EMERGENTES DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA EN EL MARCO DE UN APRENDIZAJE COLABORATIVO

Raúl Katz y Pablo Sabatinelli
Universidad Nacional de Rosario. Argentina
rdkatz@fceia.unr.edu.ar, pablos@fceia.unr.edu.ar

Resumen. Dada la importancia que tiene en la Ingeniería Civil las superficies regladas, en particular el paraboloide hiperbólico, hemos tomado esta superficie como objeto de aprendizaje para nuestros estudiantes de Ingeniería. Les proponemos una actividad que propicia el reconocimiento del paraboloide hiperbólico como una superficie reglada.
En el trabajo mostramos la actividad y las dificultades que emergieron durante el desarrollo de la misma. Consideramos que actividades como ésta deben ocupar mayor espacio en el aula por cuanto permiten explorar los razonamientos que ponen en juego los estudiantes, ofreciendo elementos para actuar didácticamente y generar líneas de acción para futuras prácticas educativas
Palabras clave: aprendizaje colaborativo, superficie reglada
Abstract. Given the importance of ruled surfaces (in particular the hyperbolic paraboloid) in Civil Engineering applications, we have chosen this surface for a learning activity for Civil Engineering students. We propose an activity to ease the recognition of hyperbolic paraboloid as a ruled surface. In this paper we show the difficulties that emerged during the development of this activity. We believe that activities like this should gain more space in the class for they allow us to scout the way students approach a problem, offering didactic elements for generating different courses of action in our classes
Key words: collaborative learning, ruled surface

Introducción

El paraboloide hiperbólico es una de las superficies de mayor aplicación en la Ingeniería Civil. Aun siendo una superficie con *doble curvatura* puede generarse con líneas rectas, razón por la cual es conveniente a la hora de realizar encofrados o simplemente darle forma a una estructura.

A pesar de ello, en nuestro curso de Algebra y Geometría para Ingeniería Civil, el estudio de las superficies cuádricas, en particular el paraboloide hiperbólico, se realiza a partir de sus ecuaciones canónicas. Se analizan las intersecciones del paraboloide hiperbólico con los planos coordenados y con planos paralelos a los mismos, esbozándose una gráfica en la que se destaca solo un par de rectas contenidas en la superficie, las que se encuentran en uno de los planos coordenados. Desde esta perspectiva, no se enfatiza el hecho de que el paraboloide hiperbólico es una superficie reglada. Ante esta situación nos preguntamos:

a) ¿Cómo organizar la clase para que los estudiantes se apropien de esta propiedad?

b) ¿Disponen los estudiantes de los conocimientos previos necesarios para lograrlo?

c) En este proceso de apropiación, ¿será el uso de un software matemático un recurso facilitador?

A partir de estos interrogantes propusimos a los estudiantes, en el marco de un aprendizaje colaborativo, una secuencia de actividades con dos objetivos. Por un lado, lograr que se apropien de la propiedad señalada, y por el otro, aportar información sobre las dificultades y el nivel de desarrollo potencial de aprendizaje alcanzado por los estudiantes en los temas implicados en la actividad. Esto último, con la intención de generar líneas de acción para futuras prácticas educativas.

Objetivos de la actividad

En este trabajo conviven dos objetivos, que atienden a diferentes intereses. Un primer objetivo es de carácter didáctico: hacer patente que el paraboloide hiperbólico es una superficie reglada y la aplicación práctica que esto tiene dentro del ámbito de la ingeniería civil. El segundo objetivo surge desde y para la investigación educativa: a partir del trabajo de los alumnos sobre una propuesta didáctica tomar nota de las dificultades emergentes como recurso para nuestro accionar didáctico.

Metodología de trabajo implementada en el aula

El desarrollo de la clase se hizo en el marco del aprendizaje colaborativo, por cuanto consideramos que el mismo se presenta como un proceso social donde se respeta la autonomía del estudiante, quien aprende a partir de su propia experiencia y no a partir de la transferencia pasiva de los contenidos. "El conflicto que surge del desacuerdo del grupo crea un desequilibrio, y el ajuste resultante a ese estado es una causa primaria del desarrollo cognitivo." (Brown, Metz y Campione, 2000, p.192).

> el alumno *reconstruye* un saber, pero no lo hace solo, porque ocurren procesos complejos en los que se entremezclan procesos de construcción personal y procesos de *coconstrucción* en colaboración, con los otros que intervinieron, de una o de otra forma, en ese proceso (Wertsch, 1993, citado en Rojas, 2001, p.232).

