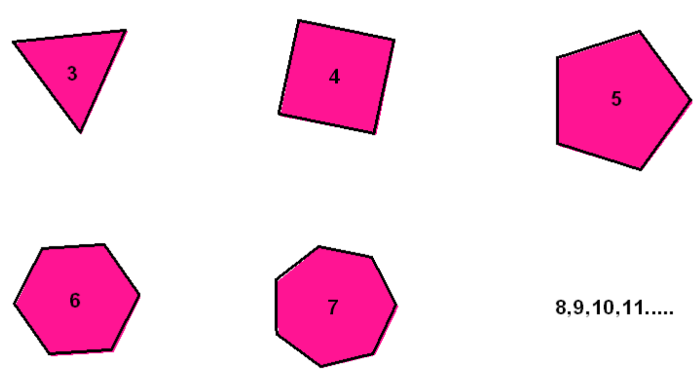
Una ingeniería didáctica para calcular el volumen del icosaedro

Bernardo Camou
Profesor Uruguayo de Matemática
Master EIAHD en Francia
bcamou@adinet.com.uy

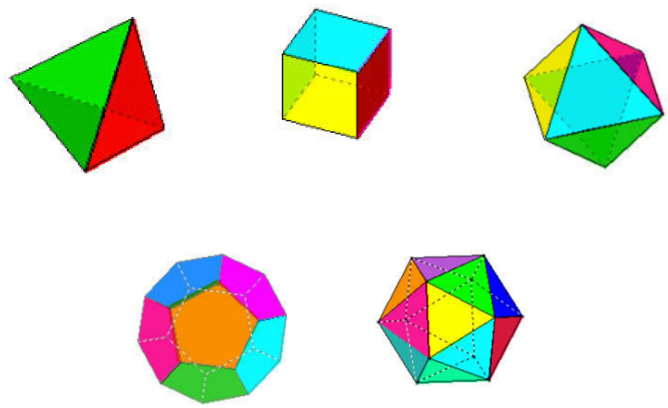
Resumen

Los 5 poliedros regulares han sido modelo de la ciencia para los griegos y modelo de la astronomía para Kepler. Sin embargo, a pesar de su gran valor epistemológico su studio es normalmente muy superficial en los cursos de Secundaria.
Hace 20 años me formulé esta sencilla pregunta : ¿Cómo podemos calculara el volumen del icosaedro y del dodecaedro regular, conociendo solamente la medida de la arista?
Esta pregunta dio lugar a una fascinante investigación, que comenzó en la búsqueda de diferentes medios para construir poliedros (se puede ver en la foto de la derecha un modelo a usar durante el taller) , un trabajo muy interesante con el álgebra de los irracionales cuadráticos, el uso de la trigonometría y el descubrimiento de varias y sorpresivas propiedades geométricas realcionadas algunas con el número aúreo.
Durante el curso los participantes aprenderán a construir, con regla y compás el pentágono regular (comenzando con su lado) , de la forma más simple y exacta, con su justificación paso a paso. Esto es imprescindible ya que en ambos el icosa y el dode hay numerosos pentágonos regulares. Este curso o taller es tan sólo un pequeño paseo en el increíble mundo de los 5 poliedros regulares, un mundo lleno de tesoros matemáticos, un mundo que espera a ser explorado y descubierto.

¿Cuántos polígonos regulares hay?



Podemos construir polígonos regulares de tres, cuatro,cinco .... Ocho,nueve, diez lados ..... hasta el infinito!
Sin embargo, en el espacio, ¿Cuántos poliedros regulares hay?



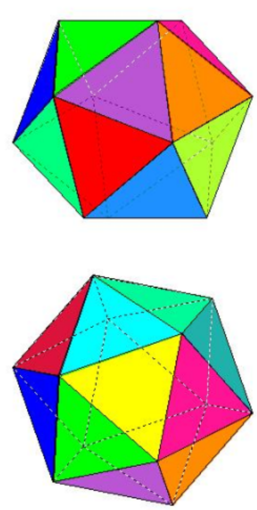
Hay cinco, solamente cinco poliedros regulares: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

El volumen de los primeros tres es muy conocido, pero ¿cuál es el volumen de un dodecaedro y un icosaedro regular cualquiera en función de su arista?

