

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA LINEAL A TRAVÉS DE SUS RELACIONES INTRA E INTER MATEMÁTICAS

Andrés González Rondell

Universidad Pedagógica Experimental Libertador.
agorondell@yahoo.es

Venezuela

Resumen. Describimos el proceso llevado a cabo en el desarrollo de un curso de álgebra lineal dirigido a estudiantes para Profesor de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador de Venezuela (UPEL), con la intención de impulsar un cambio metodológico en su enseñanza y aprendizaje fundamentado en las inmensas posibilidades que tiene esta área al explorar y explotar sus relaciones intra e inter Matemáticas. Los estudiantes escribieron, individualmente, un balance del tipo reflexivo en relación con los objetos y procesos algebraicos manipulados en el contexto de la experiencia, éstas se constituyeron en el corpus informativo que luego fue estudiado mediante técnicas de análisis. Los hallazgos muestran que el discente: concientiza la complejidad de los objetos propios del álgebra, comprende la conexión entre el lenguaje natural y el algebraico, en particular el rol del simbolismo; es capaz de articular logros en el área de álgebra a lo largo de la carrera universitaria, vislumbra el papel que jugará esta área en el reto interdisciplinar.

Palabras clave: álgebra lineal, relaciones intra e intermatemáticas

Abstract. We describe the process undertaken in the development of a linear algebra course for students to Professor of Mathematics at the Pedagogical University Experimental Libertador de Venezuela (UPEL), with the intention of promoting a methodological change in teaching and learning based on the immense possibilities for this area to explore and exploit its intra-and inter Mathematics. The students wrote individually reflective type balance in relation to objects and manipulated algebraic processes in the context of the experience, they are formed in the body of information that was then studied using analytical techniques. The findings show that the learner: raises awareness of the complexity of the proper objects of algebra, understands the connection between natural language and algebra, in particular the role of symbolism, is able to articulate achievements in the area of algebra over the college career, sees the role it will play in the challenge this interdisciplinary area.

Key words: linear algebra, intra-and intermatemáticas

Introducción

Diversos autores coinciden en la importancia de que los individuos comprendan el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcancen razonamientos fundados y participen en ellas en función de las necesidades de su vida; se ha enfatizado la necesidad de superar el anumerismo (Paulos, 1998) a través de un óptimo desempeño del pensamiento matemático y el desarrollo una *Cultura Matemática*. Particularmente, invocamos la importancia del pensamiento algebraico por resultar trascendente a nuestros fines; este asunto aparece relacionado con la calidad de las prácticas de enseñanza, razón por la que un sólido pensamiento de este tipo del educador matemático se percibe como un requisito necesario para el desarrollo de un proceso de enseñanza orientado a lograr un nivel de aprendizaje de la Matemática en el que se propenda su desarrollo, en consecuencia resulta clave el proceso de formación inicial de este docente.

Además, este pensamiento se considera importante pues permite: deducir lo general en lo particular, hacer y revertir operaciones, reconocer patrones, abordar procesos de modelización,

etc. Por tanto se considera importante que el educador matemático posea un nivel satisfactorio de desarrollo de su pensamiento algebraico a fin de que pueda promoverlo en sus estudiantes.

En la actualidad el pensamiento algebraico se ha constituido en un campo del pensamiento matemático, motivo de diversos estudios en los distintos niveles de la educación formal. En estos trabajos se estudia la apropiación del símbolo en Matemática, en particular los usos que se le dan a las letras (cuyo antecedente más importante es el trabajo de Küchemann en 1980), la interpretación y uso del signo igualdad, la modelización, los procesos de abstracción y de generalización, etc.

El punto de partida para el desarrollo de esta experiencia de aula fueron las diversas dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje del Álgebra y la urgente necesidad de establecer cambios revolucionarios en las metodologías de enseñanza usadas por los docentes de este nivel educativo; la indagación está en desarrollo y forma parte de un estudio mayor, de carácter cualitativo, fenomenológico-interpretativo que busca plantear algunas relaciones entre los procesos del pensamiento algebraico y la mediación tecnológica.

Para una profunda discusión sobre el concepto de Pensamiento Algebraico, y dado que son autores reconocidos en este campo, son notables para esta investigación los aportes de Sierpiska (1996); Blanton y Kaput, (2003); Arzarello, Bazzini y Chiappini (1994); Kieran (1992) y Shelley (2012). La primera autora, en los últimos años, ha desarrollado trabajos de investigación acerca de la evolución del pensamiento matemático en los estudiantes. Particularmente en Álgebra Lineal, esta investigadora distingue tres modos de pensamiento matemático: sintético-geométrico (basado en el uso de figuras geométricas), analítico-aritmético (las figuras geométricas ahora pueden ser escritas como ecuaciones o desigualdades) y analítico-estructural.

