

LOS CAMPANOIDES, ALGO NUEVO SOBRE POLÍGONOS REGULARES

Alberto Rafael Sánchez Rivas

*Docente Institución Educativa No. Tres: Santa Catalina de sena Coordinador del Proyecto
Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas MEN*

Maicao, La Guajira, Colombia

alrasa0420@yahoo.es

Resumen

Se hace un estudio algebraico y geométrico de los campanoides, nuevos objetos basados en los polígonos regulares, se definen, clasifican y muestra el proceso de su construcción. En este trabajo analizo específicamente el Campanoide Triangular indicando sus características, modelo algebraico que lo define y la ecuación para calcular su área en términos de la base, al final se muestran unos mosaicos construidos con estos campanoides.

Introducción

La geometría plana de Euclides enseña la teoría acerca de los polígonos regulares, sus definiciones, características, propiedades e incluso como construirlos; pareciera que todo sobre polígonos regulares estuviera dicho pero hoy con los avances de la tecnología esta geometría ha readquirido un gran interés entre los estudiosos de las matemáticas.

Muchos programas computacionales se han elaborado con el propósito de estudiar y descubrir nuevas relaciones métricas y propiedades de los objetos geométricos, el software CABRI es uno de ellos, su dinamismo y alta ejecutabilidad ha permitido despertar el interés, la curiosidad y motivación en docentes y educandos para estudiar geometría, para hacer matemáticas.

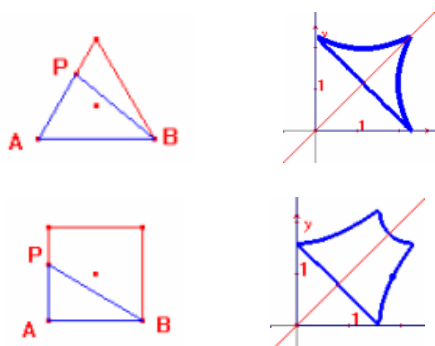
Este trabajo de investigación nace en el momento de descubrir unas curiosas e interesantes figuras al estudiar, en CABRI, la variación de las magnitudes de los lados de un triángulo inscrito en un polígono regular, de tal manera que la base del triángulo es uno de los lados del polígono regular, y a las cuales se les ha denominado CAMPANOIDES, porque de hecho son semejantes a unas campanas.

Sin el dinamismo que ofrece el programa CABRI II hubiese sido imposible haber descubierto estas hermosas figuras a las cuales clasificaremos e indicaremos el proceso de construcción, y luego profundizaremos en el estudio de sus propiedades o características.

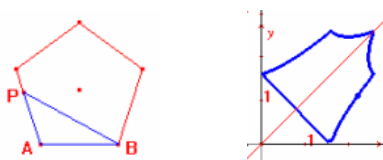
1. Clasificación

Los clasificaremos de acuerdo al polígono regular en el cual se inscribe el triángulo que los genera, por lo que encontraremos campanoides triangulares, cuadrangulares, pentagonales y otros tantos más.

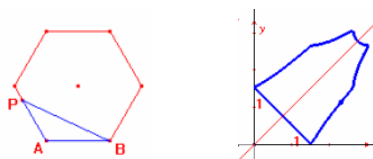
- **Campanoide triangular:** Generado por un triángulo inscrito en otro triángulo equilátero.



- **Campanoide cuadrangular:** Generado por un triángulo inscrito en un cuadrado.
- **Campanoide Pentagonal:** Generado por un triángulo inscrito en un pentágono.



- **Campanoide Hexagonal:** Generado por un triángulo inscrito en un Hexágono.



Y así en lo sucesivo podemos nombrar los demás campanoides generados por triángulos inscrito en polígonos regulares con mayor número de lados.

A continuación se plantea el proceso de construcción de un Campanoide utilizando el ambiente de Cabri

2. Construcción de un Campanoide

- Construya el polígono regular deseado.
- Inscriba un triángulo APB en el polígono regular de tal manera que la base AB del triángulo sea uno de los lados del polígono y el vértice P esté sobre el mismo. (Se recomienda usar colores distintos para cada figura).
- Muestre los ejes en la pantalla y construya semirrectas sobre los semiejes Y^+ y X^+ . (Oculte los puntos que quedaron sobre las semirrectas.)
- Mida las longitudes de AP y de PB .
- Transfíralas respectivamente a los semiejes X^+ y Y^+ (Sobre las semirrectas)

- Trace perpendiculares a los semiejes que pasen por los puntos que aparecieron al transferirlas medidas y ubique el punto de intersección entre ellas, llámelo Q .
- Para mostrar la gráfica puede hacerlo de dos maneras: una es poniéndole traza al punto Q y animando al punto P y la otra es determinando el lugar geométrico de Q con respecto a P .

