LA INTEGRAL ABSOLUTA GAUSSIANA

Rogelio Ramos Carranza, Armando Aguilar Márquez, Frida María León Rodríguez, Omar García León y Juan Rafael Garibay Bermúdez

Universidad Nacional autónoma de México. México

egorrc@gmail.com, armandoa@unam.mx, fridam@unam.mx egor1131@unam.mx, juragabe@unam.mx

Resumen. Una de las propiedades geométricas diferenciales como una medida de la calidad en las aproximaciones numéricas para el modelado de superficies irregulares, se considera a la denominada integral absoluta gaussiana; expresión que se refiere tanto al área como a la curvatura de un determinado cuerpo o superficie. El problema que se plantea esta experiencia en clase es, el cómo tratar al modelado numérico en el proceso enseñanza y aprendizaje matemáticos en el aula (Arrieta, 2003). Las matemáticas tienen una intencionalidad y un lugar en un determinado estadio histórico de la cultura del ser humano. Se resuelve el problema utilizando una metodología en la que se circunscribe o contiene al objeto matemático en cuestión en un marco referido a la práctica contextualizada en el ámbito profesional de las Ingenierías y de la tecnología. La práctica se realizó en torno a los objetos: determinación de la Mejor Triangulación dependiente de los datos y la Integral Absoluta Gaussiana; objetos utilizados en reconstruir una superficie de datos espaciados irregularmente.

Palabras clave: integral absoluta gaussiana, modelado numérico

Abstract. A differential geometric properties as a measure of quality in the numerical approximation for modeling irregular surfaces, is considered a so-called absolute integrated Gaussian; expression that refers to both the area and the curvature of a given body or surface. The problem that arises is this experience in class, on how to treat the numerical modeling in mathematics teaching and learning process in the classroom (Arrieta, 2003). Mathematics has an intention and a place in a specific historical stage of human culture. We solve the problem using a methodology that is limited or contains the mathematical object in question in a framework on contextualized practice in the professional field of Engineering and Technology. The practice was carried around objects: Determining the Best Data Dependent Triangulation and Integral Absolute Gaussian; objects used to reconstruct a surface from irregularly spaced data.

Key words: gaussian absolute integral, numerical modeling

Introducción

El concepto básico, del objeto matemático Integral absoluta Gaussiana, tiene una expresión gráfica (Alboul, 1999), la cual se muestra en la figura 1.

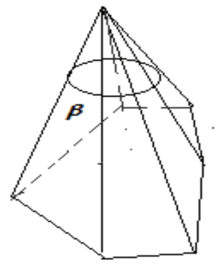

Figura 1: El objeto integral absoluta Gaussiana tiene un concepto fundamental llamado Curvatura, cuya expresión geométrica se visualiza en esta gráfica.

Un ejemplo de una aplicación (Alboul, 1999) del objeto matemático en estudio se muestra en la figura 2.

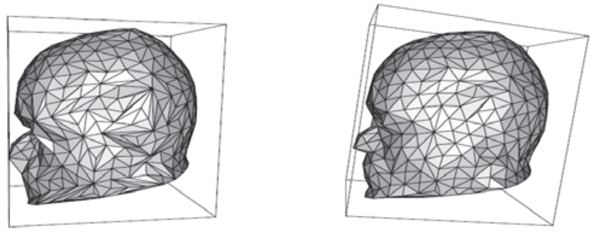

Figura 2: El antes (izquierda) y el después (derecha) de la aplicación del criterio de ajuste de la Curvatura, en la que se ilustra con un caso de aproximación a una parte del cuerpo humano

Una vez establecidos el contexto de la práctica y los objetos matemáticos de estudio, se consideran los elementos metodológicos que enseguida se refieren.

