Una relación entre la matemática y la escala occidental cromática temperada[1]

Johan Manuel Redondo
Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia

Resumen

The west temperade chromatic scale can to be saw as a set of twelve equivalence class (one by each scale sound) in which act the aditive group mod12 whose elements in musical terms are the alterations (sharps and flats) showing the music with the face of discret dynamical system. With this conceptualization we can build the major and minors scales, diatonics and pentatonics scales, the fifth circle and with a new transformation denominated σ- operator, build melody from numbers sequence.
La escala occidental cromática temperada puede verse como un conjunto de doce clases de equivalencia (una por cada sonido de la escala) sobre la que existe la acción del grupo aditivo módulo 12 cuyos elementos en términos musicales son las alteraciones (sostenidos y bemoles) mostrándonos así a la música, con la cara de un sistema dinámico discreto. A partir de esta concepción matemática se construyen de forma natural y didactica las escalas mayores y menores, las pentatónicas y las diatónicas, conceptos musicales como el de círculo de quintas y además, a partir de una transformación denominada *Operador* σ, es posible utilizar sucesiones de números como recurso para generar melodía en los ejercicios de composición.
Palabras Claves: Temperamento, Escala Cromática, Grupo aditivo, Acción de Grupo, Sistema Dinámico, Escalas, Circulo de Quintas, Sucesiones, Melodía.

1. Introducción

Es bien conocido que la música occidental, desde su concepción en la antigua Grecia con Pitágoras, ha tenido una íntima relación con la matemática. Griegos como Proclus, en el siglo quinto argumentaban que "tal como la aritmética estudia las cantidades, la música estudia la relación entre las cantidades", la cual es definitivamente una concepción matemática de la música. Por otro lado James Joseph Sylvester en 1865 escribe este bellísimo párrafo:

> *¿No podría ser la música descrita como la matemática del sentido y la matemática como la música de la razón? El alma de cada una es la misma! Esto es, los músicos sienten matemáticas, los matemáticos piensan música, -la música es el sueño, la matemática el trabajo de la vida-, cada una recibe su consumación desde la otra.*

El trabajo matemático-musical que me propongo realizar, se desarrolla en el sistema que divide a la octava en doce semitonos con *Temperamento Igual* o *Escala Bien Temperada*. Esta

[1]Presentada en el XIX encuentro de geometría y sus aplicaciones y VII Encuentro de aritmética.

construcción es denominada *Escala Occidental Cromática* T*emperada*, o sencillamente, *Escala Cromática*, como la designaremos en este documento.

En acústica, según anota Pardo (1961), el temperamento es el sistema que divide el intervalo de octava en un determinado número de sonidos de distinta altura. Así, el propuesto por Huygens comprendía 31 sonidos. Teóricamente desde luego, porque en la práctica, con la palabra temperamento se designaron los sistemas que dividen la octava en doce semitonos: los principales fueron el antiguo temperamento desigual y el moderno temperamento igual.

Se limitaron a doce sonidos por octava, para que los instrumentos de teclado pudieran ser manejados en varias octavas por un solo ejecutante, - continua explicando Pardo-, siete teclas blancas para los sonidos naturales de la escala diatónica y cinco negras para los sonidos alterados.

El temperamento igual fue propuesto inicialmente por Werckmeister en 1691 y realizado en la práctica por Neidhart en 1706, pero fue Juan Sebastián Bach quien de forma decidida demostró como este sistema permitía expresarse en todas las tonalidades de bemoles y sostenidos, haciendo también posible la modulación a tonalidades lejanas[2]. Con este propósito Juan Sebastián Bach escribe *El Clave Bien Temperado*.

Con el desarrollo de la armonía y la muy generalizada aceptación de la escala cromática, la música occidental no sólo se estableció de forma muy consistente en Europa y América, además, ha venido conquistando tanto el gusto como el mercado musical mundial. No obstante, no es del gusto de algunas personas restringirse a la escala cromática pues, entre las muchas razones, argumentan que el oído humano tiene un rango auditivo demasiado amplio[3] como para limitarlo a las pocas frecuencias que representan las 10 octavas de sonidos posibles del piano. Personalmente no dudo de la capacidad que puedan tener muchas personas de percibir y distinguir todos los sonidos que son posibles dentro de este espectro auditivo, pero genuinamente parece ser más un acto de pedantería que verdaderamente un trabajo de enriquecimiento musical el que la mayoría de ellos propone. Al respecto mencionare algunas de las razones por las cuales considero que la escala cromática es suficiente, además de las ya mencionadas desde el punto de vista técnico referentes al temperamento.

