

# ¿CÓMO TRANSCRIBEN LOS ALUMNOS EN SUS CUADERNOS LAS REGLAS Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN? UN ESTUDIO EN TRES AULAS DE BACHILLERATO

**How do the students write out derivative rules and techniques in your student notebooks? A study in three classrooms of high school students**

Matías Arce, Laura Conejo, Tomás Ortega

Universidad de Valladolid

## Resumen

*En este trabajo presentamos un estudio exploratorio de tipo descriptivo-interpretativo, llevado a cabo en tres aulas de 1º de Bachillerato. En él se hace un análisis de las transcripciones realizadas por los alumnos en sus cuadernos en la presentación del tópico de reglas y técnicas de derivación por parte de los docentes. El marco utilizado es el análisis de contenido (Bardin, 1996; Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008). Hemos detectado diferentes comportamientos en el alumnado, destacando varios perfiles de alumnos selectivos al tomar las reglas de derivación y sus ejemplos ilustrativos. Además, los porcentajes de transcripción de estos elementos han sido mucho mayores cuando el enfoque del profesor se ha centrado, exclusivamente, en la aplicación práctica de reglas; siendo más variables cuando este enfoque se comparte con la fundamentación de las mismas.*

**Palabras clave:** Reglas de derivación, cuadernos de los alumnos, análisis de contenido, Bachillerato.

## Abstract

*In this paper we present an exploratory and interpretative descriptive study that was carried out in three classrooms of high school students (16-17 years). We analyzed the transcriptions that the students have registered in their student notebooks from the theoretical content presented by teachers in the topic of derivative rules and techniques. The framework was the content analysis (Bardin, 1996; Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008). We detected different behaviors in the students: there were some profiles of selective students in the transcription of derivative rules and their illustrative examples. Besides, the percentage of transcription of these elements has been much greater when the focus of the teacher was, exclusively, the practical application of rules. This percentage has been more variable when this focus is shared with the proof of the rules.*

**Keywords:** Derivative rules, student notebooks, content analysis, high school students.

## INTRODUCCIÓN. ANTECEDENTES

Este estudio se enmarca en un proyecto de investigación que se está desarrollando en la Universidad de Valladolid sobre los cuadernos de matemáticas (de ahora en adelante, CM) de los alumnos en 1º de Bachillerato, entendidos como el medio en el cual el alumno toma notas o apuntes durante el desarrollo de las clases, recopila material y recoge actividades, bien sean intentadas por él o transcritas de su corrección en el aula. Partiendo de un trabajo inicial, que puede leerse en Arce (2013, 2014), la investigación está centrada en varios de los tópicos de Análisis Matemático de Bachillerato (funciones, límites y derivadas) y sus objetivos principales son la detección de perfiles de elaboración y utilización del CM en el alumnado participante y sus posibles relaciones con el rendimiento académico en la asignatura. En el trabajo que aquí presentamos nos centramos específicamente en la detección de perfiles de elaboración del CM en uno de los tópicos en concreto, la derivada, y, en particular, en las reglas y técnicas de derivación.

Arce, M., Conejo, L., Ortega, T. (2014). ¿Cómo transcriben los alumnos en sus cuadernos las reglas y técnicas de derivación? Un estudio en tres aulas de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 137-146). Salamanca: SEIEM.

Múltiples investigaciones atestiguan la dificultad relacionada con la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial e integral y, en particular, de la derivada. Sánchez-Matamoras, García y Llinares (2008) realizan una exhaustiva revisión de las investigaciones realizadas en Educación Matemática sobre la comprensión de la noción de derivada, desde diferentes perspectivas teóricas. Estos autores indican la necesidad de la integración, en la presentación de esta noción, de una perspectiva tanto analítica (límite del cociente incremental) como gráfica (pendiente de la recta tangente a una curva), su carácter puntual (derivada en un punto) o global (función derivada), el operador derivada y la regla de la cadena. Algunos aspectos, como la relación entre la derivada en un punto y la función derivada, suelen pasar desapercibidos en la docencia, y son objetos cuya diferenciación es confusa o no perceptible, incluso entre profesores de matemáticas (Badillo, Azcárate y Font, 2011).

En relación a las reglas y técnicas de derivación, Godino, Contreras y Font (2006) realizan un análisis de una sesión de clase centrada en este tópico utilizando diferentes nociones teóricas dentro del marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS). Fonseca y Gascón (2002) indican que, generalmente, su desarrollo en las aulas de Secundaria adolece de un carácter integrador. Estos autores construyen una *organización matemática local* (en términos de Chevallard, 1999, citado en Fonseca y Gascón) que busca integrar estas reglas y técnicas y dar respuesta a cuestiones problemáticas que no pueden responderse por separado. No obstante, el papel esencial que tiene en su enfoque la aplicación de logaritmos neperianos y la técnica de derivación logarítmica, hace que aparezca un problema añadido a tratar en la derivación cuando la función es negativa o en los cambios de signo.