En este mismo orden de ideas, Shelley (2012), compara este concepto a la luz de varias definiciones para luego presentar el pensamiento algebraico subdividido en dos componentes: desarrollo de herramientas matemáticas del pensamiento (las cuales incluyen los hábitos analíticos de la mente, específicamente habilidades de resolución de problemas, habilidades de razonamiento y habilidades de representación) y el estudio de ideas algebraicas fundamentales (dominio en el cual las mencionadas herramientas pueden desarrollarse).

Por su parte Piaget y García (1983) establecen un paralelismo entre la forma cómo han evolucionado las ciencias y la manera como las personas construyen el conocimiento, en su libro dedican dos capítulos al álgebra y a la formación de los sistemas prealgebraicos. Los autores distinguen tres períodos o etapas en la evolución de las estructuras algebraicas así como la evolución de las "relaciones lógicoaritméticas en el niño" (p. 134). Estas etapas son: intra-

operacional, inter-operacional y trans-operacional.

Caracterización de la problemática

Luego de la introducción y consolidación del simbolismo en Matemáticas en virtud de los trabajos desarrollados por F. Viete (1540-1603) comienza la etapa denominada simbólica en la evolución del Álgebra. Pese a la enorme complejidad de su simbología el trabajo de Viete (aún cuando fue reconocido después de su muerte) alcanzó un extraordinario valor pues por primera vez fue “posible la expresión de ecuaciones y sus propiedades, mediante fórmulas generales. Los objetos de las operaciones matemáticas comenzaron a ser no problemas numéricos sino las propias expresiones algebraicas” (Ríbnikov, 1987, p. 135)

Naturalmente, la introducción sistematizada y organizada de estos símbolos significó una transformación extraordinaria en la manera de hacer, enseñar y aprender Matemáticas pues se trató de una revolución en el lenguaje matemático, particularmente el algebraico, que hasta ese momento estuvo basado en el lenguaje ordinario, y permitiendo con ello la génesis del álgebra simbólica. La trascendencia de este hecho es analizado por Gómez-Granell (1997) de la siguiente manera: “El uso de la notación mediante letras posibilita la independencia con respecto al objeto que se representa, el símbolo cobra entonces un significado que va más allá del objeto simbolizado” (p.208). Esta apreciación, aún cuando es correcta, no revela algunas limitaciones que tiene tal uso metafórico de los objetos matemáticos; en efecto, la irrupción de este sistema de símbolos rápidamente se extendió y popularizó haciendo olvidar, como señala Pimm (2002), que el Álgebra “en el sentido de la formulación y manipulación de expresiones de generalidad, puede construirse sin necesidad de emplear letras, utilizando, por ejemplo, palabras o símbolos no alfabéticos” (p. 193). Es decir, a pesar de que en la práctica de manipulación el símbolo sustituye al objeto es necesario tener conciencia de la ambigüedad que une y/o separa al signo del objeto. Lo particular aquí no es que el símbolo no sea un buen representante del objeto, pues el problema no se presenta en la representación como tal, sino que el concepto matemático que aspira representar se desnaturaliza, se pierde en el nivel de las operaciones que ejecuta el estudiante, y esto ocurre pues se opera sobre el símbolo sin intentar ver si las operaciones que se desarrollan son significativas en términos del objeto que éste representan (Artigue, 2003)

En este asunto también subyace una dificultad un poco más profunda como lo es la confusión del alumno al interpretar el objeto matemático a través del símbolo, lo que a su vez no es algo trivial tomando en cuenta que “en Matemáticas, el símbolo convencional constituye el único medio de evocar el concepto mismo” (Pimm, 2002, p. 222), de manera que se opera sobre el objeto a través de la operación con el signo.

En lo que respecta al Álgebra Lineal, afirma Artigue (2003) que las investigaciones reportan un fenómeno particular con respecto al aprendizaje del concepto de espacio vectorial en los primeros años del nivel universitario, se trata de la discrepancia entre la capacidad de este concepto para resolver problemas nuevos y su valor como concepto generalizador, unificador y formalizador, es decir, una cantidad importante de estudiantes no sienten la necesidad de recurrir a la construcción abstracta de espacio vectorial para resolver la mayoría de los problemas de un primer curso de álgebra lineal, obviando así el valor epistemológico esencial del Álgebra Lineal (Artigue, 2003). De acuerdo con la óptica de esta autora romper esta anomalía pasa por desarrollar conexiones complejas entre los modos de razonamiento, los puntos de vista, lenguajes y sistemas de representaciones simbólicas.