La primera razón es de carácter cultural. La mayoría de la música que escuchamos en radio -y esto incluye a la música clásica y al jazz- esta restringida y construida sobre estos doce sonidos. La explicación es que dentro de la escala cromática es posible construir otro buen número de muy útiles escalas. Por ejemplo la escala pentatónica, utilizada en música andina y blues, esta constituida por cinco de los 12 sonidos de la escala cromática. La escala diatónica, utilizada en el pop, el rock, la música folclórica y muchos otros géneros musicales, consiste de siete sonidos de la escala cromática. La escala árabe y muchas otras escalas autóctonas de regiones diferentes a las de los países del mundo occidental, pueden ser construidas a partir de sonidos de la escala cromática.

La segunda razón es la educativa. No nos enseñaron a escuchar otras escalas, de hecho muchas grandes escuelas de música no tienen en sus cursos de formalización teórica el estudio de los sonidos que es posible encontrar entre los doce sonidos de la escala cromática sin incluir a estos y que llevan a una percepción mucho más refinada del oído.

[2]Pardo Tovar Andres, El Clave Bien Temperado de Juan Sebastián Bach (Notas Explicativas), Imprenta Nacional, Bogotá 1961.

[3]El rango auditivo humano se considera desde los 20Hz hasta los 20.000Hz.

La tercera razón es que si bien un buen número de instrumentos pueden interpretar más sonidos de los que la escala cromática sugiere, como lo instrumentos de cuerda sin trastes (el violín, la viola, el chelo, el contrabajo), o los instrumentos de vara (el trombón de vara) y pistones (trompeta, trombón de pistones), es también grande el número de instrumentos que no pueden acceder a estas escalas porque han sido diseñados exclusivamente para interpretar la escala cromática. Es el caso de los instrumentos con traste, los instrumentos eléctricos (guitarra, bajo, piano) y la mayoría de instrumentos de viento (flauta traversa, clarinete, saxofón, oboe, fagot). Estos últimos además gozan de mucha popularidad; la mayoría de niños en su infancia se acercaron más a la guitarra, al bajo, al saxofón y por supuesto al piano -que además parece dar estatus social-, todos estos limitados a la escala cromática -como recién he mencionado-, que a otros instrumentos de naturaleza más abierta al sonido.

Para terminar esta introducción quisiera simplemente referir algún tipo de pre-requisitos para la lectura y correcta comprensión de este documento. Por un lado lo musical, acerca de lo cual es relevante saber que la música modernamente tiene varias formas de escritura, la más aceptada por su rigurosidad es la escritura que se realiza en el pentagrama, pero otras formas como la tablatura y el cifrado americano, también han venido a ser grandemente utilizadas por su capacidad practica innegable[4]. Al respecto, en este documento se utilizará el cifrado americano de forma sistemática. Otros conceptos de tipo armónico pueden ser consultados en el hermoso libro *Armonía* de Walter Piston[5].

Por el lado matemático se tratarán conceptos elementales de álgebra abstracta que pueden ser consultados en cualquier libro estándar de este tema y cuestiones sobre sistemas dinámicos que preferiblemente pueden ser revisadas en el libro de ecuaciones diferenciales de Hirsch-Smale[6].