La regla de la cadena ha sido la regla estudiada con mayor profundidad. Destacamos el trabajo de Clark et al. (1997), que pone de manifiesto la existencia de varios niveles en la comprensión de la regla: desde la existencia de una “colección de casos especiales” (incluso de la propia regla) sin establecer relaciones ni conexiones entre ellas, hasta la construcción de la estructura subyacente a todas ellas, pasando de una “lista” de reglas a una única, válida para cualquier composición.

Font (2000, 2005) interpreta el cálculo de la derivada de una función como una práctica en la que intervienen tres subprocesos: las traducciones y conversiones entre diferentes representaciones, tanto de  $f(x)$  como de  $f'(x)$ , y el paso de una representación de  $f$  a una de  $f'$ . Debido a la complicación que supone en muchas funciones el cálculo de la derivada a partir del límite de la tasa de variación media, este autor propone, aunque se pierda rigor en el cálculo, la utilización de una mayor variedad de representaciones (simbólica, gráfica, tablas de valores, incluso verbal) para  $f$  y  $f'$  en la realización de estos cálculos con los alumnos, con ayuda de la tecnología.

No obstante, a pesar de tantos trabajos de investigación, no hemos encontrado estudios relacionados con la forma en que estos elementos son transcritos por parte de los estudiantes.

### **PLANTEAMIENTO DEL TRABAJO: PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN**

El tema de derivadas fue desarrollado en tres de las aulas de 1º de Bachillerato que participan en nuestra investigación global sobre los CM. Nos hemos centrado para este trabajo en una parte de ese tema, las reglas y técnicas de derivación; en particular, en su desarrollo teórico en las aulas. En las tres aulas, la metodología de los docentes fue similar (más información en el apartado sobre el contexto del estudio) con una presentación de los contenidos por parte del profesor. Sin embargo, se observaron diferencias importantes entre los contenidos desarrollados, que nos llevaron a plantearnos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué semejanzas y diferencias pueden detectarse en el contenido de reglas y técnicas de derivación impartido por los docentes de estas tres aulas?
- ¿Qué comportamientos se detectan en el alumnado al transcribir este contenido en sus CM?
- ¿Qué relaciones pueden existir entre los comportamientos detectados en el alumnado y los contenidos desarrollados por sus profesores sobre reglas y técnicas de derivación?

## MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO DE ANÁLISIS

Inspirándonos en Courant y Robbins (1964), que hablan de la *técnica de derivación* indicando que “se puede derivar casi automáticamente cualquier función de las que normalmente aparecen en matemáticas, una vez dominadas unas pocas reglas muy sencillas y aprendido a reconocer su aplicabilidad” (p. 437), llamaremos *reglas de derivación* a las que pueden obtenerse aplicando la definición de derivada directamente (reglas para las funciones elementales, operaciones con funciones). Llamaremos *técnica de derivación* a la aplicación de un algoritmo, compuesto por una serie de reglas y transformaciones, que nos permite obtener la derivada de funciones con una estructura o propiedad determinada. Ejemplos son la técnica de derivación logarítmica (para derivar funciones de la forma  $f(x)^{g(x)}$ ), o la técnica de derivación de la función recíproca<sup>1</sup>. No obstante, estos conceptos están relacionados, ya que las funciones pueden ser derivadas de diferentes maneras y obtenerse reglas de derivación a partir de diferentes reglas y técnicas.

Rico y colaboradores (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008; Picado y Rico, 2011; Rico, 2012; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013) adaptan la terna establecida por Frege (1998, citado en Rico, 2012) de signo, sentido y referencia de un término, y establecen tres dimensiones o componentes de análisis para poder analizar los significados de los contenidos de las matemáticas escolares:

- La *estructura conceptual*, sistema organizado de conceptos y de procedimientos, junto con sus relaciones, que dan lugar a la estructura matemática que los organiza y justifica. Hay tres tipos de conocimiento conceptual de complejidad creciente (hechos, conceptos, estructuras), así como de conocimiento procedimental (destrezas, razonamientos, estrategias).
- La *fenomenología*, compuesta por los fenómenos (situaciones, contextos o problemas) que dan origen (y sentido) a la estructura conceptual. Dicha estructura nos permite modelizar y estudiar estos fenómenos, ayudando a su organización y comprensión.
- Los *sistemas de representación*, en el que están incluidos los diferentes tipos de símbolos, de signos o de gráficos a través de los cuales se hace presente un contenido matemático; en ellos se manifiestan las facetas de un mismo concepto u objeto de la estructura conceptual.