En cuanto a las necesarias transferencias que debe realizar un docente en el aula también son reportadas algunas carencias. En este sentido Acevedo y Falk (2000) afirman que “la formación avanzada que reciben los futuros docentes de la Educación Básica en general no enriquece su enseñanza, sino que el docente retorna a su propia experiencia escolar como guía prioritaria de su ejercicio docente elemental” (p. 247). Por ejemplo, las mismas autoras señalan que “el docente no establece nexos entre la teoría de polinomios, que se supone conoce de sus cursos universitarios, y el álgebra de polinomios que se trabaja en la secundaria” (p. 248)

Esta situación puede ser vista desde en un espectro más amplio como lo es la problemática relacionada con la formación inicial de los docentes de Matemática. Esta manera de vincular este período de formación con los hallazgos en niveles más bajos de escolaridad no es algo nuevo, desde principios del siglo XX el reconocido matemático Félix Klein había expuesto su preocupación por las transferencias entre la Matemática universitaria y la Matemática escolar.

En González y González (2012) se precisan otras características más específicas, relacionadas con el pensamiento algebraico del futuro educador matemático, determinadas en nuestro propio contexto. A manera de síntesis las siguientes expresiones resumen la problemática abordada:

- a) Dificultad para avanzar en la capacidad para asumir conceptos abstractos.
- b) Desarrollo de un proceso de “aritmización del Álgebra”
- c) Dificultad para la manipulación del símbolo (limitación en el manejo de la sintaxis y la semántica)
- d) Poco aprecio por la demostración (y dificultad para hacerlas)
- e) Elevado número de estudiantes reprobados en las asignaturas del Área de Álgebra, lo cual genera un estado de ansiedad-rechazo por esta área.

f) Limitaciones de los educadores para captar el Álgebra superior (o Álgebra universitaria) como apoyo para el Álgebra escolar.

g) Dificultad para comprender el enunciado de un Problema Algebraico. Confusión cuando el lenguaje natural funciona como metalenguaje en los problemas de Álgebra.

Ante este panorama se decidió echar mano de un concepto clave en la enseñanza de las ciencias como lo es la interdisciplinariedad, en el que se hiciera posible el desarrollo de un aprendizaje contextualizado y que hiciese posible el establecimiento de relaciones-conexiones entre algunos conceptos algebraicos.

Para esto se tomó en cuenta que la búsqueda de un cambio en el modelo de asumir la enseñanza de la ciencia y, en particular, la enseñanza de la Matemática se puede considerar como un asunto complejo. De acuerdo con esto Gil, Pessoa, Fortuny, y Azcárate, (1994) plantean esta situación en los siguientes términos: “es preciso insistir, en primer lugar, contra la búsqueda ingenua de recetas de fácil aplicación. Las propuestas puntuales, no fundamentadas, han de dejar paso a elaboraciones capaces de integrarse coherentemente en un cuerpo de conocimientos teórico-prácticos que abarque todo el proceso de enseñanza/aprendizaje de las ciencias” (p.85).

Descripción de la actividad

La experiencia se desarrolló durante un período académico en los espacios del Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara de Maracay, Núcleo de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, universidad encargada exclusivamente de la formación de los educadores de las diversas especialidades. Los sujetos participantes fueron los estudiantes del Departamento de Matemática integrantes de dos secciones de la asignatura denominada Álgebra Lineal correspondiente al área de Álgebra. Este curso tiene la particularidad de ser obligatorio no homologado (no todos los núcleos la contemplan en su plan de estudios) y se inserta en el componente de formación especializada de este instituto.

El proceso constó de dos partes, la primera contenía 5 fases:

(I) Informativa y estimulativa, desarrollada al comenzar el período académico, en ésta se entregó a los estudiantes un documento en el que se delineaban las directrices del trabajo, se indicó que el propósito del trabajo era establecer y hacer explícitas las relaciones, vínculos o aplicaciones del Álgebra. Esto lo podían hacer desde dos perspectivas: una intra, exhibiendo las aplicaciones o vínculos del Álgebra con otras ramas de la Matemática tales como Análisis, Geometría, etc.; y desde una perspectiva inter, mostrando las aplicaciones y/o relaciones del Álgebra con otras áreas de conocimiento como por ejemplo, Economía, Informática, Biología, Física, etc.

- (2) Libre búsqueda de información tanto en formato digital como impresa
- (3) Organización del contenido
- (4) Consolidación de la información y
- (5) Establecimiento y explicitación de las relaciones.

