EL ÁREA BAJO LA CURVA. CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO EN CONTEXTOS FÍSICOS

Mario Armando Giordano Moreno e Ignacio Garnica y Dovala
Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 4 "Lázaro Cárdenas del Río". México
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.IPN.
mgiordano@prodigy.net.mx, igarnicad@gmail.com

Resumen. Se desarrolló una estrategia de enseñanza con el objetivo de hacer significativos conceptos relativos al teorema fundamental del cálculo en el contexto de la realización de prácticas en el laboratorio de Física. La estrategia se orientó a dotar de sentido al concepto de área bajo la curva, a partir de resultados obtenidos de los experimentos movimiento rectilíneo uniforme, movimiento rectilíneo uniformemente variado y elongación de un resorte. Se analizó el caso de un estudiante ante la tarea de dotar de significado al área bajo la función fuerza ejercida sobre un resorte. El estudiante llegó a reconocer la relación entre la fuerza ejercida y el trabajo acumulado en el resorte en términos de una función y una función antiderivada correspondiente, sin embargo no se logró observar en su desempeño un reconocimiento del teorema en el sentido de la equivalencia entre la razón de cambiodel área bajo la curva de la función y la función misma

Palabras clave: cálculo, teorema fundamental, contextos físicos

Abstract. It was developed a learning strategy in order to make sense about concepts referred to the fundamental theorem of the calculus in the context of Physics laboratory. The strategy was aimed to make sense referred to the concept of area under the curve, beginning from results obtained of the experiments uniform linear motion, uniform varied linear motion an elongation of a spring. It was analyzed the performance of a student challenging the task of to make sense respect to the area under the curve corresponding to the force exerted on a spring. This student was able to recognize the relation between the force function and the accumulated energyin terms of a function and an antiderivative, however it was not observed in his performance recognition of the theorem in the sense of equivalence between the rate of change of area under the curve of the function and the function itself

Key words: calculus, fundamental theorem, physical contexts

Introducción

El enfoque en competencias busca promover la articulación de contenidos, no solo al interior de cada disciplina, sino estableciendo conexiones con otras disciplinas. En este sentido, las matemáticas se corresponden con otras asignaturas, entre ellas las de ciencias. Si bien tal correspondencia está justificada históricamente, por ejemplo, el desarrollo del Cálculo ante la necesidad de describir el movimiento en la Física de Newton, en el contexto de la enseñanza es necesario construir conexiones entre las ciencias y las matemáticas de manera que tales correspondencias lleguen a ser valoradas por profesores y por estudiantes,promoviendo una comprensión más rica de los conceptos científicos y de los conceptos y los procedimientos matemáticos que se ponen en juego al llevar a cabo experiencias concretas como las que se practican en un laboratorio de Física.A partir de estas consideraciones y con el propósito de incorporar en la enseñanza del Cálculo en el bachillerato tecnológico experimentos típicos de la Física, como contextos reales, se aplicó una estrategia de enseñanzapara que los estudiantes de quinto semestre (17 años) descubrieran relaciones entre dos funciones asociadas mediante la antiderivada, en los casos de la velocidad de un objeto y su desplazamiento y de la elongación de un resorte y el trabajo acumulado. La estrategia se sustentó en la construcción y el análisis de representaciones de los fenómenos físicos, a partir de los datos recogidos de los experimentos respectivos. El objetivo de investigación fue determinar de qué manera esta incorporación de experiencias promueve la dotación de sentido al área bajo una curva y contribuye a la comprensión del teorema fundamental del cálculo (TFC).

Marco de referencia

Las partes que constituyen el TFC.Edwards (1979) señala la equivalencia entre la variación instantánea del área bajo una curva y el valor funcional correspondiente a dicha curva, como la noción embrionaria del TFC. Es decir, este teorema establece la relación entre una función y la función área asociada. Algunos autores consideran el teorema fundamental en dos partes; una referida a la equivalencia señalada por Edwards, y la otra que reglamenta a la integral definida (teorema de Barrow; Cruse & Lehman, 1982). Si bien ambas partes son complementarias, o de forma más precisa, una, la regla para evaluar integrales, es consecuencia de la otra: "la razón de cambio del área bajo la curva $y = f(x)$ conforme x crece es igual a la altura de la curva en el punto x" (Courant & Robbins, 2002, p. 479), consideramos que los procesos cognitivos involucrados en cada una son distintos. Al respecto, Orton (1983) señala que si bien los estudiantes pueden llegar a ejecutar con eficacia procedimientos rutinarios para la obtención de funciones derivadas o de funciones antiderivadas, en contraste, su comprensión conceptual de los conceptos y de los procedimientos involucrados es limitada. Mientras que la evaluación de una integral definida se fundamenta en la capacidad de determinar una antiderivada conveniente y operar con eficiencia, llegar a establecer una relación significativa entre una función y la función área asociada a ella requiere de una coordinación entre registros asociados a esas dos funciones y entre procesos de cambio y procesos de acumulación, particularmente entre la razón de cambio del área bajo la curva y el valor funcional de ésta.

