

CONJUNTOS MINIMOS DETERMINANTES PARA SPLINE BIDIMENSIONAL

Rogelio Ramos Carranza, Armando Aguilar Márquez, Frida María León Rodríguez, Omar García León y Juan Rafael Garibay Bermúdez

Universidad Nacional Autónoma de México.

México

egorrc@gmail.com, armandoa@unam.mx, fridam@unam.mx egor1131@unam.mx

Resumen. La idea fundamental de esta experiencia en clase, es explorar el objeto matemático de los conjuntos mínimos, a fin de transponer (Castañeda, 2004) el modelo que corresponde a dicho objeto de estudio y así, ponerlo al alcance de los estudiantes de ingeniería y tecnología; es decir, el problema planteado es determinar el camino adecuado; tal que los estudiantes puedan apropiarse del conocimiento, manejo y aplicación del modelo de los conjuntos mínimos para el "spline" bivariado (Verlan, 2011).

La hipótesis a tratar es que si mostrando las antecedentes cognitivos requeridos en el proceso que define al objeto matemático en estudio, se podría conseguir la trasposición didáctica en el estudiante.

La metodología consiste en la construcción del andamiaje o entramado didáctico, a fin de conseguir una buena aproximación a todos aquellos antecedentes matemáticos que intervienen en el modelo matemático propuesto. Esta teoría se fundamenta en un acercamiento continuo por parte de los estudiantes entre sus niveles de desarrollo potencial y desarrollo real.

Palabras clave: conjuntos mínimos, spline bidimensional

Abstract. The basic idea of this classroom experience, is to explore the mathematical object of the minimum sets in order to transpose (Castañeda, 2004) the model that corresponds to the object of study and thus make it available to students of engineering and technology that is, the problem is to determine the right path, so that students can acquire the knowledge, model management and application of the minimum sets for the "spline" bivariate (Verlan, 2011).

The hypothesis is that if you treat the cognitive antecedents required showing in the process that defines the mathematical object under study, one could get the student didactic transposition.

The methodology consists of the construction of scaffolding or educational network in order to get a good approximation to those mathematical background involved in the mathematical model. This theory is based on a continuous approach by students between their levels of potential development and real development.

Key words: minimal sets, bidimensional spline

Introducción

Algunos ejemplos de los conjuntos mínimos determinantes se muestran a continuación. (s.n., 2000)

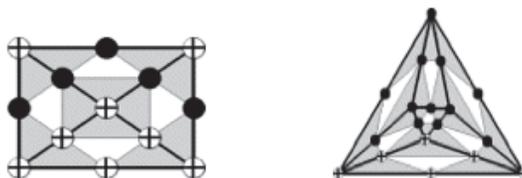


Figura 1: En esta figura se presentan ejemplos de conjuntos mínimos determinantes correspondientes a los casos de Vértice Singular (izquierda), y al de tipo Simétrico Separado de Morgan-Scott (derecha).

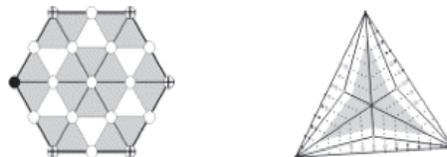


Figura 2: En esta figura se muestran dos casos de conjuntos mínimos determinantes correspondientes a los denominados Vértice No-Confinable (izquierda) y Doble Elemento Finito de Clough-Tocher C3 (derecha).

Uno de los elementos fundamentales del andamiaje es el planteamiento de un problema en el contexto de la ingeniería, el cual consiste en un caso propio para los estudiantes de las carreras de ingeniería; por ejemplo, se podría citar el fenómeno de convección y difusión del calor en un material cualquiera (metal, plásticos, etc.) y su representación mediante un mapa bidimensional obtenido mediante el spline bivariable.

Algunos otros casos en el ámbito o contexto de los estudiantes de tecnología, podrían consistir en determinar los modelos matemáticos obtenidos mediante el método spline bidimensional correspondientes a fenómenos tales como el comportamiento de campos gravitacionales o magnéticos, fenómenos asociados al comportamiento de los materiales sujetos a altas o bajas temperaturas, o al comportamiento de materiales diseñados con propósitos biofísicos o bien modelos representativos de fenómenos sociales.

El planteamiento de los casos mencionados, tiene como propósito mostrar la utilidad práctica del objeto de estudio en cuestión; así como, el de producir en el estudiante el motivo y significado del aprendizaje del objeto matemático planteado.

La experimentación se ha diseñado para estudiantes de las carreras de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Ingeniería Química y Licenciatura en Tecnología (Ramos, 2012). Consiste en mostrar todas aquellas herramientas matemáticas que intervienen en el modelado del spline bidimensional, mediante la determinación de conjuntos mínimos; es decir se le indicará al estudiante cuales son los antecedentes matemáticos requeridos, para que se asegure de que los pueda conocer y dominar.

Planteamiento del problema

El uso de la tecnología, con un diseño bien fundamentado en los conceptos propios de la teoría sociocultural del aprendizaje, puede provocar en el estudiante el facilitar la apropiación del conocimiento del objeto matemático de los conjuntos mínimos.

