PROCESOS DE RESIGNIFICIACIÓN DEL VALOR NUMÉRICO DE LA FUNCIÓN DERIVADA SEGUNDA: UN ESTUDIO EN EL SISTEMA ESCOLAR URUGUAYO

Ricardo Cantoral; Yacir Testa

rcantor@cinvestav.mx; milefede@adinet.com.uy

Cinvestav – México; I.P.A. – Uruguay

Campo de Investigación: Pensamiento Matemático Avanzado-Pensamiento Variascional- Socioepistemología; Nivel Educativo: Superior; Metodología: 40

Resumen

Reportamos los resultados de una investigación desarrollada con estudiantes uruguayos respecto del significado gráfico que asignan al valor numérico de la función derivada segunda, y de cómo influye y se desarrolla su Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) al trabajar en actividades que ponen en juego dicho valor numérico. Mediante un análisis del contenido temático de los cursos, y del enfoque curricular, de la bibliografía empleada y de los antecedentes de investigación, observamos que se significa gráficamente al signo del valor numérico de la función derivada segunda, asociándolo a concavidad positiva o negativa, pero no así al valor numérico que esta tieneí. La secuencia didáctica que planteamos en este estudio, enfrentó al estudiante al reconocimiento de las limitaciones de la significación gráfica del signo de $f''(a)$ y generó una puesta en juego y un desarrollo de su PyLV al significar gráficamente al valor numérico de $f''(a)$.

Introducción

A partir del análisis profundo tanto del currículo como de la forma en que se trabaja el concepto matemático "**derivada**" en los cursos y en los libros de textos, observamos que los estudiantes uruguayos son guiados a trabajar con dicho concepto, a conocer su definición, pero únicamente con el enfoque que indica el currículo, sin poner en primer lugar una enseñanza, en el sentido de Cantoral (2000), que favorezca las distintas miradas del concepto, sus relaciones con conceptos o imágenes ya adquiridas de éstos, lo que favorecería, en nuestra opinión, la formación de una fuerte estructura conceptual.

Dada la importancia que tiene en los currículos el tema "derivadas" y sus indiscutidas aplicaciones dentro y fuera de las matemáticas, es que creemos que su enseñanza no puede descansar en que los estudiantes puedan "repetir" su definición o que apliquen correctamente ciertas reglas para "derivar". A partir del análisis de los currículos se deduce que el objetivo principal de la enseñanza de este tema es realizar correctamente el estudio analítico y la representación gráfica de una función (EARG) donde, en forma mecánica se determinan las funciones derivada primera y segunda. En este sentido observamos dos aspectos que generaron nuestra investigación; por un lado este tipo de trabajo no implica que el estudiante ponga en juego su *pensamiento y lenguaje variacional*, por lo tanto no posibilita el desarrollo de este tipo de pensamiento fundamental en el entendimiento relacional del tema, por otro lado el valor numérico de la función derivada primera es significado gráficamente, relacionándolo con el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico en el punto en cuestión, pero el valor numérico de la función derivada segunda no entra en juego en el EARG, si es distinto de cero, y solo se significa gráficamente a su signo, relacionándolo a la concavidad de la función.

Esta investigación, como otras que también forman parte de la línea de investigación *Pensamiento y Lenguaje Variaciona*l (PyLV), busca determinar elementos que no están presentes en el currículo, que permitan enriquecer el concepto "derivada" así como comprender este concepto desde el punto de vista del estudiante. Nuestro grupo considera imprescindible el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes para trabajar en un ambiente enriquecido los temas de cálculo; y además, en cuanto a este tema específico, distintas investigaciones; entre ellas González, R. (1999), Valero, M. (2000); han mostrado que la noción de derivada se estabiliza en el pensamiento de los estudiantes sólo hasta que la noción de derivada sucesiva aparece y se establece un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas. A partir de esta base creemos que se favorecerá este proceso si el estudiante enriquece el concepto de valor numérico de la función derivada segunda con aspectos gráficos y variacionales; es por ello que en este trabajo investigamos **cuál es el significado gráfico que asignan los estudiantes uruguayos al valor numérico de la función derivada segunda y cómo influye su PyLV al trabajar en actividades que ponen en juego estos aspectos.**