El contexto curricular. El programa de estudios (SEMS, 2009) al que atañe esta investigación señala como actividades sustantivas de aprendizaje que los estudiantes analicen el problema que dio origen al cálculo integral y sus propuestas de solución, que deduzcan la relación entre el método de las particiones y la integral definida einvestiguen el teorema fundamental del cálculo y las propiedades de la integral definida. También se señalan actividades sustantivas de enseñanza (centradas en el profesor) como las siguientes: propone un ejercicio guiado para determinar el área bajo una curva y así llegar al concepto de la integral definida, induce a la investigación del teorema fundamental del cálculo integral. Se espera que los estudiantes utilicen el teorema fundamental del cálculo como herramienta en la solución de problemas geométricos y en otros ámbitos del conocimiento. Consideramos que los estudiantes pueden avanzar hacia la consolidación de la relación entre las dos partes de que consta el TFC mediante la realización de actividades de aprendizaje dirigidas a hacer explícita y significativa la equivalencia entre la razón de cambio del área bajo la curva y su propio valor funcional. El punto de partida para esas actividades está en el tratamiento matemático de la información obtenida por los propios estudiantes al llevar a cabo experiencias en el laboratorio de Física.

Métodos e instrumentos

Se concibe esta experiencia como un proceso de enseñanza-investigación en el que el profesor planea yconduce las actividades de enseñanza y de aprendizaje y simultáneamente recoge registros del desempeño de sus estudiantes.Los métodos e instrumentos se definen a partir de la reflexión y la discusión generadas en el seminario referido.A continuación se describen las fases planeadas y llevadas a cabopara el desarrollo de la estrategia de enseñanza y la recolección de registros. Se presentan en el orden en el que fueron realizadas:

- *Exploración de las nociones que los estudiantes tenían relativas a la construcción* e *interpretación de gráficas de relaciones funcionales y procesos de acumulación*.A un grupo de estudiantes de Cálculo Integral del quinto semestre del bachillerato tecnológico se les aplicó un cuestionario formado por cuatro reactivos,el primero de opción múltiple y los tres restantes de respuesta abierta. El primero requiere seleccionar la gráfica de fuerza contra distancia que representa adecuadamente la elevación de una persona por un ascensor y justificar la selección realizada. El segundo requiere formular afirmaciones referidas a la información que perciben de un gráfico que presenta los movimientos registrados en una cuenta bancaria a lo largo de una semana. El tercer reactivo plantea un movimiento de caída libre en el que se pide elaborar una gráfica de velocidad contra tiempo, conocida la velocidad en función del tiempo, se pide también calcular el área limitada por la curva y el eje de las abscisas, así como atribuir significado al resultado obtenido. El cuarto reactivorequierecalcular el área limitada por la gráfica de una parábola y el eje de las abscisas, proporcionadas la gráfica y la ecuación. El diagnóstico fue aplicado a 60 estudiantes que formaban parte de los tres grupos atendidos durante el semestre “2012/2013-A” por uno de los autores de este reporte. El total de estudiantes atendidos en dicho periodo fue de 90.

- *Enseñanza del concepto de función área*. Se desarrolló el concepto de función área como un medio para calcular áreas contenidas por curvas. Se empleó el método de particiones para deducir casos sencillos de reglas para calcular áreas bajo curvas y se llevaron a cabo actividades de enseñanza y de aprendizaje orientadas a establecer la relación entre una función y la función área asociada, en términos de función derivada y función primitiva, abordando situaciones geométricas. Esta fase de actividad fue llevada a cabo en el aula, con la participación del total de estudiantesatendidos.