2. El espacio y la acción de grupo

2.1. El conjunto ($\mathbb{M}$) de las notas musicales de la escala cromática

Si bien la escala musical cromática consiste de doce sonidos, estos se repiten periódicamente. Cada vez que lo hace se dice que ha recorrido una *Octava.* Es decir, la *octava* comprende los sonidos que van desde A_i hasta A_j con $j-i=1$, donde A_k representa el sonido *La* -en notación de cifrado americano- de la *k-ésima octava* con $k=0,..,9$. Se toma a *La* como referencia para ser coherente con lo tradicionalmente aceptado en música, pero podría haber sido cualquier otro sonido de la escala cromática. El vocablo octava se refiere a la connotación que se hace de la escala cromática restringida a una escala diatónica mayor, al respecto de la cual haremos referencia más adelante. Por ahora definiremos el *Conjunto* $\mathbb{M}$ *de todas las notas musicales de la escala cromática* de dos maneras diferentes pero equivalentes. Primeramente desde los sostenidos:

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_{\#}=\{&A_0,A\#_0,B_0,C_0,C\#_0,D_0,D\#_0,E_0,F_0,F\#_0,G_0,G\#_0,\\ &A_1,A\#_1,B_1,C_1,C\#_1,D_1,D\#_1,E_1,F_1,F\#_1,G_1,G\#_1,...,\\ &A_9,A\#_9,B_9,C_9,C\#_9,D_9,D\#_9,E_9,F_9,F\#_9,G_9,G\#_9\}\end{aligned}$$

El símbolo # denota la alteración que sobre la nota se conoce como sostenido. Los sostenidos

[4] Al respecto se puede consultar: Guzmán 1998 y Piston 2003

[5] Piston Walter, Armonía, Idea Books S.A., Barcelona, 2001.

[6] Hirsch Morris, Smale Stephen, Differential Equation Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic Press Inc, New York, 1974.

son alteraciones que mueven la nota musical sobre la que actúan medio tono hacia adelante.

Desde los bemoles el conjunto $\mathbb{M}$ es como sigue:

$$\mathbb{M}_b = \{A_0, Bb_0, B_0, C_0, Db_0, D_0, Eb_0, E_0, F_0, Gb_0, G_0, Ab_0,$$
$$A_1, Bb_1, B_1, C_1, Db_1, D_1, Eb_1, E_1, F_1, Gb_1, G_1, Ab_1, , ...,$$
$$A_9, Bb_9, B_9, C_9, Db_9, D_9, Eb_9, E_9, F_9, Gb_9, G_9, Ab_9\}$$

Los bemoles son denotados con la letra b y juegan el mismo papel del sostenido pero en sentido contrario, pues mueven la nota medio tono pero hacia atrás. En conclusión, el conjunto $\mathbb{M} = \mathbb{M}_\# = \mathbb{M}_b$, pues lo único que cambia es la nomenclatura. En general, hablaremos de $\mathbb{M}$ queriendo referirnos a $\mathbb{M}_\#$, por razones de comodidad.

2.2. La escala cromática base ($\mathbb{B}$)

Construyendo el conjunto cociente $\mathbb{M}/\mathbb{Z}_{10}$ de las clases de equivalencia de $\mathbb{M}$ módulo 10, obtenemos el conjunto que denominaremos *Escala Cromática Base* ($\mathbb{B}$). Ésta escala es como sigue:

$$\mathbb{B}=\{C, C\#, D, D\#, E, F, F\#, G, G\#, A, A\#, B\}$$

Donde cada $N \in \mathbb{B}$ es la clase de equivalencia de todos los $N_i \in \mathbb{M}$ con $i = 0, ..,9$.

Note que musicalmente hablando no tiene sentido hablar de una aplicación $* : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ porque sobre este conjunto no es posible definir una operación interna de los elementos de $\mathbb{B}$.

2.3. El sostenido

El sostenido es una función $\# : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ biyectiva cuya inversa es la función bemól $b : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, que a cada nota musical le asigna su alteración. La composición de sostenidos se define:

$$\#^n(N) := \#(...\#(N)...) \qquad \forall_N \in \mathbb{B} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Bajo esta operación los sostenidos tienen estructura de grupo, el cual es isomorfo al grupo aditivo módulo 12 de los enteros. Esto se puede observar claramente pues verifica:

i) $\#^n \circ \#^m = \#^{n+m} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$

ii) $\#^0 : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ es la identidad

iii) $\#^n$ tiene inversa $\#^{-n} = b^n$

El sostenido es entonces un *Sistema Dinámico Discreto* sobre la escala cromática base. Es decir, el sostenido es una función $\# : \mathbb{Z} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ tales que $\#(n, N) := \#^n(N) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$. Diremos entonces que el sostenido es un grupo uno-paramétrico que actúa sobre la escala cromática base.