Construyendo modelos de carton con mis alumnos de liceo hace 17 años, me hice estas dos preguntas.

Este trabajo es una respuesta a una de ellas.

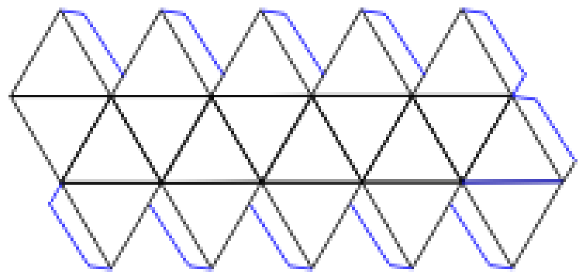
Este cálculo será hecho en dos niveles diferentes: un procedimiento que implica utilizar la medición y nos dará un valor aproximado y otro procedimiento basado en el cálculo que nos dará el valor exacto del volumen del icosaedro regular.



El método aproximado

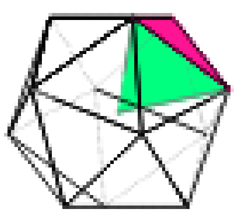
¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene un icosaedro?

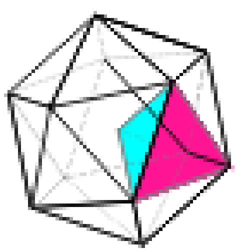
Podemos contarlas en la figura anterior o con un modelo 3D hecho por ejemplo utilizando el siguientes desarrollo.



El primer método es adecuado para niños de 11 o 12 años de edad que pueden hacer modelos en 3D en cartulina del icosaedro con el anterior desarrollo.

Pero vayamos ahora a la idea geométrica central, que se ilustra en la siguiente figura.

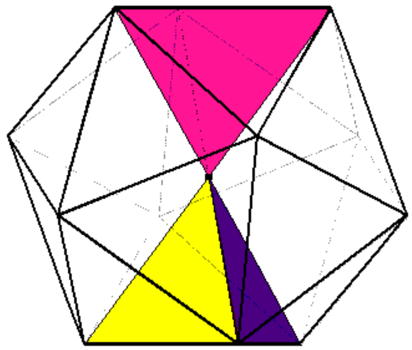




El centro del icosaedro equidista de todos los vértices. De esta forma el icosaedro se puede descomponer en pirámides. Cada pirámide tiene como base una cara del icosa y como vértice el centro del icosa.
Se puede apreciar una de dichas pirámides en el dibujo de la izquierda.
Hay tantas pirámides como caras tiene el icosa, es decir 20.
Si logramos calcular el volumen de una pirámide, multiplicando por 20 tendremos el volumen del icosa.

¿Cómo hace un escolar (que no conoce el Teorema de Pitágoras) para calcular el área de un triángulo equilátero? La forma más natural para ella o él es dibujar el triángulo medir la altura y hacer luego el cálculo.

Así análogamente, en el caso que nos concierne, el procedimiento natural sería construir el icosa en cartón, medir tanto la altura de cara (de un triángulo equilátero) como la altura de una de las pirámides para luego hacer los cálculos.



¿Pero cómo podemos medir la altura de una pirámide?
Dado que dos caras opuestas son paralelas la distancia entre ellas es dos veces la altura de la pirámide, como se puede ver en la figura . Con un modelo en 3D de cartón los alumnos fácilmente pueden medir esta distancia y dividiéndola por 2 obtienen la altura de la pirámide.

Teniendo el tamaño de la arista y la altura de la cara pueden calcular el area de ésta.

Luego, pueden calcular el volumen de una pirámide por la fórmula :

$$V_{1\ \text{Piramide}} = \frac{A_{\text{Base}} \times h_{\text{Piramide}}}{3}$$ y multiplicando por 20 (el número de pirámides)

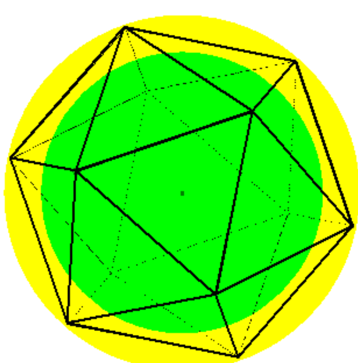
obtenemos el valor aproximado del volumen de ese icosaedro de cartón en particular.