La problemática

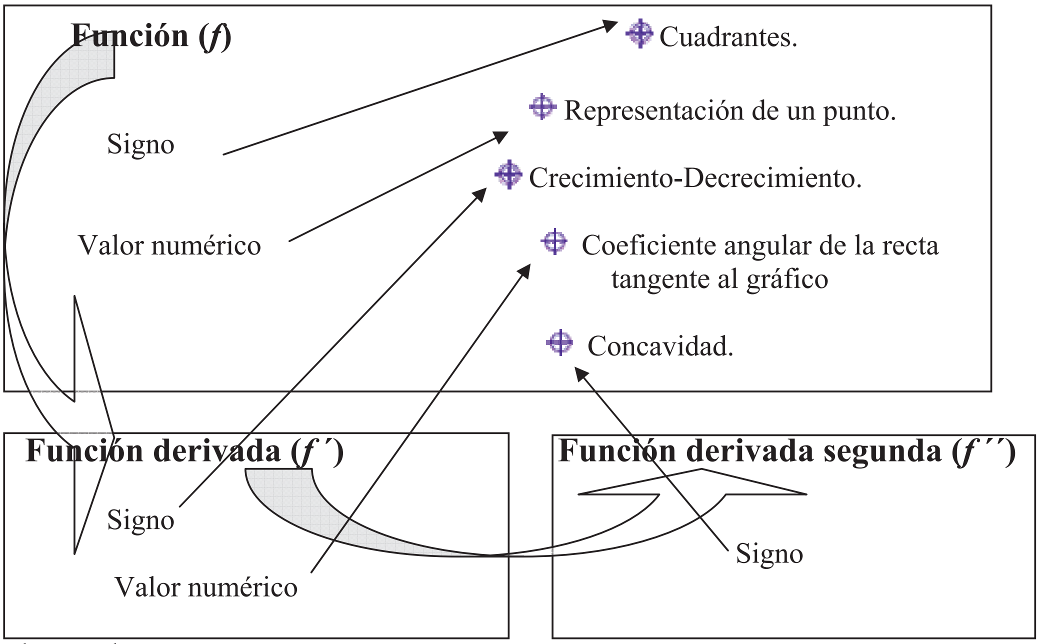
En los cursos de Análisis Matemático de secundaria en Uruguay (estudiantes de 17 años aprox.) se trabajan los tópicos matemáticos: función; valor numérico; función derivada primera; signo de la función inicial, signo de la función derivada primera, valor numérico de la función inicial, valor numérico de la función derivada primera, función derivada segunda, signo de la función derivada segunda. Casi todos estos tópicos son significados gráficamente:

- el signo de la función inicial f con el cuadrante en el cual estará contenida.
- el valor numérico de la función f en $x=a$ con el punto de coordenadas $(a, f(a))$.
- el signo de la función derivada primera f' con el crecimiento-decrecimiento de la función f.
- el valor numérico de la función f' con el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico de la función f en el punto en cuestión.
- signo de la función derivada segunda f'' con la concavidad (positiva o negativa) de la función f.

Pero no hemos encontrado muestras de que se signifique gráficamente el <u>valor numérico</u> de la función derivada segunda.

Estos cursos tienen como objetivo principal el estudio analítico y la representación gráfica de una función dada (f), las funciones derivadas de ésta (función derivada primera y función derivada segunda) solo son estudiadas como herramientas para poder graficar la función dada, pero su vinculación es solo mediante algoritmos matemáticos en una de las vías, ($f \rightarrow f' \rightarrow f''$), y mediante representaciones geométricas en la otra vía $(f'' \rightarrow f' \rightarrow f)$.

La anterior situación la podemos esquematizar en:



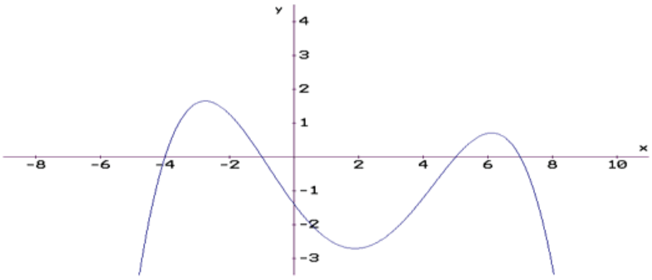
Podemos observar que:

- Las vinculaciones que llamaremos "de bajada" están dadas solamente son por algoritmos o técnicas de derivación y las que llamamos "de subida" sólo brindan información gráfica, o sea, las flechas curvas muestran una relación, exclusivamente algorítmica, entre f y $f\,'$ y entre $f\,'$ y $f\,''$, y las otras flechas muestran una vinculación entre aspectos de las funciones derivadas de la inicial ($f\,'$y $f\,''$) y aspectos gráficos de la función inicial (f).
- No se establecen relaciones de "subida" entre la función derivada segunda y la función derivada primera.
- No está presente el valor numérico de la función derivada segunda, por lo tanto es imposible, en este marco, poder establecer relaciones entre este valor y la función dada, o entre este valor y la función derivada primera.
- No están presentes ningunas de las funciones derivadas de orden mayor que dos.
- No se establecen relaciones "de bajada" entre aspectos de la función, función inicial o función derivada primera (f y $f\,'$), con las funciones derivadas sucesivas de ellas a no ser las de orden siguiente ($f\,'$ y $f\,''$).