3. Características de los Campanoides

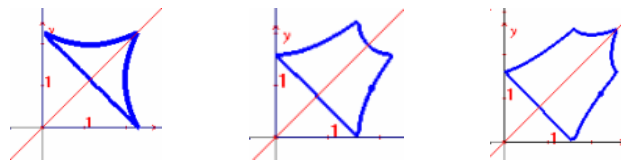
Se expondrá inicialmente algunas características generales y luego otras particulares de los campanoides.

3.1. Características Generales

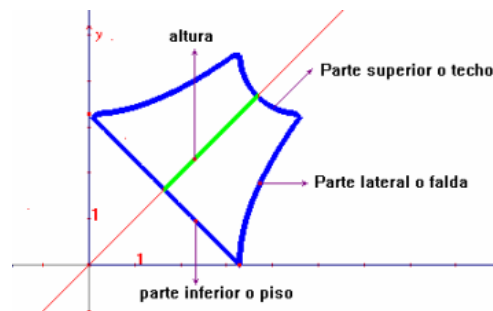
Entre las características generales de los campanoides se encuentran:

Simetría

Todos los campanoides, como se muestra en las figuras, son simétricos con un único eje de simetría, la recta $y = x$



Partes o Elementos



Básicamente podemos identificar cuatro partes en los campanoides como se muestra en la figura anterior, la parte superior o techo, la falda o parte lateral, el piso o parte inferior y su altura.

El techo en los campanoides con número de lados pares es cóncavo y en los que tienen número de lados impares es agudo, **la falda** puede poseer uno o más lados y al igual que en el techo son siempre curvos, mientras que **el piso o base** siempre está formado por un sólo lado recto y perpendicular al eje de simetría.

La **altura** de un campanoide corresponde a la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos de intersección del eje de simetría con el campanoide o bien el segmento trazado perpendicularmente desde el punto medio del piso del campanoide hasta el techo.

Lados del Campanoide

Al observar detenidamente los campanoides se nota claramente que éste tiene tantos lados como el polígono regular que lo genera y además que sólo uno de los lados es recto: el piso o base.

Hablemos un poco de ese lado recto del campanoide, él se genera cuando el punto o vértice P del triángulo inscrito se mueve por la base de éste. Aquí la relación variacional entre las distancias AP y PB es lineal y la relación algebraica que la representa es:

$$y = -x + k$$

La recta corta a los ejes en $(0, k)$ y $(k, 0)$

La longitud del piso o Base de un campanoide en términos de k estará dada por:

$$B = \sqrt{k^2 + k^2} \Rightarrow B = \sqrt{2}k$$

3.2. Características particulares

Básicamente estudiaremos algunas características del *campanoide triangular* y específicamente el como modelarlo a través de relaciones algebraicas y como determinar tanto su altura como su área.

3.2.1. Modelo algebraico del Campanoide Triangular

Luego de unos cálculos algebraicos podemos llegar a definir un campanoide triangular con el siguiente grupo de relaciones matemáticas con su respectivo dominio de restricción:

$$\begin{aligned}x + y &= k, \rightarrow 0 \leq x \leq k \\x^2 - y^2 - kx + k^2 &= 0, \rightarrow 0 \leq x \leq k \\x^2 - y^2 + kx - k^2 &= 0, \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}k \leq x \leq k\end{aligned}$$