Como características a resaltar de esta primera parte tenemos: (a) Para realizar el trabajo era importante tener, lo más claro posible, cuáles eran los objetos y procesos matemáticos propios del Álgebra, (b) El trabajo no era una propuesta didáctica y eso tenía relevantes implicaciones, tanto en el fondo como en su forma; por ejemplo, cada trabajo tendría una estructura particular la cual vendría dada por la aplicación que se fuera a establecer, (c) Por la naturaleza del trabajo era importante dejar claro que tampoco era una investigación del tipo escolarizante-academicista en el sentido de que iban a aplicar asuntos específicos que ya se hubiese manejado antes en otra materia, por el contrario era altamente probable que se manipularan algunos conceptos, definiciones, propiedades, etc., totalmente nuevos, (d) Por lo anterior había que estimar el tiempo suficiente para que maduraran las ideas, para que la creatividad se hiciera presente y poder establecer entonces un balance en el nivel de complejidad., (e) Con respecto a esto último se aclaró que lo que se pretendía era que el estudiante fuera capaz de articular sus logros en el área de Álgebra a lo largo de su carrera universitaria, y que vislumbrara así el papel que jugará esta área en el reto interdisciplinar que deberá afrontar como educador matemático.

La segunda parte consistió en la realización de una actividad denominada *Jornadas de Aplicaciones del Álgebra* evento de carácter público al que podía asistir cualquier estudiante y docente, en este escenario expusieron la sistematización de sus trabajos enfatizando los vínculos y/o relaciones encontradas. La expresión *aplicaciones* no debe ser entendida como una relación utilitaria o de causa y efecto (como lo sería en física o en otras áreas), sino mucho más flexible y más amplia (que no niega la anterior), tiene que ver con punto de encuentro, vínculo, relación, etc. Como se puede ver la naturaleza del trabajo era altamente compleja, tanto para los estudiantes como para el profesor de la asignatura, pues la indagación a realizar por los estudiantes no era una investigación necesariamente articulada con los contenidos del Programa, aun cuando éste se desarrollaba de forma natural.

Por el contrario, los estudiantes tuvieron que manipular algunos conceptos, definiciones, propiedades, etc., totalmente nuevos.

En la siguiente tabla I se recogen algunas apreciaciones de los estudiantes, como se puede observar estos comentarios tienen distintas connotaciones que transitan desde aspectos

emocionales relacionados con la superación del reto que significó la exposición de un tema algebraico ante un público diverso, pasando por la visualización de algunas conexiones intra e intermatemáticas hasta la estimación del valor agregado del trabajo concentrado en el uso de la herramienta power point en su exposición.

E1	<i>Nunca pensé que era capaz de pararme allí al frente de muchos profesores, para explicar mi trabajo. Ya al hacerlo confirmé que soy capaz de lograr muchas cosas.</i>
E2	<i>En un principio cuando nos fue informado acerca de que se trataba, lo veíamos como un imposible. Y si, es así; porque para nadie es un secreto que en el área donde tenemos más problemas a lo largo de nuestra carrera es en el álgebra. Esa álgebra que para muchos de nosotros fue un gran dolor de cabeza, pero que ahora con orgullo cada uno de nosotros puede decir: somos casi que expertos en un determinado tema.</i>
E3	<i>A nivel general considero que esta jornada nos permitió profundizar en nuestros conocimientos pero sin la presión de estar en un aula de clase</i>
E4	<i>Para mí fue una experiencia muy valiosa, ya que me obligó a aprender a utilizar el Power Point de tal manera que me quedará ese conocimiento para ponerlo en práctica en mi vida profesional.</i>
E5	<i>El recorrido fue largo, pero valió la pena. Todo comenzó hace aproximadamente cinco meses con la escogencia de un tópico sobre el álgebra para desarrollarlo a medida que íbamos cursando el semestre. Particularmente durante el desarrollo de mi trabajo (Programación Lineal) mi compañero y yo, a medida que estábamos abordando el contenido nos dábamos cuenta que teníamos que tener una buena base del álgebra de matrices y de cálculo; algunas veces tuvimos dificultades en ciertas definiciones que manejaban algunos autores y teníamos que asesorarnos con algunos profesores del departamento.</i>
E6	<i>Es impresionante ver como muchísimas ciencias se sirven de la matemática para resolver problemas y para mejorar cada día la calidad de vida del hombre y la manera de percibir todo lo que nos rodea.</i>
E7	<i>La primera vez que realice la lectura del material que tenía sobre mi trabajo "NO ENTENDI NADA" tuve que leerlo varias veces para poder medio entenderlo, porque siempre en el material decían, por ejemplo: está demostración es evidente por teorema 4 parte ii) página 145 y cuando volvía a la página de mi tema tenía que leerlo otra vez.</i>