En nuestro estudio, la estructura conceptual es la asociada a la derivada. Dentro de ella, consideramos que las reglas y técnicas de derivación conforman lo que Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) denominan un *foco conceptual*, es decir, una “agrupación específica de conceptos, estrategias y estructuras, que adquiere importancia especial ya que expresa, organiza y resume agrupamientos coherentes de los contenidos” (p. 11). Tomando como referencia el marco anterior y de acuerdo con la naturaleza de este foco conceptual, para poder analizar tanto el contenido teórico expuesto por los docentes como el transcrito por los alumnos, hemos planteado una división en elementos de su contenido, que presentamos a continuación.

Dentro de la estructura conceptual, hemos distinguido tres tipos de elementos:

- Los *enunciados* de las reglas y técnicas de derivación, que forman parte de los hechos (primer nivel de complejidad en la estructura conceptual).
- Las *justificaciones* de dichas reglas, que nos permiten construir la estructura matemática que sistematiza y fundamenta la estructura conceptual, es decir, la organización lógica de los resultados en un sistema coherente y unificado (de Villiers, 1993).
- Otros *comentarios*: observaciones destinadas a relacionar diferentes enunciados, a aclarar su aplicabilidad o a destacar elementos importantes dentro de este foco conceptual.

La fenomenología en la exposición teórica de este foco conceptual se ha reducido a los *ejemplos* de aplicación de las reglas y técnicas de derivación, que muestran funciones cuyo cálculo de la derivada dota de sentido a los enunciados desarrollados. Además, indirectamente, el desarrollo de

justificaciones también dota de sentido a otros enunciados o elementos de la estructura conceptual de la derivada o con otros temas, a través de las cuales se conecta.

En relación a los sistemas de representación, su estudio será considerado de forma transversal a los diferentes elementos en que hemos dividido el contenido.

El paradigma general en el que se enmarca este estudio exploratorio es el descriptivo-interpretativo. A partir de la división del contenido considerada (enunciados, justificaciones, comentarios y ejemplos), analizaremos el contenido presentado por los tres docentes en la teoría asociada a este foco conceptual, haciendo énfasis no sólo en la presencia de los elementos, sino en las relaciones y conexiones que establecen entre ellos o con otros elementos, y en los sistemas de representación utilizados. Contamos para hacer este análisis con los diarios de clase desarrollados (a petición nuestra) por los profesores, así como las notas que tomamos como observadores en las aulas.

Para analizar las transcripciones de los alumnos también hemos realizado un análisis de contenido, entendido en el sentido de Cohen, Manion y Morrison (2011): “un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y verificación de los contenidos de datos escritos.” (p. 563). Los datos analizados serán las fotocopias de esta parte de los CM de los alumnos. La metodología funciona mediante procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción analítica de mensajes (Bardin, 1996) y su principal objetivo es pasar de la descripción de un texto a su interpretación y a la formulación de inferencias, teniendo en cuenta para estas el contexto del análisis. El análisis realizado será de tipo mixto, con componentes cuantitativas y cualitativas, que nos permitan detectar diferentes comportamientos y características de transcripción en el alumnado.

## **CONTEXTO EN QUE SE DESARROLLA EL ESTUDIO**

En este estudio participan tres aulas de 1º de Bachillerato, elegidas por disponibilidad y con profesores de matemáticas distintos, de dos centros de Valladolid: un instituto público de barrio (donde participan dos aulas: de la modalidad Científico-Técnica [con un profesor al que nos referiremos como Profesor<sup>2</sup> 1] y de Sociales [con el Profesor 2]) y un colegio privado-concertado en las afueras de la ciudad (donde participa la clase de la modalidad de Sociales, con el Profesor 3). Las tres aulas tienen un número reducido de estudiantes, participando todos ellos en este estudio salvo una minoría que manifiesta no seguir la asignatura. Los 26 estudiantes participantes serán identificados en el estudio con una “A” seguida de un número: del A1 al A9 los alumnos del aula del Profesor 1, del A10 al A16 los del Profesor 2 y del A17 al A26 los del Profesor 3.

La docencia desarrollada en esta parte fue la natural de los profesores, sin directrices ni intervenciones del equipo investigador, y puede considerarse como *tradicional* o *magistral* en el desarrollo de la teoría, con una presentación y exposición de contenidos por parte del docente, sin intervenciones previstas para el alumnado. Esa presentación combinó, en los tres casos, la exposición oral del profesor con el uso de la pizarra (de tiza) para reflejar elementos como enunciados, ejemplos o justificaciones; y podemos considerar que es relativamente personal, sin referencias explícitas al libro de texto utilizado, que en las tres aulas fue de la misma editorial (Colera y García, 2008a, 2008b), y cuya labor principal fue la de ser repositorio de tareas. La única diferencia metodológica entre profesores fue que el Profesor 2 utilizó explícitamente el dictado verbal (personal, no leído) para presentar algunas reglas y varios comentarios.