El docente tiende los puentes entre lo que los estudiantes supuestamente saben, y un nuevo contenido de aprendizaje. En este contexto el uso de los conocimientos previos es esencial para elaborar nuevos significados

Participantes

La actividad se desarrolló con alumnos de primer año de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, durante una clase práctica. Las docentes a cargo del curso conocían la actividad a desarrollar de una reunión previa en la que además se explicitó la modalidad de trabajo que teníamos diseñada. Ese día condujimos la actividad de la que participaron los 21 alumnos presentes y las dos docentes. Se les indicó a los alumnos que formasen cuatro grupos (se formaron tres grupos de cinco alumnos y uno de seis) y de cada grupo participó un docente a cargo o un docente investigador. Los docentes teníamos que registrar los emergentes que surgían en cada grupo, en el transcurso de la resolución de la propuesta. Nuestra intervención debía restringirse a encauzar el rumbo de la actividad mediante nuevas preguntas en la medida que surgieran dificultades o errores.

En el momento de llevar a cabo la actividad, los alumnos ya habían abordado en clases prácticas y teóricas los siguientes contenidos: álgebra vectorial, geometría lineal del plano y del espacio, cónicas y estudio de la ecuación general de segundo grado y superficies cuádricas.

Algunas consideraciones sobre la actividad propuesta

Desde hace unas décadas uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de la matemática es lograr que los estudiantes sean capaces de resolver problemas. Para Santaló (1994, p.31) "la verdadera matemática ha consistido siempre en la resolución de problemas".

Existen diferentes significados para la expresión "solución de problemas". En ocasiones se utiliza la expresión para referirse a actividades de resolución de ejercicios consistentes en la aplicación de mecanismos conocidos que conducen a una solución casi inmediata. En contraste con este punto de vista, la existencia de un problema implica la existencia de una dificultad que obligue a plantearse un camino a seguir para alcanzar la meta. Desde esta última perspectiva un problema sería una propuesta que no es posible resolver por aplicación directa de un resultado conocido; requiere de la búsqueda de nuevas relaciones, de la aplicación de distintos conocimientos.

En la planificación de la actividad propuesta, hemos tomado como punto de partida el enunciado siguiente: "Describir el lugar geométrico determinado por las rectas que se apoyan simultáneamente sobre tres rectas no coplanares dos a dos". Este enunciado fue desmenuzado en una secuencia de actividades más simples y lo presentamos a los alumnos a través de una guía de actividades. Los alumnos conocían al momento de resolver esta guía de actividades la ecuación reducida del paraboloide hiperbólico. La intención fue la de proponer en la guía de trabajo ecuaciones de rectas lo suficientemente simples como para que la ecuación del paraboloide resultante no fuese tan complicada. La representación de la superficie se realizó en un segundo momento de la actividad, en el laboratorio de informática con el software wxMaxima.

La actividad propuesta

1. Las ecuaciones que se dan a continuación representan tres rectas en el espacio.

$$r_1:\begin{cases}x=t,\\ y=0,\\ z=0, \quad t\in R,\end{cases} \qquad r_2:\begin{cases}x=0,\\ y=s,\\ z=3, \quad s\in R,\end{cases} \qquad r_3:\begin{cases}x=u,\\ y=u,\\ z=6, \quad u\in R.\end{cases}$$

Analice si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a) La recta r_1 representa al eje *x*.

b) La recta r_2 representa al eje *y*.

c) La recta r_2 representa una recta contenida en el plano de ecuación $z = 3$, $\forall\, x$, $\forall\, y$.

d) Las rectas r_1, r_2 y r_3 están contenidas en planos paralelos.

e) Las rectas r_1, r_2 y r_3 son paralelas.

f) Las rectas r_1, r_2 y r_3 son alabeadas dos a dos.

2.

a) Halle la ecuación del plano π_1 determinado por el punto $A(1,0,0) \in r_1$ y la recta r_2.

b) Halle la ecuación del plano π_2 determinado por el punto $A(1,0,0) \in r_1$ y la recta r_3.

c) Escriba ecuaciones paramétricas para la recta *r*, intersección de los planos π_1 y π_2.

d) ¿Corta la recta *r* a cada una de las rectas r_1, r_2 y r_3? Justifique.

3. Repita el apartado 2 considerando un punto cualquiera de r_1 de la forma $(t, 0, 0)$. Observe que el caso $t = 1$ corresponde a lo resuelto en el apartado 2.

Al finalizar la propuesta y al variar *t* en el conjunto de números reales, obtendrá unas ecuaciones paramétricas del lugar geométrico formado por las rectas que cortan a las tres rectas alabeadas contenidas en planos paralelos. Este lugar geométrico es un paraboloide hiperbólico. Utilizaremos un software para visualizar "una parte" de él.

