1997; Ursini, 1996), para nuestra investigación nos interesan las siguientes

a) Letra como incógnita. Aquí la letra se piensa como un número particular pero desconocido.

b) Letra como número generalizado. La letra se interpreta como representante de valores o capaz de tomar varios valores más que como un valor especifico.

En términos bastante resumidos, encontramos información en el Libro primero de arithemetica algebratica de Marco Aurel (publicado en Valencia en 1552) y al que hace referencia (Melvilla, 1993) y al de Chuquet en *La triparty en la Science des Nombres* (documento fechado en 1484) del cual hace referencia (Paradís, 1993):

Por ultimo, en el contexto funcional, encontramos obras de finales de siglo XVI en donde no es posible encontrar curvas con ecuaciones del tipo $y = \sqrt{x}$, pero si la curvas con ecuaciones del tipo $y^2 = x$. Esto señala que el operador raíz cuadrada no es necesario en contexto en donde las variables no guardan mingo jerarquía una respecto a otra

Análisis didáctico: ¿Cuáles son las costumbres escolares al momento de tratar la raíz cuadrada?. En esta parte realizamos una revisión bibliográfica de los libros de texto de matemáticas que se utilizan en los diferentes niveles educativos mexicanos. Encontramos que el operador raíz cuadrada es oficialmente introducido en el primer año de Educación Secundaria. En este grado, es utilizado implícitamente como la operación inversa de elevar al cuadrado números naturales, es decir, únicamente se obtienen raíces cuadradas exactas a través de tablas de cuadrados que los estudiantes han obtenido previamente. El tema es nuevamente tratado hasta tercer año, con el cálculo de raíces cuadradas por diversos métodos (algoritmo tradicional o método de la "casita", babilonio, gráfico, de newton y aproximación). Aquí, la raíz cuadrada de un número puede ya tener parte decimal. En este grado escolar, la raíz cuadrada es utilizada en diversos temas:

la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado

el cálculo de longitudes y distancias entre dos puntos del plano cartesiano,

el cálculo de uno de los catetos de un triangulo rectángulo

el cálculo de la diagonal de cubos y paralelepípedos.

En general, los libros de texto autorizados por la SEP para la Escuela Secundaria definen al proceso de calcular raíces cuadradas como

"La raíz cuadrada de un numero a (donde a>0) es otro numero b tal que al elevarlo al cuadrado sea igual a a , es decir, b es la raíz cuadrada de a si $b^2=a$ "

En cuanto a los libros de texto utilizados para los niveles medio superior y superior, encontramos que éstos manejan la noción de raíz cuadrada en tres contextos, el algebraico, el aritmético y el funcional.

Análisis cognitivo: ¿Qué concepciones poseen los estudiantes respecto a la raíz cuadrada? Para contestar esta pregunta utilizamos un cuestionario el cual aplicamos a estudiantes de distintos niveles educativos: Educación Secundaria, Educación media superior y superior.

El cuestionario utilizado constó de 16 preguntas relacionadas al concepto matemático raíz cuadrada. Las concepciones ligadas a cada una de las preguntas del cuestionario son las siguientes:

La raíz cuadrada es una operación básica.

Entenderemos por operación básica de la aritmética a aquella que aparece con más frecuencia en los cálculos matemáticos cotidianos que realizamos.

Significado del operador $\sqrt{\ }$

Definimos al operador raíz cuadrada como el proceso que permite encontrar números tales que al multiplicarlos por si mismos nos den el número que se encuentra dentro del operador

Existencia de raíces cuadradas negativas

Un número tiene 2 raíces cuadradas, de las cuales una es negativa

Si $a^2 = b \quad entonces \quad a = \sqrt{b}$

Un numero tiene 2 raíces cuadradas, del mismo valor pero de signo contrario. La expresión $\sqrt{b}$ representará la raíz aritmética o principal[1]

[1] Entendemos por raíz principal o aritmética a la raíz positiva

$\sqrt{a} = \pm b$

Un numero tiene 2 raíces cuadradas, del mismo valor pero de signo contrario.

$\sqrt{a^2} = a$

La radicación es la operación inversa de la potenciación

$\sqrt[2]{a} = \frac{a}{2}$

La expresión $\sqrt[n]{a}$ representa una división

Si $a = b \quad entonces \quad \sqrt{a} = \sqrt{b}$

Se aplica la propiedad *"radicalizadora"* de la igualdad

- ***Las leyes de los exponentes son válidas***

Se cumplen que $(a^{\frac{1}{2}})^2 = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a$

Conclusiones: Con los resultados obtenidos por la presente investigación, mostramos que las concepciones que tienen los estudiantes con respecto a la noción de raíz cuadrada y que se presentan desde los niveles básicos de enseñanza hasta los superiores son las siguientes:

La raíz cuadrada NO es una operación básica, puesto que no aparece en los cálculos cotidianos

El operador raíz cuadrada es proceso que permite encontrar números tales que al multiplicarlos por si mismos nos den el número que se encuentra dentro del operador, pero los números negativos NO SON CONSIDERADOS como raíces cuadradas independientes

La ecuación $x^2 - 4 = 0$ tiene una sola solución, puesto que solo se toman en cuanta las raíces principales

La radicación es la operación inversa de la potenciación, y podemos extenderla a todos los reales, por lo cual es valido lo siguiente $\sqrt{a^2} = a$

La expresión $\sqrt[2]{a}$ representa una división en la cual voy a encontrar la mitad del numero dentro del operador

Las propiedades de la igualdad se extienden a los radicales, por lo cual es válido que ***Si*** $a = b \quad entonces \quad \sqrt{a} = \sqrt{b}$

Las leyes de los exponentes se cumplen: $(a^{\frac{1}{2}})^2 = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a$ para cualquier valor de ***a***

Bibliografía

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales"*. 42, 353-369.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Martínez-Sierra, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 5(1) 45-78.

Euclides (2002). *Los elementos de Euclides*. Versión electrónica disponible en http://www.xtec.es/~jdomen28/indiceeuclides.htm#libroVII.
Rojas, P. et al. (1997). La variable matemática como problema puntual. En *La transición Aritmética al Álgebra (Capítulo 39, pp. 30-66)*. Colombia: COLCIENCIAS y Universidad Distrital Francisco José Caldas (Santa Fe de Bogotá)

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas. *Educación matemática. 8*(2), 33-40.

Paradís, J. (1993). La triparty en la Science des Nombres de Nicolas Cehuquet. En T.

Rojano & L. Puig (Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.* (pp. 31-63). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Meavilla, V. (1993). Una aproximación al "Libro primero de arithmetica algebratica" de Marco Aurel. En T. Rojano & L. Puig (Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.* (pp. 65-95). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.