3.2.2. Altura del Campanoide Triangular

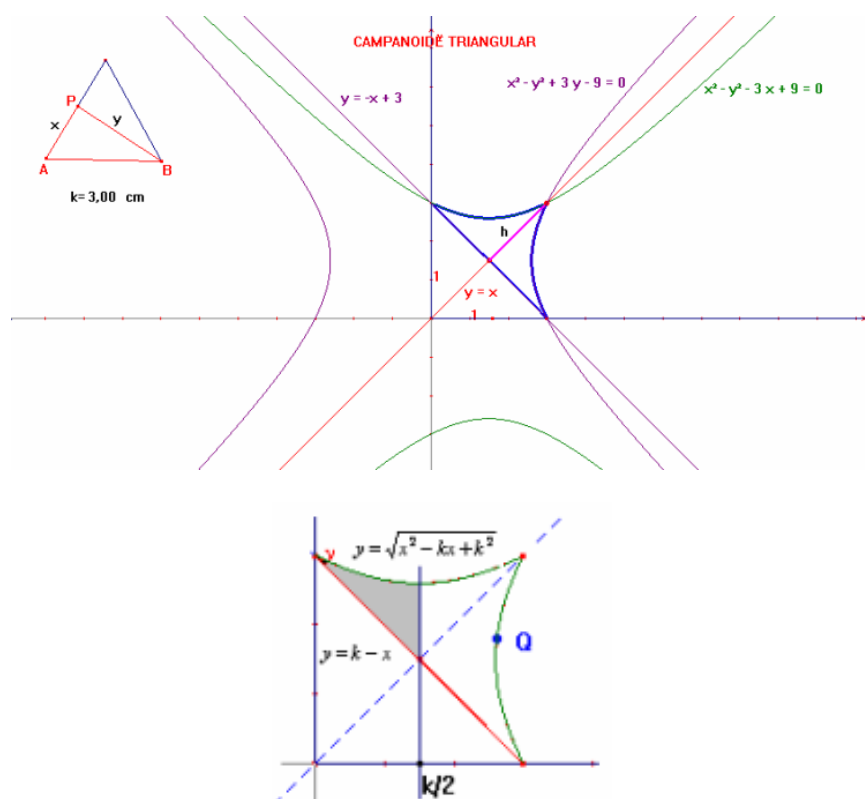
La altura de estos campanoides se puede calcular en términos de la medida del lado del polígono regular que lo genera por medio de la siguiente fórmula matemática: $h = \sqrt{2}k/2$, o en términos de su base así $h = B/2$, ya que corresponde a la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos $(k/2, k/2)$ y (k, k)

En la siguiente figura se muestra un campanoide donde la medida del lado del polígono regular (triángulo equilátero) es $k = 3\text{cm}$.

En ella se observa el eje de simetría, la línea recta y las hipérbolas, que contienen el lado recto y los lados curvos respectivamente, con sus ecuaciones respectivas, además de su altura.

3.2.3. Área del Campanoide Triangular

Por la simetría del campanoide triangular se observa que la parte sombreada de ésta figura corresponde al área entre las curvas $y = \sqrt{x^2 - kx + k^2}$ y $y = k - x$, equivalente a la cuarta parte del área total del campanoide.



Aplicando el cálculo integral podemos hallar una ecuación que permita determinar el área de un campanoide triangular, veamos:

$$A = 4 \int_0^{k/2} \left[(x^2 - kx + k^2)^{1/2} - (k - x) \right] dx$$

Con ayuda de la calculadora TI 92 Plus se encuentra rápidamente que:

$$A = \frac{3 \ln(3) - 2}{4} k^2$$

Sea $\lambda = \frac{3 \ln(3) - 2}{4} \cong 0,32395922$ entonces $A = \lambda k^2$

Si B es la medida de la base o piso del campanoide ésta ecuación se puede transformar en:

$$A = \frac{\lambda B^2}{2} \quad \text{ya que} \quad B = \sqrt{2}k$$

Este estudio es netamente exploratorio y es natural sospechar que son muchas más las características aun ocultas en estos novedosos objetos matemáticos, que tal como se ha analizado el campanoide triangular es posible hacerlo con los otros campanoides. Invito a toda la comunidad de matemáticos a explorar y estudiar estos nuevos objetos matemáticos: Los Campanoides.

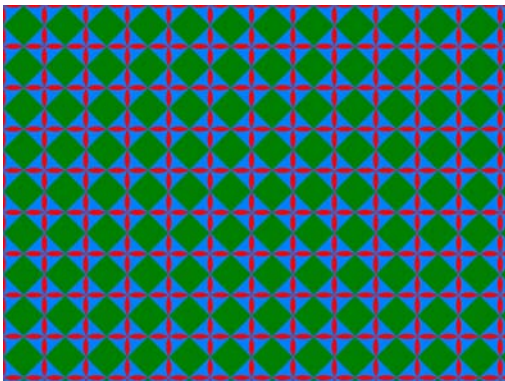
La geometría y el arte a través de la historia han estado relacionadas por su estrecho vínculo en el estudio de las formas y la belleza, los Campanoides con su singular simetría permiten la

construcción de mosaicos, en principio tomamos un Campanoide y se rotan, trasladan o se hallan sus simétricos para componer la pieza que se va a teselar, los colores son arbitrarios y dependen de la creatividad personal, sugiero combinar *Cabri* con *Paint* del accesorio de Windows para hacer la pieza y construir el Mosaico.