2.4. Escalas

Una sucesión de sonidos constitutivos de un sistema que se suceden regularmente en sentido ascendente o descendente y todos ellos con relación a una nota que da nombre a la escala o tónica, se conoce como la *escala musical*. Las notas en una escala no guardan entre sí iguales intervalos. Por ejemplo, la *escala diatónica* se forma a partir de las distancias de tono y semitono, con lo cual queda conformada por siete notas. Las escalas diatónicas son las más conocidas y usadas (escala mayor y escala menor en sentido moderno).

También es posible construir escalas que solo contengan cinco notas, separadas por un tono, o por un tono y medio, esta escala se conoce como *escala pentatónica*, es la más simple de todas y probablemente la más utilizada en estilos como el blues, el heavy metal y el rock.

La *tonalidad* es el conjunto organizado de notas alrededor de una tónica. Esto significa que hay una nota central soportada, de una u otra forma, por todas las demás notas. Las escalas más populares en la música occidental construidas a partir de la escala cromática se dividen[7] en:

- *Mayores (M)*
  - Pentatónica (cinco sonidos)
  - Diatónica (siete sonidos)
    - Jónica[8]
    - Lidia
    - Mixolidia
- *Menores (m)*
  - Pentatónica
  - Diatónica
    - Dórica
    - Frigia
    - Eólica[9]
    - Natural
    - Armónica
    - Melódica
      - Ascendente
      - Descendente
- *Aumentadas*

[7]Esta clasificación podría mejorarse particionando en mayores, menores, aumentadas y disminuidas. Pero la mayoría de las escalas aumentadas y disminuídas están constituídas de forma muy específica e inusual, por lo que solo la mencionaré. Si el lector desea, podría construir la escala de su interés a partir de los ejemplos que se presentan aquí para tener un esquema más completo.

[8]La escala Diatónica Mayor es equivalente modernamente al modo Jónico de las escalas eclesiásticas.

[9]Que coincide con la escala natural menor y es la relativa menor de las escala mayor diatónica.

Disminuídas

Locria[10]

Una escala E con n elementos es una aplicación $E : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}^n$ con $n = 1, ..., 12$, tales que a cada $N \in \mathbb{B}$ se le asigna $E(N) = (\#^0, ..., \#^k, ..., \#^j)(N) = (\#^0(N), ..., \#^k(N), ..., \#^j(N))$ con $0 < ... < k < ... < j < 12$.

A partir de la definición es posible definir las escalas de nuestra clasificación como sigue:

La escala Pentatónica Mayor $E_M^P = (\#^0, \#^2, \#^5, \#^7, \#^9)$

La escala Diatónica Mayor Jónica $E_{MJ}^D = (\#^0, \#^2, \#^4, \#^5, \#^7, \#^9, \#^{11})$

La escala Diatónica Mayor Lídia $E_{ML}^D = (\#^0, \#^2, \#^4, \#^6, \#^7, \#^9, \#^{11})$

La escala Diatónica Mayor Mixolídia $E_M^D = (\#^0, \#^2, \#^4, \#^5, \#^7, \#^9, \#^{10})$

La escala Pentatónica Menor $E_m^P = (\#^0, \#^2, \#^4, \#^5, \#^7, \#^9, \#^{11})$

La escala Diatónica Menor Dórica $E_{mD}^D = (\#^0, \#^2, \#^3, \#^5, \#^7, \#^9, \#^{10})$

La escala Diatónica Menor Frígia $E_{mF}^D = (\#^0, \#^1, \#^3, \#^5, \#^7, \#^8, \#^{10})$

La escala Diatónica Menor Eólica $E_{mE}^D = (\#^0, \#^2, \#^3, \#^5, \#^7, \#^8, \#^{10})$

La escala Diatónica Menor Armónica $E_{mA}^D = (\#^0, \#^2, \#^3, \#^5, \#^7, \#^8, \#^{11})$

La escala Diatónica Menor Melódica Ascendente $E_{mM1}^D = (\#^0, \#^2, \#^3, \#^5, \#^7, \#^9, \#^{11})$