- *Realización de prácticas en el laboratorio de Física*.En colaboración con un profesor de Física — participante en el seminario— en una sola sesión se llevaron a cabo las prácticas de *movimiento rectilíneo uniforme* (MRU), *movimiento rectilíneo uniformemente variado* (MRUV) y *elongación de un resorte* (ER).Considerando las limitantes de espacio, tanto físico como temporal, que impone el desarrollo de un curso en condiciones institucionales,se seleccionó a un grupo de 13 estudiantes, quienes realizaron, en equipos de trabajo, cada una de las tres experiencias utilizando aparatosconvencionales de un laboratorio de Física y siguiendo un guión de actividad elaborado especialmente para esta fase.
- *Análisis de la relación entre desplazamiento y velocidad para el caso del MRU*. Esta actividad se llevó a cabo con el total de estudiantes atendidos y utilizando los datos recogidos en los experimentos de laboratorio. Una vez construida la gráfica de desplazamiento contra tiempo, se procedió a encontrar un modelo funcional de esta relación. Esta actividad fue orientada mediante preguntas como las siguientes: ¿qué tipo de movimiento está representado por los pares (tiempo, desplazamiento)?, ¿cómo es la relación entre desplazamiento y tiempo? La siguiente actividad consistió en encontrar la velocidad, para lo cual se recurrió al cálculo de velocidades medias por intervalos, los obtenidos directamente del experimento. Con estos antecedentes se procedió a establecer la relación entre desplazamiento y velocidad tanto desde un enfoque de la Física como desde un enfoque del Cálculo. En el primero, la discusión se centró en descubrir la forma en que ambas magnitudes están intrínsecamente representadas. En el segundo,la discusión se centró en establecer la relación entre la función área en la gráfica de velocidad y el valor funcional de la gráfica de desplazamiento.
- *Análisis de la relación entre desplazamiento y velocidad para el caso del MRUV*.La actividad se realizó con el total de los estudiantes atendidos,se llevó a cabo en equipos colaborativos ysiguiendo instrucciones impresas en hojas de trabajo.La primera parte consistió enconstruir una gráfica de los pares (tiempo, desplazamiento) y determinar la velocidad. A diferencia del experimento de MRU, en el que los intervalos de tiempo pueden asumirse prácticamente constantes, en el de MRUV estos intervalos decrecen, dado que las lecturas se hacen a intervalos constantes de desplazamiento sobre una regleta graduada, lo cual representa una dificultad adicional para la estimación de la velocidad.

Esto se resolvió también recurriendo al cálculo de velocidades medias por intervalos. A partir de ese momento, la secuencia se orientó aestablecer una relación entre desplazamiento y velocidad, mediante la comparación entre valores obtenidos del área limitada por la gráfica de velocidad y valores correspondientes —para un intervalo de tiempo dado— en la gráfica de desplazamiento.

- *Entrevista en cámara Gesell*.Para esta fase se preparó un guión de entrevista cuyo objetivo fue registrar y analizar el desempeño de un estudiante ante la tarea de dotar de significado a la gráfica obtenida del experimento ER.El estudiante seleccionado para la entrevista participó en todas las fases previas de la estrategia de enseñanza, teniendo un desempeño aceptable.

Resultados

Se presentan resultados obtenidos de la estrategia de enseñanza en tres partes. En la primera se señalan, de manera resumida, resultados del cuestionario de indagación. En la segunda se presentan resultados generales de las actividades llevadas a cabo con la totalidad de los estudiantes, esencialmente de las que consistieron en el trabajo en el aula con los datos de los experimentos de movimiento. En la tercera parte se describen tres episodios de la entrevista realizada.

- *Cuestionario de indagación*.El análisis de las respuestas lleva a los siguientes resultados. Reactivo 1: en 30 casos seasocia correctamente la representación gráfica con el enunciado, reconociendo el invariante en la situación planteada. Reactivo 2: en 8 casos se reconoce o se intuye un proceso de acumulación, puesto que se proporciona información no explícita, como el monto acumulado al final de la semana. Reactivo 3: en 14 casos se asocia el área bajo la gráfica de velocidad con el desplazamiento del objeto, en la mayoría (65 %) se tabula y se construye una gráfica adecuada. Reactivo 4: en 9 casos se presenta una estimación del área bajo la curva o se prevé un método plausible para ello.