## **ANÁLISIS DEL CONTENIDO DESARROLLADO POR LOS DOCENTES**

El desarrollo de un contenido en el aula está en un nivel avanzado de concreción curricular, pero su planificación debe basarse en niveles anteriores menos concretos, como los decretos curriculares y, posiblemente, los libros de texto, que analizamos sucintamente. En el decreto 42/2008, por el que se establece el currículo de bachillerato en Castilla y León, encontramos las “reglas de derivación” entre los contenidos de 1º de Bachillerato en las matemáticas de ambas modalidades, sin mayor

concreción, manteniéndose este comportamiento en segundo curso. Los criterios de evaluación sí destacan el cálculo en funciones polinómicas o racionales sencillas, para su representación gráfica.

El libro de texto utilizado en las tres aulas (Colera y García, 2008a, 2008b), tiene el mismo contenido sobre reglas y técnicas de derivación en ambas modalidades. El texto tiene 19 enunciados, que abarcan las reglas para derivar funciones usuales (incluyendo trigonométricas y sus recíprocas, exponenciales y logarítmicas) y las operaciones con funciones. El libro contiene tan sólo dos justificaciones de tipo gráfico (derivada de función constante e identidad), ambas incompletas (no se justifica por qué la recta tangente es la propia gráfica de la función). Además, existen en él dos comentarios (prototípicos: utilidad de la regla para derivar funciones potenciales y posibilidad de derivar funciones polinómicas aplicando varias reglas) y 14 ejemplos, ilustrando diferentes reglas, generalmente uno por regla, salvo para las funciones potenciales (cuatro, con exponentes de distinto tipo) y para las funciones exponenciales y logarítmicas (ejemplos con bases 2 y 10).

Del desarrollo teórico en el aula de los tres profesores, observamos que ninguno de ellos siguió el libro de texto como una guía de actuación, ni tampoco de planificación del mismo, al no haber coincidencias (salvo alguna puntual) en los ejemplos o en el orden de los enunciados. En la tabla 1 indicamos el número de elementos de cada tipo desarrollados por los docentes. La comparación entre el número y la naturaleza de los diferentes elementos desarrollados, así como las relaciones establecidas entre ellos y los sistemas de representación utilizados nos permiten establecer algunas semejanzas y diferencias en el contenido teórico desarrollado, que se resumen a continuación.

Tabla 1. Número de elementos desarrollados por los docentes en cada una de las aulas

<i>Profesor</i>	<i>Nº enunciados</i>	<i>Nº justificaciones</i>	<i>Nº comentarios</i>	<i>Nº ejemplos</i>
Profesor 1	23	11	6	17
Profesor 2	14	3	3	34
Profesor 3	21	0	1	14

Entre las semejanzas, encontramos varios enunciados comunes a las tres clases (derivada de funciones constantes, potenciales, exponenciales y logarítmicas, reglas para derivar operaciones con funciones). Se realizan ejemplos abundantes y con diferente tipología numérica del exponente para ilustrar la derivada de una función potencial. También se ejemplifican las reglas para derivar operaciones con funciones. Entre las características que diferencian a cada profesor:

El Profesor 1 hace el desarrollo de mayor completitud y profundidad. Realiza muchas de las justificaciones para las derivadas de las funciones usuales, institucionalizando la regla una vez justificada. Con ellas pretende recordar contenidos anteriores, estando fuera de sus *expectativas de aprendizaje* (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008) para los alumnos. Es el único profesor que presenta y utiliza (en justificaciones) la construcción de la función derivada, que presenta dos técnicas de derivación (logarítmica, función recíproca) y que utiliza el sistema de representación gráfico (para justificar la derivada de la función constante y afín). En resumen, este profesor mezcla en su desarrollo la aplicación práctica de las reglas de derivación con su sistematización y fundamentación matemática, sobre todo en las reglas para derivar funciones elementales.

El Profesor 2 hace el desarrollo más limitado en número de enunciados (por ejemplo, no trata las funciones trigonométricas), combinando en la presentación de algunos de ellos el dictado oral con su escritura simbólica en la pizarra. También dicta los comentarios. Presenta varios ejemplos para ilustrar las reglas que ejemplifica, poniendo el énfasis únicamente en la aplicación de la regla correspondiente. Realiza solo tres justificaciones (derivada de una constante, de una suma de funciones y del producto de constante por una función) utilizando la definición analítica de

derivada, sin llegar a construir la función derivada. En resumen, su enfoque está centrado, principalmente, en la aplicación práctica de las reglas enunciadas.