Hipótesis

La hipótesis a experimentar es que si mostrando las antecedentes cognitivos requeridos en el proceso que define al objeto matemático en estudio, se podría conseguir la trasposición didáctica por el estudiante.

Metodología

Para el propósito de la aplicación del objeto matemático tratado, se considera en esta breve comunicación, los fundamentos de la teoría humanista del aprendizaje. Específicamente estaremos usando el concepto de Zona de Desarrollo Próximo desarrollada por Lev Vygotsky, la cual se

puede describir en forma sintetizada como aquella que establece que, las capacidades de solución de problemas pueden ser de tres tipos: i) aquellas realizadas independientemente por el estudiante, ii) aquellas que no puede realizar aún con ayuda y iii) aquellas que caen entre estos dos extremos, las que puede realizar con la ayuda de otros.

Los procesos psicológicos superiores, que son procesos específicamente humanos, tienen su origen en la vida social, es decir, se constituyen a partir de la mediación y de la internalización, de prácticas sociales y de instrumentos psicológicos creados culturalmente (Vygotsky, 1979).

El conocimiento es un producto de la interacción social y de la cultura. Se resaltan los aportes de Vygotsky en el sentido que todos los procesos psicológicos superiores (comunicación, lenguaje, razonamiento, etc.) se adquieren primero en un contexto social y luego se internalizan. Así pues nos proponemos establecer mediante la conceptualización teórica de Vygotsky los objetivos estratégicos específicos:

a) Promover, la formación de los hábitos y actitudes que configuren un tipo humano capaz de convertirse en agente consciente del desarrollo (creatividad, capacidad de autoaprendizaje, sentido crítico, disciplina y organización en el trabajo, sentido de responsabilidad personal y social). Los medios de operar para conseguir este objetivo serán:

i) Diseñar y aplicar el entramado pedagógico que descansa más en la actividad del estudiante que en la labor informativa del maestro y que se oriente a eliminar la recepción pasiva de información, sustituyéndola por su análisis y comprensión.

ii) Conjuntar la comprensión de la teoría con su aplicación práctica. Propiciar en el estudiante la búsqueda y organización de la información. Preparar al estudiante en el uso personal de material informativo, como condición del auto-aprendizaje.

iii) Establecer sistemas de evaluación de conocimientos para considerar, junto con el aprendizaje, el logro de habilidades y hábitos positivos, que propicien una educación continua. Llevar a cabo reuniones y cursos con el personal docente para reorientar la enseñanza bajo los principios anteriores.

b) Facilitar al estudiante, la información de actualidad de la más alta calidad, con el propósito de estimular el proceso de auto desarrollo. Para la consecución de este objetivo se propone:

i) Establecer los medios que permitan el flujo, hacia la docencia, de la información sobre el desarrollo de la ciencia y la auto-evaluación y superación constante de la calidad del material informativo utilizado en la enseñanza.

ii) Implementar y aplicar la metodología para la transmisión del conocimiento de manera eficaz, que permita distribuir la información de mayor calidad al mayor número de personas en el menor tiempo posible.

Desarrollo del objeto matemático

El spline es una función polinomial segmentaria suavizada. Los splines de interés en este documento se definen como triangulaciones.

Sea T una triangulación y D la unión de triángulos en T . Así se define el espacio S .

$$S = S_d^r(T) = \{s \in C^r(D) : s|_{\tau} \in P^d\}$$

Este es el espacio de todas las funciones diferenciables r veces, que en cada triángulo se pueden representar como un polinomio de grado bivariable d .

Sea s el spline en S . Sobre cada uno de los triángulos τ en T , los cuales se expresan en la forma de Bernstein-Bezier. Debido a que se requiere que s sea por lo menos continuo, se identifican los puntos de control a lo largo de los ejes compartidos con los triángulos vecinos y ordena las ordenadas de Bezier en un vector c . En el caso de los splines que son continuos; es decir, $r = 0$, se puede asignar un valor arbitrario para cada entrada de c y así obtener todos los splines que son polinomios segmentarios de grado d y globalmente continuos. Un spline s en S , con r diferenciales, satisface las condiciones homogéneas de suavización:

$$Ac = 0$$

A es una Matriz m por n , en la que m es igual al número de condiciones de suavidad y n es igual al número de las ordenadas de Bézier de una spline en S . La dimensión de S es igual a $n - \text{rango}(A)$.

Cada ordenada de Bézier corresponde a un punto de dominio t . Por lo tanto, denotamos por c_t . También se denota el conjunto de todos los puntos de dominio por P . Un subconjunto Q de P es un conjunto de la determinación si

$$s \in S_d^r(T) \text{ y } c_t = 0 \text{ para toda } t \in Q \Rightarrow s = 0$$

Si Q no es más grande que cualquier otro conjunto de la determinación entonces es un *conjunto de la determinación mínima*. Se desprende de álgebra lineal básica que el número de puntos en cualquier conjunto de la determinación mínima es igual a la dimensión de S . Las ordenadas de Bézier correspondientes a los puntos en la determinación del conjunto mínimo pueden ser elegidas arbitrariamente y luego determinar únicamente una spline s en S . Se ilustran estos conceptos con un ejemplo que se muestra en la Figura 3.