- *Tratamiento de los datos en el salón de clase*. Con los datos obtenidos en el laboratorio de Física se procedió a modelar las funciones implicadas en cada experimento. Para esto, utilizando papel milimétrico, los estudiantes construyeron las gráficas de desplazamiento contra tiempo para los dos experimentos de movimiento. En el caso del MRU se obtuvieron gráficas lineales, trazando sobre el conjunto de pares una recta siguiendo la tendencia mostrada. En el caso del MRUV los estudiantes dibujaron curvas, guiados por la disposición de los pares en el plano. La determinación de la velocidad, tanto en el caso de MRU como del MRUV, se concretó a partir del cálculo de velocidades medias por intervalos, la interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor generó esta condición de común acuerdo, aun cuando se tenía previsto utilizar modelos de regresión para encontrar los registros funcionales. En el caso del MRU se calculó, a su vez, un promedio de las velocidades medias, el cual fue considerado como la velocidad del experimento, una constante en este caso. En el caso del MRUV la velocidad quedó representada por una función a intervalos, dejando ver claramente un carácter creciente. En ambos casos fue posible hacer sentido de la relación entre las gráficas de desplazamiento y de velocidad: la gráfica de velocidad contiene al desplazamiento como área bajo la curva o bajo la función y la gráfica de desplazamiento contiene a la velocidad como la razón de cambio del desplazamiento. Este hecho permitió avanzar en la dotación de significado del TFC en términos de lo que se muestra en la Tabla 1.

Enfoque de la Física	*Enfoque del Cálculo*	*Visualización gráfica*
El desplazamiento (*s*) y el tiempo (*t*) son proporcionales.	$s(t) = k{\cdot}t$	Una función lineal cuya ordenada al origen es cero.
La gráfica *s*-*t* "contiene" la velocidad (*v*), la rapidez con que cambia la posición del objeto es constante.	$v(t) = s'(t) = k$,	La velocidad corresponde ala pendiente de la función lineal.
La gráfica *v*-*t* "contiene" el desplazamiento.	$A(t) = s(t)$	El desplazamiento está dado porla función área $A(t)$, asociada a la función de velocidad.
La rapidez con que cambia el desplazamiento está dada por la velocidad.	$s'(t) = v(t)$;$A'(t) = s'(t)$, así: $A'(t) = v(t)$,	La razón de cambio del área bajo la curva de la función es igual a la función.

Tabla 1. Análisis del MRU.

Entrevista. Erick, uno de los estudiantes que participaron en todas las fases de la estrategia de enseñanza, fue entrevistado por su profesor —quien es coautor de este reporte— trabajando con el guión de actividad preparado para el análisis del experimento ER. A continuación se describen 3 episodios, indicando el objetivo de cada uno.

Episodio 1: Obtener una regla para la fuerza aplicada en el resorte en términos del alargamiento.A partir de los datos obtenidos del experimento, Erick construyó la gráfica de fuerza contra alargamiento (Figura 1). A continuación el entrevistador le pidió encontrar el valor de la constante de proporcionalidad característica el caso bajo estudio, para lo cual seleccionó un punto de la gráfica, el (3.5, 10) y realizó la operación 10/3.5, tomando como resultado 2.85. Con esto, Erickplanteó una relación adecuada entre fuerza y alargamiento, aunque de forma implícita.

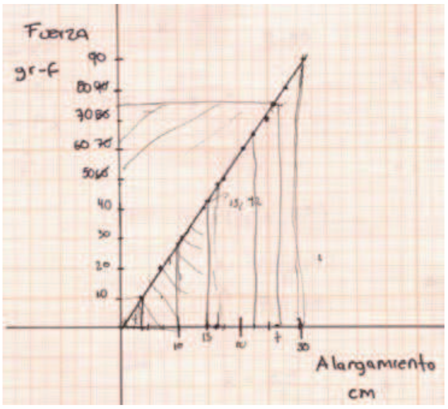

Figura 1.Fuerza contra alargamiento del resorte.

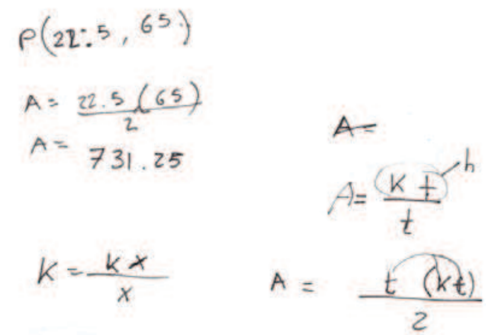

Figura 2. Una regla para el área bajo la función fuerza

<u>Episodio 2</u>: Obtener una regla para determinar el área contenida en el diagrama de fuerza contra alargamiento y utilizarla.Erick asoció convenientemente la regla para el área de un triángulo a la situación que se estaba analizando y la utilizó adecuadamente para calcular un área, una vez que seleccionó un valor en x (Figura 2). Sin embargo, enfrentó cierta dificultad para identificar el caso general, es decir, el caso en el que x toma un valor cualquiera denotado por t (a sugerencia del entrevistador). No se percató de que si la primera componente es t, la segunda sería$f(t) = 2.85t$, en este caso. Inicialmente, Erick recurrió a la expresión de la constante elástica como una razón ($k = F/x$), con la intención de hallar una reglapara el área bajo la curva. Al interactuar con el entrevistador, Erick se percató del error e identificó un elemento fundamental para modelar el área bajo la curva: kt define la altura del triángulo, es decir, la fuerza. Esto le permitío llegar a formular, de manera conveniente, la regla para el área.