El Profesor 3 centra su desarrollo en los enunciados y los ejemplos ilustrativos de éstos, sin realizar justificaciones y con sólo un comentario. Suele realizar un ejemplo por regla. Destacamos cómo este profesor siempre busca proporcionar a sus alumnos reglas de aplicación directa para cualquier tipo de función, frente a poder relacionarlo o aplicar las ya existentes. Por ejemplo, da una regla específica para derivar la raíz enésima de una función, después de haber presentado la regla de la cadena. Mezcla dos representaciones simbólicas para la derivada:  $f'(x)$  y  $Df(x)$ . Este profesor tiene un enfoque muy centrado en la aplicación práctica, y además directa, de las reglas.

El tratamiento diferente que se ha dado en las tres aulas a la regla de la cadena muestra, implícitamente, los niveles de comprensión indicados por Clark et al. (1997). Mientras el Profesor 2, que no había trabajado previamente la composición de funciones, se limita a escribir y ejemplificar la regla en cuatro casos particulares ( $e^{f(x)}$ ,  $\ln(f(x))$ ,  $2^{f(x)}$  y  $f(x)^3$ ); el Profesor 1 presenta la regla y realiza dos ejemplos, uno de ellos con tres funciones, buscando generalizar la estructura subyacente a la regla. Entre medias, el profesor P3 primero enuncia y ejemplifica la regla, pero después lo complementa con el tratamiento explícito de varios “casos particulares” ( $\sin(f(x))$ ,  $e^{f(x)}$ ,  $f(x)^n$  y  $\ln(f(x))$ ), evidenciándose de nuevo su enfoque hacia la aplicación directa de reglas.

### ANÁLISIS DE LAS TRANSCRIPCIONES DE LOS ESTUDIANTES Y POSIBLES RELACIONES CON EL DESARROLLO DE LOS DOCENTES

Por motivos de espacio, la comunicación se centra en el análisis cuantitativo del registro en los CM de los alumnos de los diferentes elementos (enunciados, justificaciones, comentarios y ejemplos) presentados por cada docente. Hemos considerado para ello tres niveles de transcripción, según su completitud: transcripción completa (TC), transcripción parcial (TP) o no transcripción (NT). En la tabla 2 se presentan los porcentajes de transcripción considerando globalmente cada aula, mientras que la tabla 3 refleja los porcentajes de cada uno de los alumnos participantes.

Tabla 2. Frecuencias (f) y porcentajes (%) de transcripción (respecto al total) de los diferentes tipos de elementos desarrollados en las aulas por cada profesor

Elemento	Profesor	Nº elem.	Nº alum.	Total	Niveles de transcripción y porcentajes					
					TC (f)	TC (%)	TP (f)	TP (%)	NT (f)	NT (%)
ENUNCIADOS	Prof. 1	23	9	207	96	46,4	7	3,4	104	50,2
	Prof. 2	14	7	98	83	84,7	0	0	15	15,3
	Prof. 3	21	10	210	193	91,9	1	0,5	16	7,6
JUSTIFICACIONES	Prof. 1	11	9	99	31	31,3	12	12,1	56	56,6
	Prof. 2	3	7	21	6	28,6	4	19,0	11	52,4
	Prof. 3	0	10	0	0		0		0	
COMENTARIOS	Prof. 1	6	9	54	1	1,9	2	3,7	51	94,4
	Prof. 2	3	7	21	21	100	0	0	0	0
	Prof. 3	1	10	10	1	10	0	0	9	90
EJEMPLOS	Prof. 1	17	9	153	44	28,8	7	4,6	102	66,7
	Prof. 2	34	7	238	184	77,3	0	0	54	22,7
	Prof. 3	14	10	140	120	85,7	3	2,1	17	12,1

El número tanto de justificaciones como de comentarios fue muy desigual en las aulas. Además, el dictado verbal de comentarios por el Profesor 2 provoca una diferencia muy evidente en los porcentajes de transcripción de éstos. Así, para detectar comportamientos del alumnado comunes a las tres aulas centraremos nuestro análisis en el número y porcentajes de transcripción de enunciados y ejemplos. En la tabla 3 observamos cuatro alumnos (A16, A17, A18 y A19) que

toman todos estos elementos; un alumno, A5, toma todos los enunciados y casi todos los ejemplos; así como cuatro alumnos (A12, A20, A22 y A24) toman todos los ejemplos, pero no todos los enunciados. Otros alumnos también tienen porcentajes altos, aunque similares, de transcripción de estos elementos. Sin embargo, sorprende la presencia de bastantes casos en que el porcentaje en la transcripción de ejemplos es sensiblemente inferior al porcentaje de enunciados transcritos.