Nuestra investigación

En esta investigación confirmamos nuestra creencia inicial de que en la estructura conceptual asociada al concepto "derivada" de los estudiantes no estarían presentes significados gráficos del valor numérico de la función derivada segunda, y que el trabajar en la secuencia que creamos posibilitaría que los estudiantes reflexionaran sobre este tópico, que llevaran a un nivel conciente las limitaciones de la estructura conceptual construida en el transcurso de su escolarización y generaran significados gráficos del valor numérico de la función derivada segunda. La secuencia, especialmente desarrollada para esta investigación, enfrenó a los estudiantes a aspectos del concepto nunca antes tenidos en cuenta, tal vez por no estar presentes en forma específica en los currículos, y permitió que ellos descubrieran y propusieran formas de solucionar la problemática planteada. A partir del análisis que hemos realizado de distintos elementos creemos que los estudiantes nunca se habían visto enfrentados a actividades que pusieran en juego el significado gráfico de la función derivada segunda, de donde las actividades propuestas fueron para ellos realmente situaciones problemas.

Un ejemplo de las actividades que planteamos en nuestra investigación es el siguiente:
Dado el gráfico de una función f:



Indica cuál afirmación es seguramente falsa, cuál es seguramente verdadera, cuál podría ser verdadera, en cual no lo puedes contestar. Explica ampliamente tu respuesta.

a) $f''(-3.8) = 1$
b) $f''(1) = -2.5$
c) $f''(5) = -3$
d) $f''(1) < f''(8)$
e) $f''(-5) < f''(-3.8)$
f) $f''(2) < f''(3)$

En las partes a), b) y d) se intenta establecer si el estudiante diferencia, a partir del gráfico, cuándo la derivada segunda en cierto real es positiva y cuándo negativa. Para dar respuestas a estas preguntas sólo se requiere haber significado correctamente el signo del valor numérico de la función derivada segunda. En cambio en los demás ítems el estudiante **debe significar el valor numérico de la función derivada segunda en un real en contexto gráfico**, ya no se compara a este real sólo con cero, ya no es suficiente haber asignado “concavidad positiva”, o negativa. Nos interesa ahora investigar qué información brinda al estudiante sobre el gráfico de una función f que $f''(5) = -3$ o que $f''(5) = -4$, así como comparar los gráficos de la función f con $f''(a) > f''(b)$ en el caso que ambos reales tengan el mismo signo. En otras palabras nos interesa observar cómo diferencian los estudiantes en el gráfico de una función la situación de que en dos reales la derivada segunda sea del mismo signo pero con distintos valores numéricos, $f''(3) = 5$ y $f''(4) = 9$ *les indica que en ambos reales la concavidad de la función f será positiva, pero, ¿cuál será el significado gráfico que asignarán los estudiantes a la diferencia en los valores numéricos?*

Algunos resultados

En una primer instancia el significado gráfico que asignan los estudiantes a la expresión $f''(a) = b$ es el previsto, si $b>0$ la función f presenta concavidad positiva en $x=a$, y si $b<0$ la concavidad de f es negativa en $x=a$, como podemos observar **no se asigna un significado al valor numérico en sí de $f''(a)$ sino solo a su signo**. A medida que los estudiantes avanzaban en las actividades reconocen que asociar al real $f''(a)$ los conceptos “concavidad positiva” o “concavidad negativa” no es suficiente ni para determinar algunos aspectos gráficos de funciones en las cuales los valores numéricos de sus funciones derivadas segundas son distintos, pero de igual signo, aunque haya una relación entre este concepto y el signo de dichas funciones derivadas segundas; ni para comparar los valores numéricos de las funciones derivadas segundas en un real en el cual los gráficos de las funciones iniciales tienen concavidades del mismo signo. De la toma de conciencia de estas limitaciones comienzan a surgir conjeturas que intentan dar respuesta a estas nuevas situaciones.

Algunas de las conjeturas generadas por los estudiantes surgen del análisis de familias de parábolas y de funciones. Una de las familias de parábolas que analizan es la que surge a partir de la expresión de la forma $f(x)=ax^2$, el cual permitió a los estudiantes observar similitudes y diferencias en el comportamiento de sus gráficos al variar el coeficiente principal y a partir de allí generar conjeturas sobre el significado gráfico del valor numérico de la función derivada segunda. A partir de este análisis surge una relación "por dentro", o más "apretada", que será base de sus conjeturas. Si los estudiantes hubieran asumido cada parábola como un gráfico independiente, con características propias, y no como un gráfico perteneciente a una familia en la cual las variaciones determinan las similitudes y diferencias de los elementos de dicha familia, tal vez no hubieran podido generar herramientas para significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda.