La escala Diatónica Menor Melódica Descendente $E_{mM2}^D = (\#^0, \#^2, \#^3, \#^5, \#^7, \#^8, \#^{10})$

Ahora, si por ejemplo quisiéramos construir la escala mayor de Do escribiríamos:

$$\begin{aligned} E_{MJ}^D(C) &= (\#^0, \#^2, \#^4, \#^5, \#^7, \#^9, \#^{11})(C) \\ &= (\#^0(C), \#^2(C), \#^4(C), \#^5(C), \#^7(C), \#^9(C), \#^{11}(C)) \\ &= (C, D, E, F, G, A, B) \end{aligned}$$

2.5. El Círculo de Quintas

El círculo de quintas es una herramienta que se utiliza en música para identificar el número de sostenidos o bemoles que posee una escala diatónica. Al ser estos identificados, se escriben en el pentagrama con el orden específico en el que van apareciendo, conformando una estructura que en el pentagrama se denomina *la armadura*. La armadura es importante porque esta determina que valores musicales en la interpretación de la pieza serán tomados como sonidos naturales y cuales serán interpretados con alteraciones. Cuando esto no se tiene en cuenta, es posible que la pieza musical suene desafinada.

Para construir el círculo de quintas en nuestro contexto, tomemos la aplicación $\#^7 : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ que

[10]Ésta escala junto a las escalas Jónica, Lídia, Mixolídia, Dórica, Frígia y Eólica, pertenecen a los modos eclesiasticos antiguos.

a cada $N \in \mathbb{B}$ le asigna $\#^7(N) \in \mathbb{B}$. Si hacemos $N = C$ (la nota Do), obtenemos $\#^7(C) = G$. Al iterar este resultado resulta:

$$N = C$$
$$\#^7(C) = G$$
$$\#^7(G) = (\#^7)^2(C) = D$$
$$\#^7(D) = (\#^7)^3(C) = A$$
$$\#^7(A) = (\#^7)^4(C) = E$$
$$\#^7(E) = (\#^7)^5(C) = B$$
$$\#^7(B) = (\#^7)^6(C) = F\#$$
$$\#^7(F\#) = (\#^7)^7(C) = C\#$$
$$\#^7(C\#) = (\#^7)^8(C) = G\#$$
$$\#^7(G\#) = (\#^7)^9(C) = D\#$$
$$\#^7(D\#) = (\#^7)^{10}(C) = A\#$$
$$\#^7(A\#) = (\#^7)^{11}(C) = E\#$$
$$\#^7(E\#) = (\#^7)^{12}(C) = C$$

A la $12-$áva iteración el sistema obviamente recupera la semilla. Ahora tomemos la aplicación $b^7 : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ que a cada $N \in \mathbb{B}$ le asigna $b^7(N) \in \mathbb{B}$. Si nuevamente hacemos $N = C$ e iteramos encontramos:

$$N = C$$
$$b^7(C) = F$$
$$b^7(F) = (b^7)^2(C) = Bb$$
$$b^7(Bb) = (b^7)^3(C) = Eb$$
$$b^7(Eb) = (b^7)^4(C) = Ab$$
$$b^7(Ab) = (b^7)^5(C) = Db$$
$$b^7(Db) = (b^7)^6(C) = Gb$$
$$b^7(Gb) = (b^7)^7(C) = B$$
$$b^7(B) = (b^7)^8(C) = E$$
$$b^7(E) = (b^7)^9(C) = A$$
$$b^7(A) = (b^7)^{10}(C) = D$$
$$b^7(D) = (b^7)^{11}(C) = G$$

$$b^7(G) = (b^7)^{12}(C) = C$$

A la $12-$áva iteración el sistema recupera nuevamente la semilla.

Hemos tomado la nota musical Do como semilla fundamentalmente porque su escala mayor diatónica carece de alteraciones. La aplicación tenia que ser $\#^7 : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ porque bajo la acción de este operador el Do es transformado en Sol, cuya escala diatónica mayor es la única que posee un sostenido. Al iterar bajo esta aplicación a Sol se obtuvo Re, cuya escala diatónica mayor es la única que posee dos sostenidos. Curioso pero maravilloso, al aplicar $n-$veces $\#^7 : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ se llega a la nota cuya escala mayor diatónica tiene $n-$sostenidos (módulo 12).