Tabla 3. Porcentajes por niveles de transcripción de los diferentes tipos de elementos en los alumnos

Alu mno	Enunciados			Justificaciones			Comentarios			Ejemplos		
	TC	TP	NT	TC	TP	NT	TC	TP	NT	TC	TP	NT
A1	34,8	4,4	60,9	36,4	18,2	45,5	0	0	100	17,7	0	82,4
A2	13,0	0	87,0	9,1	0	90,9	0	0	100	11,8	0	88,2
A3	56,5	0	43,5	27,3	0	72,7	0	0	100	29,4	11,8	58,8
A4	52,2	4,4	43,5	63,6	9,1	27,3	0	0	100	29,4	5,9	64,7
A5	100	0	0	81,8	18,2	0	0	16,7	83,3	94,1	0	5,9
A6	0	0	100	0	0	100	16,7	0	83,3	11,8	5,9	82,4
A7	13,0	4,4	82,6	9,1	9,1	81,8	0	0	100	0	5,9	94,1
A8	78,3	4,4	17,4	9,1	9,1	81,8	0	0	100	23,5	11,8	64,7
A9	69,6	13,0	17,4	45,5	45,5	9,1	0	16,7	83,3	41,2	0	58,8
A10	85,7	0	14,3	0	33,3	66,7	100	0	0	58,8	0	41,2
A11	71,4	0	28,6	33,3	0	66,7	100	0	0	61,8	0	38,2
A12	85,7	0	14,3	33,3	33,3	33,3	100	0	0	100	0	0
A13	92,9	0	7,1	33,3	33,3	33,3	100	0	0	94,1	0	5,9
A14	71,4	0	28,6	33,3	0	66,7	100	0	0	47,1	0	52,9
A15	85,7	0	14,3	33,3	0	66,7	100	0	0	79,4	0	20,6
A16	100	0	0	33,3	33,3	33,3	100	0	0	100	0	0
A17	100	0	0				0	0	100	100	0	0
A18	100	0	0				0	0	100	92,9	7,1	0
A19	100	0	0				0	0	100	100	0	0
A20	90,5	0	9,5				0	0	100	100	0	0
A21	81,0	0	19,0				0	0	100	28,6	0	71,4
A22	95,2	0	4,8				0	0	100	100	0	0
A23	85,7	4,8	9,5				0	0	100	71,4	14,3	14,3
A24	95,2	0	4,8				100	0	0	100	0	0
A25	81,0	0	19,0				0	0	100	92,9	0	7,1
A26	90,5	0	9,5				0	0	100	71,4	0	28,6

Para conocer mejor los comportamientos del alumnado en este sentido, decidimos hacer un estudio conjunto sobre la transcripción en aquellas reglas que se ilustran con ejemplos y sus ejemplos de aplicación correspondientes. Tras estudiar cómo es su transcripción en estos casos y atendiendo a cuál ha sido su comportamiento mayoritario, hemos establecido una clasificación del comportamiento del alumnado en siete perfiles, apareciendo tres comportamientos que podríamos considerar como selectivos en la toma de reglas y ejemplos ilustrativos de aplicación:

- Alumnos *exhaustivos*, que han tomado siempre tanto las reglas como todos sus ejemplos ilustrativos: A5, A16, A17, A18, A19, A20, A22 y A24 (8 alumnos).
- Alumnos *mayoritariamente exhaustivos*, que casi siempre toman tanto las reglas como todos sus ejemplos ilustrativos, salvo casos contados: A12, A13, A15 y A25 (4 alumnos).
- Alumnos *entre exhaustivos y selectivos*, cuyo comportamiento difiere según las situaciones, sin que ninguno sea mayoritario: A3 (1 alumno).

- Alumnos *selectivos al ejemplificar*, que toman uno o algunos de los ejemplos asociados a las reglas, pero no todos: A10, A11, A14, A23 y A26 (5 alumnos).
- Alumnos que *transcriben la regla sin ejemplos*, que de forma mayoritaria no toman ninguno de los ejemplos asociados a las reglas que se han ilustrado: A8, A9 y A21 (3 alumnos).
- Alumnos que *transcriben los ejemplos sin la regla*, que en varios casos transcriben al menos uno de los ejemplos ilustrativos de una regla sin tomar ésta: A1, A2 y A4 (3 alumnos).
- Alumnos que *no transcriben ni reglas ni ejemplos ilustrativos*: A6 y A7 (2 alumnos).