<u>Episodio 3</u>. Relacionar ambas reglas desde dos enfoques: el de la Física y el del Cálculo.

Si bien Erick llegó a hacer explícitala función fuerza aplicada en el resorte en términos del alargamiento, no logró verbalizar con claridad esta relación. Esto quizá impidió el reconocimiento a profundidad de una relación entre las dos funciones, la que describe la relación entre fuerza y alargamiento y la que describe la relación entre el área bajo la curva (energía acumulada en el resorte) y el alargamiento. La interacción con el entrevistador facilitó que llegará a escribir explícitamente esa relación (Figura 3). Es hasta este momento que fue posible iniciar un proceso para discernir una relación entre ambas funciones.

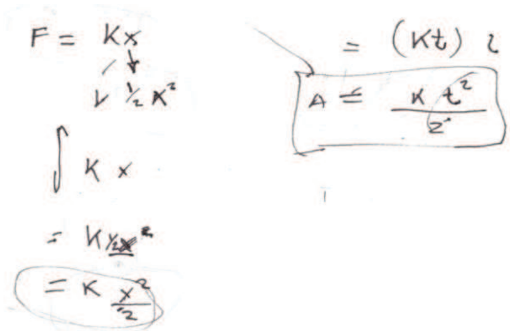

Figura 3. Funciones vinculadas.

Ante el requerimiento de encontrar alguna relación entre las dos reglas, la de fuerza aplicada en el resorte y la de área bajo la gráfica de dicha fuerza, Erick procedió a obtener una antiderivada de la función fuerza, lo cual logró resolver adecuadamente. El entrevistador retomó la afirmación que aparece en el guión que Erick tenía a la mano para desarrollar la actividad: "La derivada de la función área equivale a la función fuerza aplicada". Erick hizo sentido de la afirmación, señalando que la función área es antiderivada de la fuerza.

Conclusión

Si bien la inclusión de un contexto físico permitió referirse a variables o funciones específicas, como en el caso de la entrevista al alargamiento ya la fuerza aplicada en el resorte, y permitió también avanzar en la dotación de sentido de la información que el contexto proporciona, inclusive en términos del área bajo una curva, la tarea de relacionar los conceptos abordados en la actividad entre un enfoque de la Física y un enfoque del Cálculo constituyó una tarea compleja.Relacionar un enfoque con otro resultó más complejo que establecer la relación al interior de cada enfoque (ver la Tabla 1).El análisis de la entrevista y las observaciones realizadas en el aula abordando los casos de MRU y MRUV, ponen al descubierto la importancia de promover el significado de la derivada en el sentido de razón de cambio y de su conexión con la integral, entendida a su vez en el sentido de la acumulación del cambio, como requisitos para involucrar a los estudiantes en un proceso de dotar de significado al teorema fundamental, particularmente a la primera parte de éste, la que pone el énfasis en la relación entre razón de cambio y cambio acumulado.La habilidad operativa en el Cálculo es un recurso para hacer sentido del concepto del área bajo la curva y del TFC, sin embargo no implica una competencia matemática en un sentido amplio. El desarrollo de actividades de aprendizaje a partir de información extraída directamente de contextos físicos permitió dotar de significado a la relación entre una función y una función antiderivada asociada, promoviendo el reconocimiento de una relación funcional entre las variables involucradas en los contextos abordados. Sin embargo, para llegar a alcanzar un nivel de formalización matemática de dicha relación, en términos del TFC, se percibe la necesidad de establecer relaciones explícitas entre la razón de cambio y el cambio acumulado, es decir, es necesario que los estudiantes lleguen a ser conscientes de que la razón de cambio del área bajo la curva de una función está dada por la función misma y que, simultáneamente, el cambio acumulado (el área bajo la curva) está definido por una antiderivada de esa función.

Referencias bibliográficas

Courant, R. & Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas?* México: Fondo de Cultura Económica.

Cruse, A. B. & Lehman M. (1982). *Lecciones de Cálculo 2. Introducción a la integral*. México: Fondo Educativo Interamericano.

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. EE.UU: Springer-Verlag.

Orton, A. (1983). Students' unsderstanding of integration. *Educational Studies in Mathematics* 14, 1 – 18.

SEMS IPN (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje Cálculo Integral*. México.