Es una linda tarea para un escolar, que involucra sencillos conceptos geométricos, mediciones y cálculos y más aún es significativa desde el punto de vista epistemológico.

El método exacto

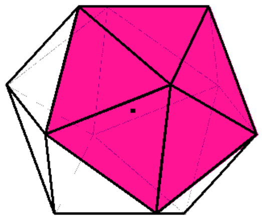
Como el icosaedro es regular, conociendo solamente la medida de la arista todo lo demás está determinado.
De este modo, calcularemos el volumen del icosa teniendo como dato sólo el tamaño de su arista.

Las tres esferas



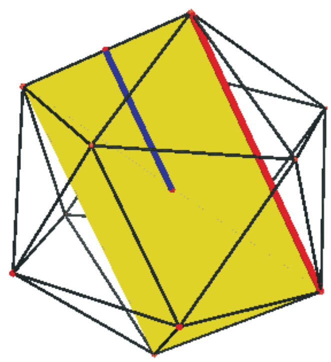
Los 12 vértices equidistan del centro del icosa. Así, hay una esfera (la amarilla) que pasa por todos los vértices.
Las 20 caras también son equidistantes del centro del icosa. Por lo tanto hay una segunda esfera (la verde) que tiene como centro, el centro del icosa y es tangente a todas las caras.
Hay una tercera esfera (no dibujada aquí) con el mismo centro y que pasa por todos los puntos medios de las aristas.
La primera esfera es la esfera circunscrita, la segunda la inscrita y la tercera la llamaremos la esfera media.

La sección pentagonal



En cada vértice concurren 5 aristas.
Por cada vértice existe un pentágono regular como sección.
Dado que el icosa tiene 12 vértices, hay 12 pentágonos como éste en cada icosa.

La sección rectangular

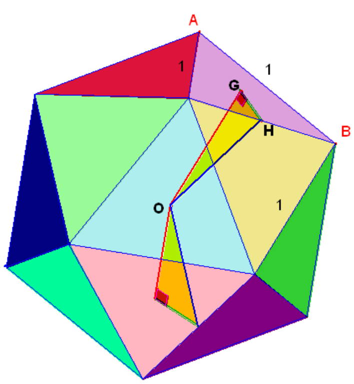


Dos aristas opuestas del icosa determina un rectángulo (como el amarillo de la figura).

El largo del rectángulo, que está en rojo, es igual a la diagonal del pentágono regular de la figura anterior.

El segmento azul (el radio de la esfera media) es entonces, la mitad del tamaño de la diagonal del pentágono.

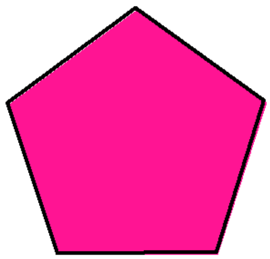
El triángulo clave



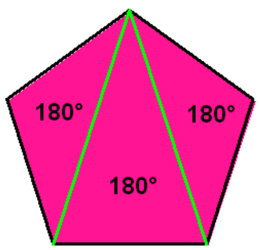
Tenemos el triángulo rectángulo OGH.
OH es el radio de la esfera media y mide la mitad de la diagonal del pentágono.
G es el centro de la cara por lo que GH es un tercio de la altura de un triángulo equilátero.
De este modo si conocemos dos lados de un triángulo rectángulo podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular OG , que es la altura de una de las pirámides del icosa.

¿Cuál es la longitud de la diagonal de un pentágono regular de lado 1?

(Si ya lo tienes claro puedes saltearte las tres próximas páginas)



¿Cuánto mide cada ángulo interior de un pentágono regular?
Si dibujamos desde un vértice dos diagonales obtenemos tres triángulos; la suma de los tres ángulos de un triángulo es 1800; por lo tanto...