Un aspecto metodológico fundamental es la práctica social contextualizada, uno más de los elementos de la metodología es el modelado numérico y estos elementos se llevan a la actividad escolar universitaria. La propuesta teórica de este comunicado, se refiere al cómo se pueden poner en movimiento los mencionados elementos metodológicos mediante la ingeniería didáctica.

Cabe destacar que la modelación de fenómenos en el aula es posible debido a dos componentes fundamentales que son la metodología de la investigación en Matemática educativa y el desarrollo y aplicación de los medios tecnológicos, estos últimos utilizados como amplificadores de las capacidades sensoriales, motrices y racionalizadoras.

Para el diseño de la experimentación se proponen diversos casos que tratan de fenómenos ingenieriles y tecnológicos; y consiste en que, cada estudiante o equipo de estudiantes de distintas carreras (Ingeniería Mecánica, Eléctrica, Electrónica, Ingeniería Química y Licenciatura en Tecnología); propone un fenómeno asociado al objeto matemático numérico aquí tratado.

El problema es resuelto usando los medios tecnológicos que permiten realizar la práctica en el aula universitaria o bien mediante la recolección de los datos del experimento que corresponda al fenómeno planteado para procesarlos en el aula y ver los distintos resultados para su análisis e interpretación.

Se observa que el estudiante se ve motivado, debido a la puesta en escena de algunos elementos de la práctica didáctica; uno de estos elementos motivadores es la contextualización de los fenómenos propuestos por los estudiantes. Otros elementos de motivación son la visualización del fenómeno, la recolección de datos de la experimentación y el procesado de dichos datos de entrada usando medios tecnológicos.

Algunos aspectos metodológicos

Se han tratado muchas propuestas de tipo educativo, las que hacen caso omiso de la importancia que tiene el estudiante, el salón de clase y el contexto universitario. En esta comunicación se enfocan los esfuerzos en la atención a lo que sucede en el aula universitaria, y en el papel de la interacción social; argumentando que la construcción del conocimiento es un proceso social de creación conjunta y no un proceso individual aislado.

Como resultado de las prácticas ejercidas por grupos sociales en contextos sociales específicos y reproducidos por comunidades surgen los conocimientos matemáticos como construcciones sociales. Por lo tanto las matemáticas y la tecnología pueden ser vistos como empresas humanas; de ahí que es fundamental saber acerca de sus potenciales y limitaciones, y así utilizar el conocimiento científico con propósitos tanto sociales como personales. En el proceso socio epistemológico, las propuestas incluyen reflexiones sobre el papel que la universidad debe jugar.

Es muy importante mencionar que uno de los fundamentos de la metodología es el observar cómo, la modelación de un fenómeno en el aula o en el campo de acción, podría conformar una poderosa fuente de componentes para la construcción del conocimiento matemático.

Estos aspectos que hemos mencionado en esta comunicación han de ser sostenidos por los conceptos teórico-metodológicos, señalados por Jaime Arrieta en su tesis doctoral:

Sostenemos que el aprendizaje es una actividad situada en contextos sociales, donde los actores sociales ejercen prácticas usando y construyendo herramientas, modificando con esta actividad las mismas prácticas y las herramientas, su entorno, su identidad, su cognición y su realidad (Arrieta, 2003, p. 25).

Descripción del objeto Matemátic

Concepto de triangulación

La triangulación de un conjunto de datos es una técnica esencial para la solución de problemas en la reconstrucción de superficies; mediante la aproximación con interpolación de datos dispersos o bien en aplicaciones en las que se requiere recuperar objetos en tres dimensiones. El problema de la reconstrucción de una superficie puede ser formulado de la forma descrita a continuación.

Dado un conjunto de datos:

$$\left\{\left(x^i, y^i, z^i\right) \in R^3\right\} i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Ajustar una superficie al conjunto dado

Se supone que la ubicación de los datos es irregular.