Lo mismo sucede con la aplicación $b^7 : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, pues, nuevamente, si iniciamos con Do, por las razones que ya se explicaron, se obtiene a Fa, cuya escala mayor diatónica es la única que posee un bemol. Al iterar llegamos a Si bemol, que es la única escala mayor diatónica que posee dos bemoles. Para la $n-$ésima iteración de $b^7 : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ se consigue la nota cuya escala tiene $n-$bemoles (módulo 12).

Como conclusión, la órbita de Do bajo las aplicaciones $\#^7 : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ (isomorfo al ideal $7\mathbb{Z}$ del anillo $\mathbb{Z}_{12}$) y $b^7 : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ (isomorfo al ideal $5\mathbb{Z}$ del anillo $\mathbb{Z}_{12}$) es el círculo de quintas con el cual es construida la armadura de una pieza musical.

2.6. El operador σ

Suponga que se tiene una sucesión de números $s = \{a_1, ..., a_k, ...\}$ con $a_k \in \mathbb{Z}_n$, y se desea a partir de ellos construir una secuencia melódica cuyos elementos estan en $E(N) \in \mathbb{B}^n$, $1 \leq n \leq 12$. Con este objeto definimos la transformación que denominaremos *Operador* σ de la siguiente manera:

$$\sigma : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^m \qquad\qquad E(N) \to \sigma(E(N))$$

Donde $\sigma = (b_{ij})$ con $i = 1, ...m$, $j = 1, ..., n$, es una matriz de transformación tales que:

$$b_{ij} = 0 \qquad \text{Si } i = k,\ j \neq a_k,\ k = 1, ..., m$$

$$b_{ij} = 1 \qquad \text{Si } i = k,\ j = a_k,\ k = 1, ..., m$$

Como ejemplo, supongase que tomamos la sucesión de los números que son los residuos de dividir uno en siete $\{1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, ...\}$. Y que deseamos ver la secuencia melódica que es generada a partir de elementos de la escala diatónica mayor jónica de Do. Entonces, según la definición, tenemos que $a_{11} = a_{23} = a_{32} = a_{46} = a_{54} = a_{65} = 1$ y todos los demás elementos de σ son cero. Entonces:

$$\sigma(E^D_{MJ}(C)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ E \\ D \\ A \\ F \\ G \end{pmatrix}$$

La secuencia melódica obtenida es (C, E, D, A, F, G). Solo basta asignarle a cada uno de los elementos de esta sucesión un valor rítmico para obtener así la melodia que nos proponiamos: *La melodía de la dinámica de los residuos de dividir uno en siete.*

Agradecimientos

Si bien todo este trabajo nació como iniciativa propia, es meritório destacar el grupo de personas que contribuyo en mi proceso de comprensión de estas ideas.

A Reinaldo Nuñez quien desde que me conocio me insistio en este trabajo. A los estudiantes del pregrado en matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda, Camilo Vargas, Miguel Correa y Leonardo Grever, con quienes construimos muchos ejemplos e hicimos la primera puesta en común de estas ideas. A David Blazquez quien descubrio nuestra incomprensión y nos ayudo a ver el sistema dinámico en los sostenidos, además de cariñosamente revisar este documento. Y a Jesús Hernando Pérez, Carlos Luque y Sergio Carrillo quienes tambien tuvieron la paciencia de revisar este documento.

Bibliografía

[1] Fauvel John, Flood Raymond, Wilson Robin, *Music and Mathematics*, Oxford University, 2003.

[2] Hirsch Morris, Smale Stephen, *Differential Equation Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press Inc, New York, 1974.

[3] Hungerford Thomas, *Algebra*, Springer Verlag, New York, 1974.

[4] Johnson Timothy A., *Foundations of Diatonic Theory*, Key College Publishing, 2003.

[5] Pardo Tovar Andres, *El Clave Bien Temperado de Juan Sebastián Bach* (Notas Explicativas), Imprenta Nacional, Bogotá 1961.

[6] Piston Walter, *Armonía*, Idea Books S.A., Barcelona, 2001.