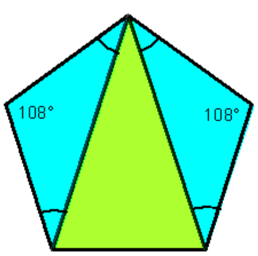
Con tres triángulos

$$180^\circ \times 3 = 540^\circ$$

Pero como el pentágono es regular tiene 5 ángulos iguales o congruentes
Por lo que cada ángulo mide

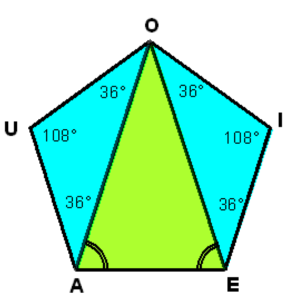
$$540\,\%5 = 108^\circ$$

Tenemos tres triángulos isósceles; podemos calcular sus ángulos ....



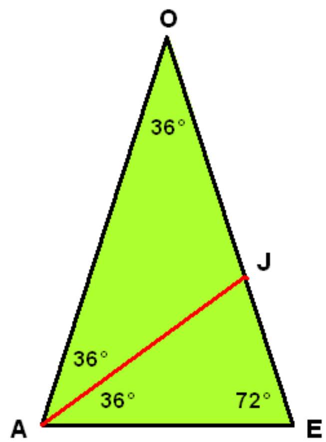
Los dos triángulos turquesas son isósceles y tienen un ángulo de 108° por lo que para calcular los otros dos simplemente hacemos :

$$\frac{180 - 108}{2} = 36$$

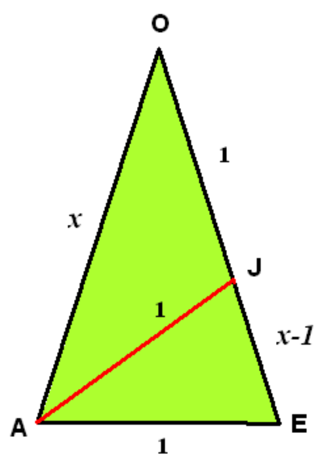


El triángulo AEO es también isósceles; luego $\hat{A} = \hat{E}$
Pero los ángulos de vértices A , E y O del pentágono miden 108°
Entonces $\hat{A} = \hat{E} = 108 - 36 = 72^\circ$
y
$\hat{O} = 108 - 36 - 36 = 36^\circ$

Trabajemos ahora con el triángulo central



Dibujamos la bisectriz de $\hat{A}$ que corta OE en el punto J.
Fácilmente notamos que tenemos tres triángulos isósceles : AEO , AOJ y AEJ.
Además AEJ es semejante con AEO ya que tienen ángulos congruentes o iguales.
Por lo tanto sus lados son proporcionales .
Supongamos que $AE = 1$ (el lado del pentágono) y el lado desconcido $AO = x$ (la diagonal del pentágono)
En function de x y 1 ¿Cuál es la longitud



Como AEJ es isósceles $AJ = AE = 1$
y como $AO = OE = x$ y $OJ = 1$
entonces $JE = x - 1$
El triángulo AEO es semejante con el AEJ, por lo que podemos escribir la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

que es equivalente a:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Esta ecuación cuadrática tiene dos raíces que son:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La segunda raíz, siendo un número negativo no puede ser la medida de la diagonal por lo que se debe descartar, pero la primera raíz es la solución a nuestro problema.
Lo que quiere decir que la diagonal de un pentágono regular de lado 1 es:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si la longitud del lado del pentágono es c en lugar de 1 entonces la longitud de de la diagonal será simplemente :

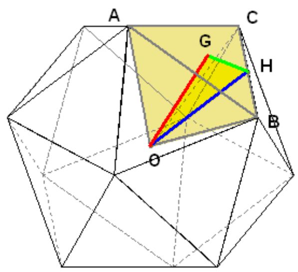
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c$$

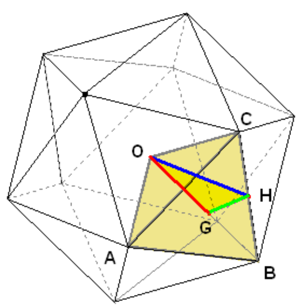
Este número es famoso no sólo en matemática sino también en arte, en arquitectura e incluso en biología.

Se le designa por la letra griega ϕ (phi) y también es conocido como el número de oro o la proporción aúrea.