En general En general no es posible interpolar o aproximar los datos sin pre procesamiento. Primero se necesita organizar los datos o, en otras palabras, construir una estructura sobre los datos. Por lo tanto el primer paso en la evaluación de una superficie es el de obtener una triangulación de los datos. La determinación de una triangulación de los datos, la aproximación más simple llamada C^0, es el camino más rápido y más barato para echar un vistazo inicial a los datos antes de pasar a la aplicación de los métodos de aproximación /interpolación de orden superior. Una buena triangulación puede ayudar a resolver muchos problemas.

Estos problemas no están limitados a la determinación de interpolaciones suavizadas, sino que también conciernen a la definición de forma del objeto (Zahn, 1971).

Utilizando criterios de geometrías puras (Alboul, 1997) han introducido nuevas triangulaciones de datos tridimensionales irregulares ubicados. El primero se denomina triangulación de ajuste y se basa en la optimización de una analogía discreta sobre la integral absoluta Gaussiana. Las Triangulaciones de ajuste son evidentemente mejor que las triangulaciones de Delaunay, como por ejemplo, la triangulación de ajuste conserva automáticamente convexidad. El segundo criterio de optimización que se propone (Alboul, 1997), concierne a triangulaciones que minimicen la *integral de curvatura media absoluta*. Hasta ahora no estaba claro cuál de los dos criterios era el mejor, y cómo se comparan con los métodos conocidos en la literatura, tales como:

Reducir al mínimo el área del objeto resultante, Criterios heurísticos los cuales se puede encontrar, Métodos basados en la minimización de un cierto funcional, como la energía de una placa de flexión, limitada por las condiciones de interpolación. (Con la desventaja de este método, que sólo funciona para los datos funcionales).

Así, en primer lugar se hará una breve revisión de los métodos de triangulación, basado en la minimización de la *absoluta* de Gauss y la curvatura media. Se han realizado experimentos numéricos para objetos cerrados con estos criterios de lo que resulta que estos últimos, en general, funcionan mejor, aunque este método puede ser que no preserve la forma: no se sabe si el método conserva convexidad en general.

La segunda parte describe la calidad de los métodos para el caso especial de datos funcionales: ambos métodos, tanto el ajuste como la minimización de la curvatura media absoluta, pueden ser comparados con los métodos conocidos en la literatura. También en estos casos el criterio principal parece ser superior cuando se trata de precisión

Criterios geométricos para una mejor triangulación

Esta sección revisará las cantidades geométricas, integral Gaussiana y la curvatura media de la triangulación, así como Gauss y curvatura media absoluta. Para suavizar los objetos curvatura de Gauss ***K*** y curvatura media ***H*** se definen en términos de las curvaturas principales λ_1 y λ_2 siendo estos los valores propios de la diferencial del mapa de Gauss.

Con lo que se define:

$$K = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad \text{y} \quad H = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} H = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2}$$

La versión integral de esas cantidades puede ser definida también para las triangulaciones, lo que permitirá definir, para diferentes criterios la mejor triangulación. Se consideran dos, de tales criterios.

Curvatura Gaussiana

La noción de curvatura gaussiana es uno de los conceptos centrales en geometría diferencial y está estrictamente relacionado con el concepto de ángulo. Sobre la base de la noción de ángulo, podemos definir las siguientes curvaturas de una triangulación Δ considerado como una superficie poliédrica:

La integral de curvatura k (análogo la integral de curvatura gaussiana).

El ángulo total $\theta(v)$ en torno al vértice v es la suma de los ángulos de todos los polígonos planos que inciden en dicho vértice, llamado el inicio de v, es decir $Star(v)$. Para cualquier punto $x \in \Delta$: $K(x) = 2\pi - \theta(x)$. La cantidad k es conocida como el déficit de ángulo. Solo para los vértices se tiene que $k(x) \neq 0$, ver figura 3.