Descripción de la producción de los grupos

Todos los grupos responden de manera correcta el punto 1a y 1b de la actividad. Llama la atención que ningún grupo haya justificado la falsedad del enunciando 1b diciendo que *z* debía asumir constantemente el valor 0 sino que uniformemente justifican argumentando que r_2 representa una recta en el espacio que contiene al punto $P(0,0,3)$ y es paralela a la dirección del vector $(0,1,0)$. En ningún caso se presentó un gráfico de la situación sino que se mantuvieron en el plano de lo algebraico.

En cuanto punto 1c, la respuesta del grupo 2 es incorrecta; sostienen que la afirmación es falsa y lo justifican reiterando lo respondido en el apartado 1b. Cuando el docente propone realizar una representación gráfica, dibujan el punto $P(0,0,3)$ el vector $(0,1,0)$ con origen en el origen de coordenadas y luego grafican correctamente la recta r_2. Aún así no rectifican su respuesta. Nuevamente, la docente les pide que vinculen la condición $z = 3$ (en las ecuaciones paramétricas de r_2) con la ecuación del plano $z = 3$, $\forall x$, $\forall y$. Esto les permite darse cuenta del error cometido y que la afirmación en cuestión es verdadera.

Los cuatro grupos responden correctamente el punto 1d. En el caso del grupo 3, la respuesta surge de la representación gráfica. En los restantes casos reconocen que las rectas se encuentran contenidas en los planos $z = 0$, $z = 3$ y $z = 6$ que son planos paralelos.

La respuesta dada en el punto 1d les provoca dudas en el momento de responder el punto 1e. La intervención de un alumno del grupo cuatro, diciendo con tono de duda "*rectas que se encuentran en planos paralelos no tienen porqué ser paralelas*" fue captado por los restantes alumnos que de este modo fueron inducidos a justificar la falsedad del punto. Alumnos del grupo 3 afirman que las rectas no son paralelas, "*se ve en las gráficas*", argumentan. Cuando la docente preguntó acerca de cómo justificar que las rectas tienen distintas direcciones, los alumnos de este grupo se remitieron correctamente a la condición de paralelismo entre los vectores direcciones de las rectas.

La respuesta del punto 1f, se deduce de manera inmediata de las respuestas dadas en los dos puntos anteriores como argumentó el grupo 4. Sin embargo los grupos 1 y 3, para decidir, se remiten al cálculo del producto mixto entre los vectores dirección de las rectas y un vector con extremos en puntos de cada recta. Nuevamente, necesitan del apoyo algebraico para responder cuestiones que razonan correctamente fuera de ese marco. En el caso del grupo 2, surge una confusión sobre el significado de rectas alabeadas. Consideraban que dos rectas son alabeadas cuando "no están contenidas en un mismo plano". En el momento que estaban contenidas en planos paralelos, inferían que eran alabeadas, sin considerar que podía darse el caso que estas rectas fuesen paralelas.

Un alumno consideró que el par de rectas podía ser considerado tanto alabeado como coplanar. Reproducimos sus propias palabras referidas al gráfico 1: "si consideramos el plano que las contiene las rectas son coplanares, pero si consideramos el par de planos paralelos que las contienen entonces no están en un mismo plano, son alabeadas"

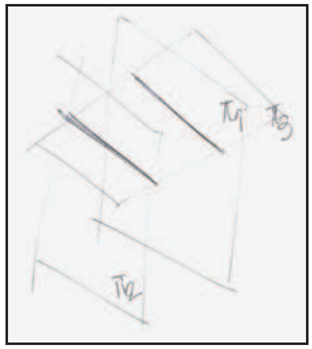

Gráfico 1: Rectas paralelas y alabeadas.

Los alumnos no presentaron dificultades para responder a los puntos 2a, 2b y 2c. En clases previas a la experiencia habían trabajado en la obtención de la ecuación de un plano determinado por una recta y punto exterior a la misma y en el pasaje a las ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio expresada como intersección de dos planos.

En cuanto al punto 2d, se repite el fenómeno observado al responder el punto 1f. Para responder si la recta r se intercepta con cada una de las rectas r_1, r_2 y r_3 se remiten a la resolución de un sistema de ecuaciones cuando tenían todos los elementos para responder sin necesidad de hacer nuevos cálculos. Nuevamente, la acción de los alumnos destaca la importancia que le dan a la justificación algebraica, posiblemente fomentada desde nuestra acción didáctica como docentes.