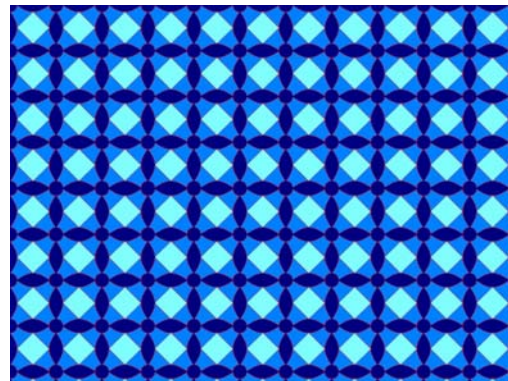
A continuación presentamos unos ejemplos y te invitamos a construir otros.

MOSAICOS CON CAMPANOIDES

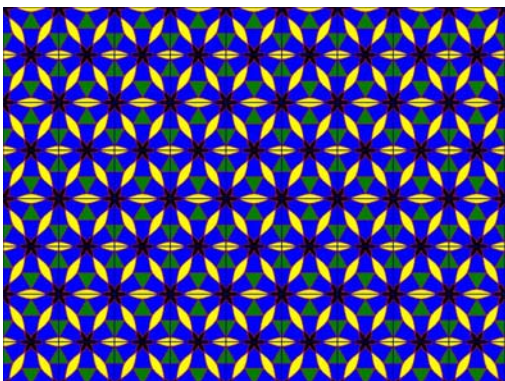
CAMPANOIDES TRIANGULARES



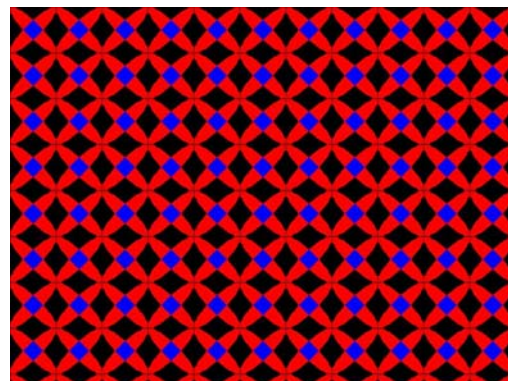
CAMPANOIDES CUADRANGULARES



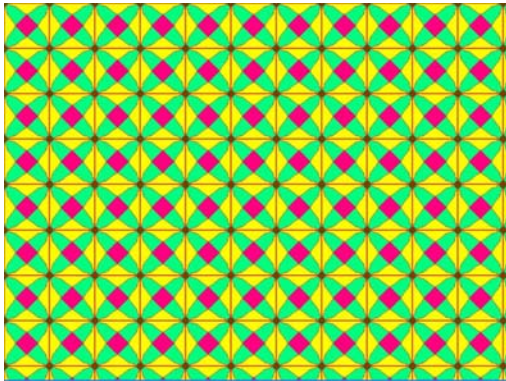
CAMPANOIDES PENTAGONALES



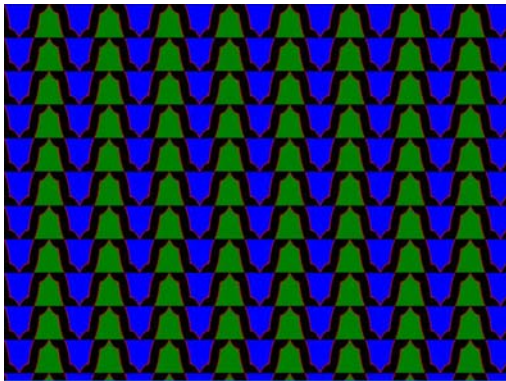
CAMPANOIDES HEPTAGONALES



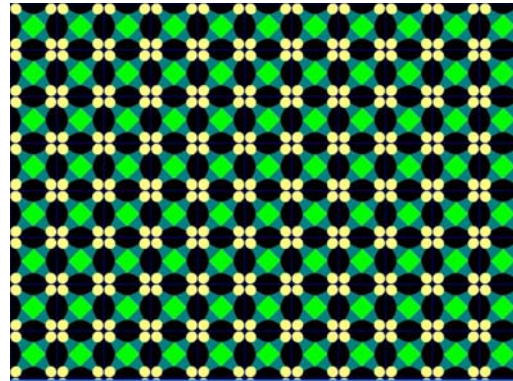
CAMPANOIDES HEXAGONALES



CAMPANOIDES PENTAGONALES



CAMPANOIDES CUADRANGULARES



CAMPANOIDES PENTAGONALES