Como vemos en la tabla 2, en las dos aulas (Profesores 2 y 3) en las que el desarrollo de los profesores se centró más en la aplicación práctica de reglas (y no en su fundamentación) los porcentajes de transcripción de enunciados y ejemplos son mucho más altos y homogéneos, frente a una transcripción más variable en los alumnos del Profesor 1. La mayoría de alumnos que hemos considerado como *exhaustivos* (total o mayoritariamente) pertenecen a las dos últimas aulas, encontrando tan sólo un alumno de este tipo en el aula del Profesor 1 (A5), aula en que se concentran los tres últimos perfiles que hemos reseñado, asociados a mayor incompletitud.

El porcentaje más alto se da en los alumnos del Profesor 3, el que más claramente había centrado el desarrollo de este foco conceptual en la aplicación práctica de las reglas. Este hecho, junto con la realización mayoritaria de tan sólo un ejemplo ilustrativo por regla, pueden haber provocado la transcripción casi total de estos elementos, existiendo además en varios alumnos algunas aclaraciones o ayudas que indican explícitamente la regla aplicada en el ejemplo o las derivadas de las funciones por separado al ejemplificar las reglas para derivar operaciones con funciones. El mayor número de ejemplos por regla desarrollados por el Profesor 2 y la presencia detectada en este aula de varios alumnos *selectivos al ejemplificar* (A10, A11 y A14) hace que el porcentaje aquí sea algo menor (aunque todos estos alumnos toman siempre, al menos, un ejemplo por regla). Las reglas dictadas por el Profesor 2 son transcritas en su totalidad por los alumnos. De hecho, los alumnos transcriben todas las reglas, salvo, quizá, los “casos particulares” de la composición, cuya transcripción es variable en el alumnado (A11 y A14 no los transcriben, A16 las transcribe todas).

Ante las justificaciones, los alumnos del Profesor 2 han tenido un comportamiento más o menos homogéneo, frente a la mayor variabilidad de los alumnos del Profesor 1 (A5 y A9 toman casi todas las justificaciones, total o parcialmente; otros tienen un porcentaje muy bajo de transcripción, como A8, que parece considerar su CM como un repositorio de reglas, casi sin ejemplos ilustrativos ni justificaciones). Las justificaciones han tenido, en esas dos aulas, un porcentaje bajo de transcripción (alrededor del 30% de TC), con bastantes transcripciones parciales (demostraciones incompletas: sólo toman algunos pasos). Establecemos tres causas posibles para estos hechos:

- Las justificaciones están fuera de las *expectativas de aprendizaje* (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008) que fijaron los docentes para sus alumnos en este foco conceptual (indicación explícita del Profesor 1: “no es necesario que las aprendáis, si acaso, entenderlas”).
- Las justificaciones precisan mayor atención del alumnado, por los procesos y relaciones que involucran, para su comprensión y seguimiento, lo que dificulta combinar el seguimiento con su transcripción, dando lugar a transcripciones parciales, o a no transcripciones.
- Ibañes y Ortega (2003) ya detectaron las dificultades, en este nivel educativo, para distinguir los procesos asociados a la justificación: si no las identifiquen como tales, ni su propósito, pueden optar por no tomarlas, frente a elementos más fácilmente identificables, como los enunciados y los ejemplos.

El dictado verbal de los elementos que hemos considerado como comentarios por parte del Profesor 2 provoca una transcripción total de éstos, frente a su transcripción casi nula en las otras dos aulas.



De todos los comentarios, únicamente alguno de los hechos por los Profesores 1 y 3 han hecho explícitas relaciones entre reglas o la posibilidad de aplicar varias reglas distintas para derivar una función. Estos comentarios apenas han sido recogidos por los alumnos, que no parecen dar importancia a la transcripción de estas relaciones.

Si nos fijamos en los sistemas de representación, el sistema de representación simbólico es predominante en los CM de los alumnos, transcribiendo, no siempre correctamente, el simbolismo utilizado en la pizarra. Tan sólo dos alumnos (A5 y A9) tienen algún tipo de representación gráfica en sus cuadernos (algunas de las desarrolladas por el Profesor 1). En relación al sistema de representación verbal, los siete alumnos A10 a A16 toman las tres reglas que el profesor dictó en el aula, no apreciándose ningún otro caso (salvo parcialmente en una regla en el alumno A21). Además de los alumnos del Profesor 2 (debido al dictado en algunas partes), tan solo tres alumnos (A8, A19 y A21) indican verbalmente en varios casos los tipos de funciones u operaciones cuya derivada presentan, siendo esporádico o nulo este comportamiento en el resto de alumnos.