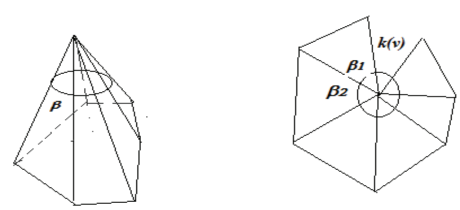

Figure 3. - Curvatura en torno al vértice: $K(v) = 2\pi - \sum \beta_i = 2\pi - \theta(v)$.

La curvatura positiva extrínseca $k^+(v)$

Supongamos que a través del vértice k pasa algún plano de apoyo (local), de una triangulación Δ. Entonces, este vértice se encuentra en el límite de la envolvente convexa de inicio $Star(v)$. Se denota el inicio v en el límite de la envolvente convexo por $Star^+(v)$ y le llamaremos el inicio del cono convexo de un vértice. La curvatura $k^{+}(v)$ de $Star^{+}(v)$ se llama la curvatura positiva (extrínseca) de v. Si no hay ningún plano de soporte a través de v entonces se coloca, $k^{+}(v)$ igual a cero .

El curvatura negativa extrínseca:

$$k^{-}(v):\ k^{-}(v) = k^{+}(v) - k(v).$$

La curvatura absoluta extrínseca:

$$\hat{k}(v):\quad \hat{k}(v) = k^{+}(v) + k^{-}(v).$$

Podemos definir los siguientes conjuntos de vértices:

Vértices convexos apropiados:

$$k(v) = k^{+}(v) = \hat{k}(v) \text{ y } k^{-}(v) = 0.$$

Geométricamente esto significa que $Star(v)$ coincide con $Star^{+}(v)$.

Vértices en forma de silla de montar apropiados:

$\hat{k}(v) = k^{-}(v) = -k(v)$

La curvatura gaussiana k de un montaje (silla de montar) de vértice adecuado es menor que cero y no existe plano de soporte, es decir, no existe un plano que pase a través del vértice v de tal manera que todos los vértices vecinos se encuentran en el mismo lado de (o en) este plano.

Vértices mixtos:

$$k^{-}(v) > 0 \text{ y } k^{+}(v) > 0$$

Un vértice es mixto, si no es ni convexo ni en forma de silla de montar. Por lo tanto, tiene un plano de soporte, pero existen dos sucesivas aristas incidentes en el vértice que abarcan un plano que divide el conjunto de vértices adyacentes.

Ejemplos de los tres vértices descritos se dan en la figura 4

Figura 4: Los tres tipos de vértices: convexo apropiado, silla de montar apropiado y , combinada

Curvatura Absoluta Total (extrínseca) $k_{abs}\,(\Delta)$ de una triangulación Δ esta dada por la expresión:

$$k_{abs}\,(\Delta) \;=\; \sum_{v_{\propto convex}} k^{+}(v_{\propto}) \,+\, \sum_{v_{\beta}\ saddle} k^{-}(v_{\beta}) \,+\, \sum_{v_{\gamma}\ mixed}(\,k^{+}(v_{\gamma}) \,+\, k^{-}(v_{\gamma})).$$

Para cualquier traingualación apropiada convexa, silla de montar apropiada y vértices combinados forman una partición de todos los vértices.

Definición. Dado un conjunto de datos $\{x^{i}\}\ i = 1, 2, 3, \ldots, N$. Una triangulación $\bar{\Delta}$ del conjunto de datos, utilizados para ajustar una triangulación, si es apropiado, y si $k_{abs}(\bar{\Delta})$, es mínima, es decir:

$$k_{abs}(\Delta) \;\leq\; k_{abs}(\bar{\Delta})$$

Para todas las otras posibles triangulacionesΔ.

Algunas propiedades de la triangulación ajustada (Alboul, 1997), son descritas; siendo la más importante aquella que conserva convexidad. Por otra parte se puede demostrar que con el algoritmo de intercambio local (Lawson, 1977), primero sugerido por el citado autor, en realidad este óptimo global puede obtenerse si los datos son convexos.