En el punto 3 el comportamiento y dificultades que presentaron los grupos fueron muy similares, razón por la cual no haremos distinción del grupo en cuestión. Ningún grupo presentó dificultades para obtener la ecuación del plano repitiendo el procedimiento que utilizaran en el punto 2a, pero ahora reemplazando la coordenada 1 del punto A, por la coordenada t. Sin embargo, ya no resultó tan evidente que la ecuación obtenida correspondía efectivamente a un plano, ya que consideraban que en la ecuación estaban interviniendo *cuatro* variables. Se les sugirió que escribieran la ecuación para el caso particular $t = 1$, hecho que les permitió reconocer la ecuación del plano obtenido en su momento. De este modo resultó claro que al tomar t diferentes valores, se obtendrían diferentes ecuaciones correspondientes a diferentes planos. La repetición de los puntos 2b, 2c y 2d cambiando la coordenada 1 por t no presentó dificultades a los grupos.

En el segundo momento de la actividad, llevamos a los alumnos al laboratorio de informática e indicamos los comandos para graficar con wxMaxima la superficie dada en ecuaciones paramétricas. Los alumnos graficaron varias veces (para diferentes intervalos paramétricos) y reconocieron que se trataba de un paraboloide hiperbólico. También se sugirió encontrar a partir de las ecuaciones paramétricas de la superficie, una ecuación cartesiana de la misma. Al obtenerla, observaron que no correspondía a la ecuación reducida del paraboloide hiperbólico que conocían. Se explicó en ese momento, que se podía obtener un sistema de ejes coordenados rectangulares de tal forma que respecto de ese sistema, la ecuación cartesiana del paraboloide hiperbólico asumía la forma reducida. Esta observación fue relacionada con la roto-traslación de ejes en el plano al estudiar la ecuación general de segundo grado en dos variables.

Aprovechando el laboratorio, también se buscaron en Internet construcciones que presentaran en su estructura la forma de paraboloides hiperbólicos, como es el caso del *Puente de la mujer*, que se encuentra en Puerto Madero (Buenos Aires, Argentina). Entre otras obras arquitectónicas, se mencionaron el *Puente de la Constitución* (Italia), el *World Trade Centre* (Estados Unidos).

Conclusiones

El desarrollo de la actividad propuesta en el marco del trabajo colaborativo y la animación gráfica generada por el docente fueron decisivos para que los estudiantes reconocieran al paraboloide hiperbólico como una superficie reglada.

En la resolución de los diferentes puntos, merece destacarse la preponderancia del recurso algebraico por sobre el recurso geométrico. Los alumnos calculan un determinante para decidir que las rectas son alabeadas, cuando en realidad bastaba con relacionar las respuestas dadas en los apartados previos, donde probaron que las rectas no son paralelas y se encuentran en planos que sí lo son. Lo mismo ocurre cuando deciden que las ecuaciones de las rectas que obtienen en el punto 2c se interceptan con las dadas, planteando la resolución de un sistema de ecuaciones, cuando en realidad esa conclusión podía derivarse directamente de la misma construcción. En sus resoluciones se percibe una tendencia a reproducir procedimientos estereotipados que limitan la posibilidad de obtener respuestas por medios más simples o directos. El accionar de algunos alumnos sugiere que no se encuentran abocados a encontrar la solución de un problema, más bien buscan dar fe de que aprendieron un procedimiento aplicado en actividades anteriores.

La cantidad de estudiantes y de docentes permitió un seguimiento cercano de los trabajos de cada grupo y una disposición en el aula propicia para generar espacios de intercambio y construcción de conocimientos.

De la interacción de los docentes con los diferentes grupos, emergieron dificultades derivadas de inferencias lógicas incorrectas vinculadas al significado de rectas alabeadas.

Consideramos que actividades como la descripta deben ocupar mayor espacio en el trabajo en el aula por cuanto permiten explorar y analizar los razonamientos que ponen en juego los estudiantes al resolver un problema, ofreciendo de este modo interesantes elementos para actuar didácticamente y contribuir a la superación de las dificultades que se identifican.

Referencias bibliografías

Brown, A., Metz, K. y Campione, J. (2000). La interacción social y la comprensión individual en una comunidad de aprendizaje: la influencia de Piaget y Vygotsky. En A. Tryphon y J. Vonèche (comps.) *Piaget-Vygotsky: la génesis del pensamiento.* (pp. 191-223). Buenos Aires: Paidós.

Panizza, M. (2005). *Razonar y conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Rey Pastor, J., Santaló, L. y Balanzat, M. (1959). *Geometría Analítica.* Buenos Aires: Kapelusz.

Rojas, G. (2001). *Paradigmas en psicología de la educación*. México: Paidós.

Santaló, L. (1994). Matemática para no matemáticos. En C. Parra e I. Saiz (comps.) *Didáctica de matemática. Aportes y reflexiones.* (pp.21-38).

Xambó Descamps, S. (2000). *Geometría*. Barcelona: Alfaomega.