$\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ puede ser definido de muchas maneras pero la más fundante, científica y significativa es que ϕ es la longitud de la diagonal de un pentágono regular en función de su lado.

Volviendo al icosa





Ya hemos visto que el icosa se puede descomponer en 2O pirámides iguales o congruentes.
Podemos ver nuevamente el triángulo clave OGH.
Supongamos (para facilitar los cálculos) que la arista del icosa es 1 (luego haremos inmediatamente la generalización para cualquier arista).
Siendo H el punto medio de BC entonces
AH es la altura de un triángulo equilátero

$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Siendo G el centro de ABC

$$GH = \frac{1}{3}AH \Rightarrow GH = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Ya hemos visto que la hipotenusa OH mide la mitad de la diagonal del pentágono y como hemos visto en páginas anteriores su longitud es

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow OH = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Tenemos pues, un triángulo rectángulo del cual conocemos dos lados: OH y GH.

Podemos por tanto, aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular OG, altura de la pirámide.

$$OG^2 = OH^2 - GH^2$$

$$OG^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

operamos

$$OG^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} - \frac{3}{36} \quad \overset{simplificando}{\Rightarrow} \quad OG^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{12}$$

y obtenemos

$$OG^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{24} \quad \Rightarrow OG = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{24}}$$

Sin embargo, esta expresión de OG con un radical dentro de otro no nos permitirá simplificar nuestros cálculos por lo que seguiremos la sugerencia de la profesora francesa llamada Jacqueline Nimier quien multiplicó el numerador y el denominador de la anterior expresión por dos.

$$OG^2 = \frac{14+6\sqrt{5}}{48} \quad \text{¿Pero para qué?}$$

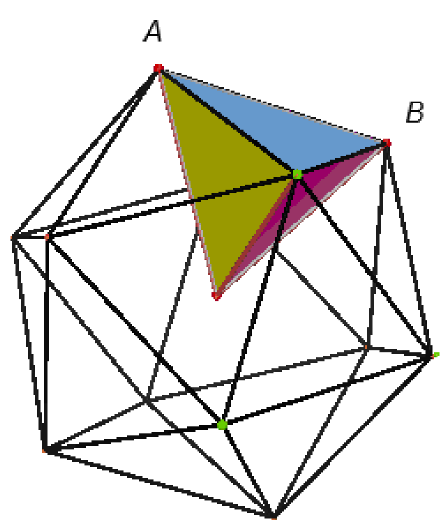
Podemos escribir $14+6\sqrt{5}$ como $9+5+2.3\sqrt{5}$ y reconocer que esto último es el cuadrado de $3+\sqrt{5}$ entonces

$$OG^2 = \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}{16.3} \quad \overset{tomando\ raíz\ cuadrada}{\Rightarrow} \quad OG = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$$

que es la altura de cada pirámide

Tenemos todo para hacer los cálculos finales!

El cálculo final



Si $AB = 1$ la altura de la base (de un triángulo equilátero) es $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo tanto el Área de la base es:

$$A_{\text{Base}} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ahora calcularemos el volumen de una pirámide, como la que vemos en la figura de la izquierda.

$$V_{1\ \text{Pirámide}} = \frac{A_{Base} \times h_{\text{Pirámide}}}{3}$$

$$V_{1\ \text{Pirámide}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\right)}{3}$$
$$V_{1\ \text{Pirámide}} = \frac{3+\sqrt{5}}{48}$$

Pero como tenemos 20 pirámides congruentes, debemos multiplicar por 20

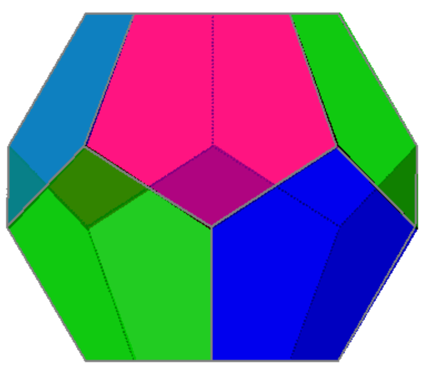
$$V_{\text{ICOSA}} = \frac{3+\sqrt{5}}{48} \times 20 = \frac{3+\sqrt{5}}{12} \times 5$$
$$V_{\text{ICOSA}} = \frac{15+5\sqrt{5}}{12}$$

Con una aproximación de 20 cifras decimales el volumen del icosa es

$$V_{\text{ICOSA}} \cong 2,18169\,49906\,24912\,37350$$

Considera por un momento en el simple y bonito número (con tan sólo un radical) que hemos conseguido después de todo!