Por desgracia, este criterio de optimización tiene algunos resultados negativos, puesto que parece crear triángulos largos y delgados no deseados.

Otra curvatura que se puede definir para un poliedro y en consecuencia, para una triangulación, es la curvatura media. Se demuestra fácilmente que una definición apropiada para la integral de curvatura media en una tira a lo largo de un eje e, está dada por:

$$H(e) = \;\alpha \cdot \;\|x_{i} - \;x_{j}\|$$

Aquí $x_{i},\ x_{j}$ son las coordenadas de los vertices del eje e, y α es el ángulo entre las normales de los dos triángulos los cuales tienen al eje e en común. (Esto puede ser derivado, al considerar una aproximación C^{1} de la triangulación remplazando los ejes por un cilindro de radio pequeño.

El criterio de minimización de la curvatura media absoluta esta dado por:

$$H_{abs} = \sum_{e} |H(e)|,$$

Y en consecuencia una triangulación de un conjunto de datos, se dice que es la triangulación de mínima curvatura media absoluta, siH_{abs} es adecuada y se reduce al mínimo. Esta definición implica que buscamos triangulaciones que minimicen:

$$\int_K (|k_1 + k_2|)\, dS$$

También como

$$\int_K (|k_1| + |k_2|)\, dS$$

Puesto que:

Los vértices no tienen contribución alguna en la integral, ya que tienen medida cero, Los puntos dentro los triángulos no tienen contribución, ya que ambas curvaturas principales son cero.

Los bordes tienen contribución, pero sólo de una curvatura principal, el otro es cero. Dado que sólo una de las dos curvaturas principales es distinta de cero, también se reducen al mínimo las siguientes cantidades:

$$\int_\Omega \max(|k_1|, |k_2|)\, dS, \quad \int_\Omega \sqrt{k_1^2 + k_2^2}\; dS$$

Este criterio da resultados muy prometedores. Este resultado se obtiene utilizando un algoritmo de intercambio local con condición inicial como la triangulación ajustada, obtenido en la subsección anterior.

Podemos concluir que minimizar la curvatura absoluta gaussiana, es decir, el criterio de ajuste, no es muy aplicable a conjuntos de datos generales. El criterio de zona se ha demostrado que conduce a resultados pobres, incluso en el caso óptimo a nivel global. El criterio más prometedora parece ser minimizar la curvatura absoluta media, o (al menos casi siempre es bueno) los dos métodos ABN (Ángulo entre normales) y JND (Jump in Derivadas normales). El método de Quak y Schumaker da triangulaciones demasiado conservadoras, en general. Aparte de eso, su método es más caro como todos los otros criterios que se pueden calcular a nivel C^0.

Resultados esperados

En este artículo ponemos nuestra atención en cómo el humano participa en contextos sociales en los que, se construye el conocimiento y la realidad. El propósito de este tipo de experimento es crear un contexto argumentativo en el que los estudiantes y profesores interactúan en el aula en la construcción y el ejercicio de las prácticas sociales, argumentos, herramientas y significados de la interacción con un fenómeno.

Agradecimiento. Por el apoyo brindado por el proyecto PAPIME: PE100112, para la realización de este trabajo.

RefRerencias Bibliográficas

Alboul, L. & Van Dame R. (1997). Polyhedral metrics in surface reconstruction: tight triangulations. In T. N. T. Goodman (ed.), *The mathematics for surfaces,* 7(1), 309-336.

Alboul, L., Kloosterman, G., Traas C. & Van Damme R. (1999). *Best data-dependent triangulations*. Memorandum No. 1487, University of Twente. Holland.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Lawson, C. (1977). Software for C1 surface interpolation. In J. Rice (ed.), *Mathematical software III*, Academic Press, New York.

Zahn, C. (1971). Graph-theoretical methods for detecting and describing gestalt cluster. In IEEE. Trans. Comput., pp. 68-86.