Tabla1: Algunas opiniones de los estudiantes

Conclusiones

El éxito de esta actividad se basó en: (1) La asesoría constante, tanto del docente de la asignatura, como de muchos docentes de la especialidad, (2) la flexibilidad en el tiempo para que los estudiantes maduraran sus ideas, (3) la claridad en el establecimiento del propósito del trabajo, (4) el otorgamiento de diferentes bibliografías, y (5) el desarrollo del trabajo a través de grupos de estudiantes, (6) Cambio de actitud frente al conocimiento y aprendizaje, (7) modificación de la verticalidad de la relación por el establecimiento de una comunicación horizontal entre el estudiante y el docente y (8) no se le otorgó importancia a la extensión del trabajo (cantidad) sino a las múltiples conexiones que se establecieron (calidad).

Luego que se realizaron las dos partes del trabajo se instó a los estudiantes a que escribieran, de manera libre y de forma individual un balance del tipo reflexivo en relación con los objetos y procesos algebraicos manipulados en el contexto de la experiencia que significó llevar adelante la indagación y su posterior exposición pública. Una vez obtenida esta información, se procedió a organizarlas y a examinarlas mediante técnicas de análisis cualitativo de contenido. Algunos hallazgos preliminares muestran que el discente: concientiza la complejidad de los objetos propios del álgebra, comprende la conexión entre el lenguaje natural y el algebraico específico, en particular el rol del simbolismo en éste último; es capaz de articular sus logros en el área de álgebra a lo largo de la carrera universitaria; muestra potencialidad para vislumbrar el papel que jugará esta área en el reto interdisciplinar que deberá afrontar como futuro educador matemático. Además, constatamos un cambio actitudinal que propende al favorecimiento de la comprensión de los contenidos. Estas conclusiones resultan importantes si se les consideran en el contexto de las necesarias reformas que se deben introducir en la formación inicial del educador matemático con miras a la incorporación en ella de conceptos como la interdisciplinariedad.

Referencias bibliográficas

- Acevedo de M. y Falk de L. (2000). Formación del pensamiento algebraico de los docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(3), 245-264.
- Artigue, M. (2003). ¿Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Revista de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 117-134.
- Arzarello F., Bazzini L. y Chiappini, G. (1994). Intensional semantics as a tool to analyze algebraic thinking, *Rendiconti del Seminario Matematico*, 52(2), 105-125.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears." *Teaching Children Mathematics*, 10(2), 70-83.
- Gil, D., Pessoa, A., Fortuny, J. y Azcárate, C. (1994). *Formación del profesorado de las ciencias y la Matemática, tendencias y experiencias innovadoras*. Madrid: Editorial Popular S.A.
- Gómez-Granell, C. (1997). Hacia una epistemología del conocimiento escolar: El caso de la Educación Matemática. En M. J. Rodrigo y J. Arnay, (Comp.) *La construcción del conocimiento escolar*. 195-215, España: Paidós
- González, R. y González F. (2012). *Exploración Del Pensamiento Algebraico De Profesores De Matemática En Formación. La Prueba EVAPAL*”. Recuperado el 14 de marzo de 2013 en: http://www.ulbra.br/actascientiae/edicoesanteriores/acta_scientiae_v.13_%20n1_2011.pdf.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grows (Ed.). *Handbook of*

Research on Mathematics Teaching and Learning. 707-762, N Y: McMillan Publishers Co.

Küchemann, D. (1980). *The understanding of generalized arithmetic (Algebra) by secondary school children*, tesis de doctorado, University of London, Institute of Education.

Paulos, J. (1998). *El hombre anumérico. El analfabetismo matemático y sus consecuencias*. España: Tusquets, Editores, S.A.

Piaget, J. y García, R. (1983). *Psicogénesis e historia de las ciencias*. México: Siglo XXI.

Pimm, D. (2002). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Mir

Shelley, K. (2012). *Exactamente ¿qué es el pensamiento algebraico*. Recuperado el 18 de noviembre de 2012 en http://www.cfn609.org/uploads/4/6/9/6/4696562/just_what_is_algebraic_thinking.pdf

Sierpinska, A. (1996). Whither mathematics education? En C. Alsina, J.M. Alvarez, M. Niss, A. Pérez, & A. Sfard (Eds.), *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematics Education*, 21–46.