El volumen de un dodecaedro regular de arista 1 es un número parecido, tan lindo y simple como el del icosaedro pero eso ya es otra historia.... quizás la próxima.....



Pero ¿Qué sucede si la arista del icosa no mide , 1 sino que tiene una medida cualquiera a?

Entonces :

$$AB = a$$

La altura de la cara será :

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

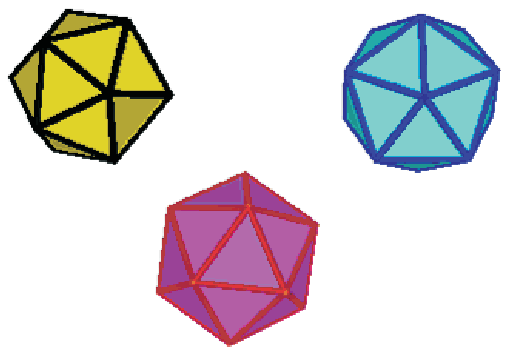
La altura de la pirámide sera :

$$OG = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\, a$$

Haciendo los mismos cálculos pero usando esta vez a obtendremos :

$$V_{\text{ICOSAEDRO}} = \frac{15+5\sqrt{5}}{12}\, a^3$$

Y ya está , terminamos , listo!!



Epílogo

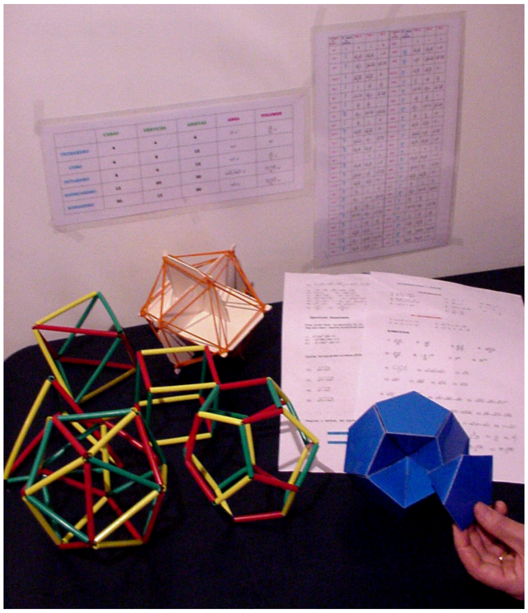
La parte central de este trabajo, que comenzó en 1987 fue hecha en mi país Uruguay pero fue completado durante el ultimo año en Grenoble (Francia), mientras cursaba un Master en Didáctica en la Universidad J.Fourier.

La geometría del espacio es indudablemente un obstáculo epistemológico.

Es sorprendente que en los textos de geometría haya numerosos problemas sobre cubos, pirámides y prismas pero prácticamente ninguno sobre el dodecaedro o el icosaedro regular, a pesar de su incontestable valor epistemológico.

¿Por qué?

La ciencia, incluso la matemática, comienza con la experimentación y en geometría el punto de partida de la experimentación es la representación. En particular en geometría del espacio este punto de partida debe ser los modelos 3D.



Los modelos de la foto han sido algunos de los modelos 3D , que empleé para desarrollar este trabajo.
Luego, todos los dibujos planos y figuras de este documento, fueron hechos usando el programa francés Cabri II Plus y Cabri 3D .
Representar un objeto 3D mediante una figura plana es una tarea muy exigente que puede fácilmente exceder las dificultades de razonamiento de un curso de geometría del espacio.
En este sentido, intentar enseñar geometría del espacio usando únicamente dibujos planos y estáticos, se constituye en un obstáculo didáctico para el aprendizaje de esta geometría.