Esta triangulación se conoce como la división de Clough-Tocher. Los vértices de los triángulos exteriores están etiquetados V_1 , V_2 , y V_3 .

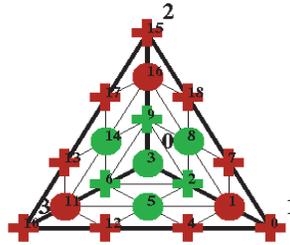


Figura 3. En esta figura se muestra la triangulación conocida como la división de Clough-Tocher

El punto interior es $V_0 = (V_1 + V_2 + V_3) / 3$

Para calcular las condiciones de suavidad a través del eje V_0V_2 , por ejemplo, se necesita expresar V_1 en términos de coordenadas Bari céntricas con respecto al triángulo $V_0V_2V_3$:

$$V_1 = 3V_0 - V_2 - V_3$$

Procediendo como se ha indicado se obtiene la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde por conveniencia las columnas se han etiquetado con los índices de los puntos del dominio.

En este ejemplo, $r = 1$ y $d = 3$. Hay tres bordes interiores, cada uno dando lugar a tres C^1 condiciones, para un total de 9 ecuaciones. El número total de puntos de dominio es de 19. (La etiqueta comienza con 0, porque así es como el lenguaje de programación Java considera los índices). El rango de la matriz es de 7 y la dimensión de S es de 12.

Resulta que los puntos marcados con signos más verdes y rojos forman un conjunto de determinación mínima. Por lo tanto las siguientes coordenadas de Bézier (indicado con signos más en la figura) se pueden establecer arbitrariamente:

$$C_0, C_2, C_4, C_6, C_7, C_9, C_{10}, C_{12}, C_{13}, C_{15}, C_{17}, C_{18}.$$

Dimensiones

Se ha demostrado (Schumaker, 1984) que para todos los $d \geq r \geq 1$, se cumple que:

$$\dim S_d^r(T) \geq A_d^r V_B + B_d^r V_I + C_d^r + \sigma$$

Dónde:

$$A_d^r = \frac{d^2 + d + 2rd + r^2 - r}{2}$$

$$B_d^r = d^2 - 3rd + 2r^2$$

$$C_d^r = 3rd - d^2 - \frac{3r(r-1)}{2} + 1$$

V_B = Es el número de vértices en la frontera de T

V_I = Es el número de vértices interiores de T

$$\sigma = \sum_{v \text{ interior}} \sigma_v$$

Y

$$\sigma_v = \sum_{j=1}^{d-r} (r + j + 1 - j e_v).$$

La suma de sigma (σ) se mueve sobre todos los vértices interiores v . e_v es el número de pendientes consideradas por los bordes que emergen de v . El término sigma (σ) captura una propiedad esencial de los espacios spline multivariados: la dimensión depende no sólo de la combinatoria de la triangulación, sino también de su geometría, es decir, la posición relativa precisa de los vértices.

Como se ha demostrado (Hong, 1991) que el límite inferior en la fórmula para el cálculo de la dimensión; la cual, determina la verdadera dimensión si:

$$d > (3r + 1)$$

Recomendaciones en la determinación de resultados

La experimentación se ha diseñado para estudiantes de las carreras de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Ingeniería Química y Licenciatura en Tecnología (Ramos, 2012). La experimentación consistirá en mostrar todas aquellas herramientas matemáticas que intervienen en el modelado del spline bidimensional, mediante conjuntos mínimos determinantes; es decir se le indicará al

estudiante cuales son los antecedentes matemáticos requeridos, para que se asegure de que los conoce y que entiende su desarrollo.

Cuando el estudiante manifieste dificultades en el conocimiento y dominio de los mencionados antecedentes; en cuyo caso, se propone dar al estudiante el apoyo necesario hasta conseguir una mejor aproximación en el dominio y aprendizaje de los antecedentes.

Se espera que una vez puesto en la escena escolar universitaria la propuesta de investigación aquí considerada, se pueda observar, que mediante la metodología utilizada, el estudiante se apropie del conocimiento del objeto matemático denominado conjuntos mínimos determinantes para el spline bivariado.

Agradecimiento .Por el apoyo brindado por el proyecto PAPIME: PE100112, para la realización de este trabajo.

Referencias Bibliográficas

- Bivariate spline spaces*. (sf). Recuperado 17 de julio de 2012 de [http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0427\(00\)00369-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00369-1).
- Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.
- Hong, D. (1991). Spaces of bivariate spline functions over triangulations. *Journal Approximation Thechnology Applicated* 7(1), 56-75
- Ramos, R. y Aguilar A. (2012). *Interpolación, Derivación e Integración Numéricas*. México: Comité Editorial de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM.
- Schumaker, L. (1984). Bounds on the dimension of spaces of multivariate piecewise polynomials. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 14(1), 251-264.
- Verlan I. (2011). About one algorithm of bidimensional interpolation using splines. *Computer Science Journal of Moldova*, 19(1), 64-71.
- Vygotsky, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Critica/Grijalbo.