## CONCLUSIONES

Este estudio en tres aulas con profesores de metodología relativamente similar, ha puesto de manifiesto la existencia de diferentes enfoques en el profesorado al planificar y desarrollar en el aula las reglas y técnicas de derivación, así como diferentes comportamientos en el alumnado al transcribir estos contenidos en sus CM. Hemos detectado cómo la transcripción de enunciados de las reglas y ejemplos ha sido mucho mayor en las aulas cuyos profesores han tenido un enfoque centrado en la aplicación práctica de las reglas, frente a un enfoque compartido entre la aplicación práctica y la fundamentación de las reglas, donde la transcripción ha sido mucho más variable entre diferentes alumnos. Las justificaciones han tenido un porcentaje relativamente bajo de transcripción en las dos aulas donde ha habido, estableciendo varias causas para ello en el punto anterior. Este hecho, unido al uso de la justificación como descubrimiento de la regla por parte del Profesor 1, puede ser otra explicación posible para la mayor variabilidad en la transcripción de las reglas por parte de sus alumnos.

Un estudio detallado de la transcripción que realizan los alumnos de las reglas enunciadas y sus ejemplos ilustrativos nos ha permitido detectar siete perfiles en el alumnado en este sentido. Destacamos la presencia de varios tipos de alumnos selectivos al transcribir estos contenidos, de diferente naturaleza: hemos encontrado alumnos *selectivos al ejemplificar*, que optan por tomar uno o algunos (pero no todos) los ejemplos que ilustran una regla, alumnos que *transcriben la regla sin ejemplos*, obviando la componente fenomenológica y de aplicación de dichas reglas y alumnos que, sorprendentemente y en varias ocasiones, *transcriben los ejemplos sin la regla*, lo que puede dificultar su asimilación de la misma, o la necesidad de recurrir a otros medios para encontrarla.

En la transcripción de los alumnos predomina el sistema de representación simbólico, transcribiendo los elementos de la pizarra frente al discurso oral de la explicación (salvo cuando es dictada). Aparición escasa del sistema gráfico y el verbal, sólo en un grupo reducido de alumnos.

La diversidad de comportamientos detectada en el alumnado en este estudio pone de manifiesto la necesidad de seguir profundizando en las diferentes formas que tienen los alumnos de elaborar y utilizar el CM para su estudio y aprendizaje de la materia, así como el papel y la influencia que puede ejercer el profesor en ellas. El trabajo global de investigación del que forma parte este estudio exploratorio busca aumentar nuestro conocimiento en estas líneas de investigación, insuficientemente tratadas en didáctica de la matemática.

## Agradecimientos

El primer autor de este trabajo cuenta con la ayuda y financiación de una beca FPU (Referencia AP2012-2241) del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

## Referencias

- Arce, M. (2013). Análisis de los cuadernos de un grupo de alumnos (1). *SUMA*, 74, 45-53.
- Arce, M. (2014). Análisis de los cuadernos de un grupo de alumnos (y 2). *SUMA*, 75, 51-59.
- Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos  $f'(a)$  y  $f'(x)$  en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 191-206.
- Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido*. Madrid: Editorial Akal (2ª ed.).
- Colera, J. y García, R. (2008a). *Matemáticas I. 1º de Bachillerato*. Madrid: Editorial Anaya.
- Colera, J. y García, R. (2008b). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I. 1º de Bachillerato*. Madrid: Editorial Anaya.
- Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., Tolia, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule? *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 345-364.
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Londres: Routledge.
- Courant, R. y Robbins, H. (1964). *¿Qué es la Matemática?* Madrid: Ed. Aguilar (4ª edición).
- de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon*, 26, 15-30. Traducción, documento original de 1990.
- Fonseca, C. y Gascón, J. (2002). Organización matemática en torno a las técnicas de derivación en la Enseñanza Secundaria. En J. Murillo, P. M. Arnal, R. Escolano, J. M. Gairín y L. Blanco (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 205-223). Logroño, La Rioja: SEIEM.
- Font, V. (2000). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de  $f'(x)$ . El caso de la función seno. *UNO*, 25, 21-40.
- Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Noveno simposio de la SEIEM* (pp. 111-128). Córdoba: SEIEM.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39-88.
- Ibañez, M. y Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, 21(1), 49-64.
- Picado, M. y Rico, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA*, 6(1), 11-27.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM*, 1, 39-63.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (2013). *Análisis didáctico en Educación Matemática*. Granada: Comares.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA*, 58, 7-23.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *RELIME*, 11(2), 267-296.

<sup>1</sup> Entendemos por función recíproca la función simétrica para la composición de funciones (función tal que su composición con la función inicial es el elemento neutro para la composición); en contraposición con la función inversa (simétrica para el producto). No obstante, es usual nombrar la primera como la segunda, lo cual es motivo de confusión.

<sup>2</sup> En toda la comunicación utilizaremos el genérico masculino para profesores y alumnos, sin hacer referencia al sexo concreto de los participantes.