Necesitamos usar modelos 3D como también figuras dinámicas, como las que suministran los software de geometría dinámica para poder alcanzar la necesaria y esencial visualización, que nos permita encontrar propiedades, construir conceptos y encadenar razonamientos.
Si carecemos de una adecuada representación del objeto geométrico, quedamos atascados al comienzo del proceso.

Las figuras planas y estáticas son también necesarias pero debemos admitir que son representaciones **muy pobres** comparadas con las otras ya mencionadas.

Vuelvo a insistir, que intentar enseñar geometría del espacio empleando exclusivamente esta pobre representación en lugar de favorecer el aprendizaje de esta geometría, agrega un nuevo obstáculo para el aprendizaje.

El icosaedro y el dodecaedro son prácticamente desconocidos para nuestros alumnos de Secundaria no porque no tenga interés su estudio (al contrario su riqueza matemática es enorme).
Son desconocidos porque en primer lugar es difícil dibujarlos y representarlos, por lo que a pesar de su gran valor epistemológico permanecen casi ignorados

Tenemos tan sólo 5 poliedros regulares ; es tiempo que empecemos a estudiarlos en profundidad a **todos** ellos . ¿No crees?

Para finalizar, me gustaría subrayar la integración entre geometría y álgebra que tiene lugar a lo largo de todo este trabajo, empleando herramientas básicas de ambas ramas de la matemática.

La integración de diferentes ramas de la matemática es lo que hace que la matemática sea poderosa.

Gracias por darme una oportunidad de compartir mi trabajo.

Cualquier comentario, pregunta o corrección será bienvenido y agradecido.

Bibliografía

[1] BACHELARD, G. *La Formation de l'esprit scientifique*

[2] BAINVILLE, E. *Manuel d'utilisation de Cabri II plus*

[3] BALACHEFF, N., LUENGO, V. *Notes du cours «Concepts et méthodes des EIAH» du Master EIAHD de l'Université J. Fourier de Grenoble.*

[4] BALACHEFF, N. *Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics*

[5] BANCHOFF, T. *La quatrième dimension*

[6] BELCREDI, L., ZAMBRA, M., RODRIGUEZ, M. *Geometría*

[7] BESSOT, A. *Introduction à la Théorie des Situations Didactiques, Université Joseph Fourier, Grenoble*

[8] BROUSSEAU, G. *Théorie des Situations Didactiques*

[9] BROUSSEAU, G. *Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de la matemática?*

[10] CARRAL, M. *Géométrie*

[11] CARRÉGA, JC. *Théorie des corps, la règle et le compas*

[12] CHAACHOUA, H. *Ecologie des problèmes de construction dans l'espace*

[13] CHEVALLARD, Y. *La Transposition Didactique*

[14] DREYFUS, T., HADAS, N. *Geometry in Israel, Proof as an answer to the question why*

[15] FAERBER, R. *Groupements, processus pédagogiques et quelques contraintes liées à un environnement virtuel d'apprentissage*

[16] FERNÁNDEZ, V. W. *Geometría Métrica*

[17] GUILLÉN, G. *El Mundo de los Poliedros*

[18] GRENIER, D. *La théorie des champs conceptuels et le modèle de conception*

[19] GRENIER, D. *Connaissance, conception et obstacle (notes du UE1 du Master EIAHD)*

[20] HENRIQUES, A. *Dinâmica dos elementos da geometria plana en ambiente computacional Cabri Géomètre II*

[21] KLEIN, F. *The icosahedron*

[22] LABORDE, C. *Problemas de la enseñanza de la geometría en el secundario*

[23] LABORDE, C. et Vergnaud G. *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?*

[24] LAFOND, M. *Dénombrement des polyèdres convexes*

[25] LAKATOS, I. *Preuves et réfutations; essai sur la logique de la découverte mathématique*

[26] MLODINOW, L. *Dans l'aeil du compas*

[27] NIMIER, J. *Les modes de relations aux mathématiques*

[28] POLYA, G. *How to solve it*

[29] SOURY-LAVERGNE, S. *Le contrat didactique; la relation précepteur élève dans un environnement informatique (notes du cours UE 5 du Master EIAHD de la Univérsité J.Fourier de Grenoble)*

[30] Surrey University web site *The magic of Geometry and the Golden section*