El pensamiento y lenguaje variacional desarrollado por los estudiantes, evidenciado en el análisis de sus diálogos, les ha brindado herramientas para, entre otros aspectos, reconocer variaciones referidas a elementos que a su vez varían, estudiar los elementos constantes y variables de ciertas familias de gráficos, establecer relaciones entre la variación de una función y las funciones derivadas sucesivas, hacer presente la concepción de los elementos del dominio como elementos fijos e independientes entre ellos, a los cuales se les aplica un proceso, y de elementos que se pueden relacionar por ciertas variaciones, y además, comunicar oralmente y gestualmente sus conjeturas y argumentos.

El desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional de los estudiantes permitió enriquecer el significado gráfico asociado al valor numérico de la función derivada segunda. Se deduce de nuestra investigación que el PyLV desarrollado por los estudiantes les brindó elementos para significar de manera gráfica a la función derivada segunda no solo en términos de concavidad positiva o negativa. Para establecer una relación entre el signo de $f''(a)$ y el signo de la concavidad de f en $x=a$ no se necesita poner en juego un PyLV, dado que puede concebirse la gráfica de f como un objeto estático del cual sólo se tendrá en cuenta su concavidad en un entorno de a. En cambio el significado que han asignado los estudiantes a $f''(a)$ al enfrentarse a la secuencia está basado en reconocer algunos de los aspectos variables y otros constantes de dicho gráfico; por ejemplo la variación de los coeficientes angulares de las rectas tangentes al gráfico de la función f en un entorno de a. Además se deduce que reconocer aspectos constantes y variables en sus análisis les permitió significar gráficamente aspectos gráficos de las funciones derivadas haciendo una ruptura entre la asociación derivada-fórmula pasando a considerar una asociación derivada-variación. Esta nueva concepción de la derivada rompe con la concepción curricular que comúnmente se realiza en los cursos, permitiendo resignificarla enriqueciéndola, "en las prácticas humanas, en las disciplinas de referencia, la derivada no se entiende exclusivamente como el límite del cociente incremental, sino como una forma de estudiar la evolución de un proceso de cambio, de crecimiento o de decrecimiento". (Cantoral, 2000). Por lo tanto el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional ha permitiendo en estas actividades enriquecer los significados de conceptos que ya conocían y significar nuevos.

Algunas recomendaciones didácticas

Es la creencia de nuestro grupo de investigación, y la nuestra propia, que "el aprendizaje se basa en la actividad creadora y en el descubrimiento de las nociones por parte del alumno, que sea él quien descubra y proponga formas de resolver los problemas" (Cantoral, et al., 2000). Por lo tanto creemos que esta investigación brinda herramientas para generar nuevas actividades que tengan por objetivo que el estudiante signifique gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda en un ambiente de descubrimiento, argumentaciones, confrontaciones. Esto permitirá, en forma específica, que el estudiante enriquezca el concepto derivada segunda al romper las dos asociaciones fundamentales que hemos detectado: "derivada segunda-fórmula" y "derivada segunda–estudio de signo de concavidad", al resignificar el concepto permitiendo una visión gráfica de él, y además llevará a enriquecer el propio concepto "derivada" al realizarse una mirada del concepto desde una óptica no tradicional permitiendo generar una significación gráfica del valor numérico de la función derivada segunda, de la cual hemos dado muestras en nuestra investigación que no está presente en los cursos ni en los textos analizados. Además creemos que esta nueva visión favorecerá la significación de la función derivada tercera y de las derivadas consecutivas. En forma general permitirá que el estudiante desarrolle su pensamiento y lenguaje variacional, que desarrolle su capacidad de visualizar en matemáticas, y brinda la oportunidad de discutir con compañeros, conjeturar, argumentar, refutar, lo cual ayudará a que las ideas evolucionen hacia ideas más robustas matemáticamente.

Referencias bibliográficas

Balparda, O. y Lois, L. (1993). *Matemáticas Sexto-Para el trabajo en clase*. Ediciones de la Plaza, Montevideo Uruguay.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis.* En Cantoral, R. *El futuro del cálculo infinitesimal.* Grupo Editorial Iberoamericana, México. Pp. 69-91.

Cantoral, R. et al (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Editorial Trillas. México.

Dolores, C. (1989). *Algunos obstáculos epistemológicos relativos a la noción de derivada.* Memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, celebrada en San José de Costa Rica en julio de 1989.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de maestría. Cinvestav. México

Sipvak, M. (1992). *Calculus*. Editorial Reverté. Barcelona, España. Pp. 274, 197- 283, 302-313.

Valero, M. (2000). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas*. Tesis de maestría. ITESM. México.