

## EL USO DE MANIPULABLES PARA PROPICIAR LA COMPRESION DEL SIGNIFICADO DE ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS, Y DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Paola Tonanzy García Mendivil y Jorge Ruperto Vargas Castro  
Universidad de Sonora  
paolatonanzy76@gmail.com, rvargas@gauss.mat.uson.mx

México

**Resumen.** El presente trabajo es una investigación en curso, en donde se pretende analizar el papel que juega la utilización de manipulables (balanzas concretas y balanzas simuladas utilizando GeoGebra) como recurso didáctico para propiciar la comprensión del significado de ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes de secundaria, de entre 13 y 15 años de edad, mediante una manipulación activa de dichos aparatos a través del contacto directo de estos con los estudiantes, empleando las piezas concretas únicamente como un puente hacia el entendimiento de ideas abstractas.

**Palabras clave:** balanza, registros semióticos, GeoGebra

**Abstract.** The present work is a research in progress, which aims to analyze the role played by the use of manipulatives (concrete balance and simulated balance using Geogebra) as a didactic resource to foster understanding of the meaning of linear equations, quadratic and linear equations systems in secondary school students, aged between 13 and 15 years old, through active manipulation of such equipment through direct contact of these with students, using specific parts only as a bridge to understanding abstract ideas.

**Key words:** balance, semiotics registries, GeoGebra

### Introducción

Esta investigación se desarrolla en el nivel básico, concretamente en una escuela secundaria de Hermosillo, Sonora; y los temas matemáticos de estudio son ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales, ubicados en el tema de patrones y ecuaciones, que viene señalado en el eje temático Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico, establecido en la curricula de Matemáticas de la actual reforma educativa en México. Buscándose corresponder a uno de los ocho propósitos del estudio de las Matemáticas para la educación secundaria que señala el programa de estudio; y el cual es que “modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones” (Secretaría de Educación Pública, 2011, p. 14).

Los manipulables poseen un carácter exploratorio propiciando la comunicación, discusión y reflexión de los estudiantes en la resolución de problemas.

### La problemática

En México los temas matemáticos ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales aparecen en primero y segundo año de secundaria; ecuaciones cuadráticas aparecen en tercer año, continúa en los años siguientes de enseñanza media y llega hasta la enseñanza superior. Es importante que el

estudiante domine estos temas porque formarán parte imprescindible de otros contenidos matemáticos a lo largo de su formación académica.

La preocupación surge cuando constatamos el hecho de que muchos estudiantes de secundaria y bachillerato manifiestan serias deficiencias en torno a estos temas, y también porque en nuestra experiencia docente hemos observado que un porcentaje significativo de estudiantes de nivel superior también experimentan dificultades para resolver dichos temas.

Gerard Vergnaud (citado por Rabino y colaboradores, 2004) en su artículo: “Tiempo largo y tiempo corto en el aprendizaje del álgebra”, analiza ciertos aspectos a tener en cuenta en la transición entre el tratamiento aritmético de una situación problemática a resolver y el tratamiento algebraico. Dicho autor señala que el álgebra representa una doble ruptura epistemológica: por una parte, la introducción de un desarrollo formal en el tratamiento de problemas habitualmente tratados intuitivamente, por otra parte la introducción de objetos matemáticos nuevos como ecuación e incógnita, función y variable, monomio y polinomio, también menciona algunas de las dificultades que se presentan en la introducción del álgebra como es la significación del signo de igualdad, la introducción de procedimientos matemáticos nuevos, el sentido que se le puede dar eventualmente a la solución negativa de una ecuación.

En su artículo Vergnaud alude a que el álgebra exige más a menudo que se manipulen incógnitas, lo que es no intuitivo ya que los estudiantes rechazan razonar y operar sobre incógnitas o sobre números desconocidos. Este autor plantea que el equilibrio de la balanza permite dar sentido a la vez a las propiedades de simetría y transitividad del signo de igualdad y a las manipulaciones algebraicas que permiten resolver las ecuaciones con valores positivos.

### **Planteamiento del problema y objetivos de la investigación**

En esta investigación se está tratando de dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿La utilización de manipulables (balanzas concretas y simuladas) resulta ser o no pertinente para propiciar en los estudiantes de secundaria, la comprensión del significado de ecuaciones lineales y cuadrática, y sistemas de ecuaciones lineales? Para dar respuesta a ella nos propusimos los siguientes objetivos:

El objetivo general de la propuesta se plantea, de acuerdo a la teoría de las representaciones semióticas de Duval, de la siguiente manera:

Analizar el papel que juega la utilización de manipulables (balanzas concretas y simuladas) en la construcción conceptual de Ecuación Lineal y Cuadrática, y de Sistemas de Ecuaciones Lineales en los estudiantes de la Escuela Secundaria, a través del pasaje de los diferentes registros de representación semiótica.

Para que se logre el objetivo propuesto, a su vez, se plantean los siguientes objetivos específicos:

Propiciar en los estudiantes el inicio del proceso de construcción de las nociones de ecuación lineal, cuadrática y sistemas de ecuaciones lineales, mediante el uso de balanzas concretas al realizar acciones de exploración, reflexión y análisis.

Utilizar balanzas simuladas en el software GeoGebra para coadyuvar el inicio de un proceso de abstracción de las nociones de ecuación lineal, cuadrática y de sistemas de ecuaciones lineales.

Utilizar applets en GeoGebra, para generar en los estudiantes la capacidad de construir los conceptos de ecuación lineal, cuadrática y de sistemas de ecuaciones lineales en sus distintas representaciones.

Es importante mencionar que al utilizar manipulables, no comprometa toda la atención de los alumnos, desplazando la propia reflexión matemática.

### Marco teórico

A continuación mostramos algunos elementos de la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval, los cuales son el referente teórico en el que se enmarca la elaboración de este trabajo.

Cuando hacemos matemáticas siempre utilizamos algún tipo de representación, debido a que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción o a través de una experiencia intuitiva inmediata; por lo tanto en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, emplear diversas representaciones es inevitable.

Cabe señalar que “no se debe confundir al objeto matemático con su representación, pues a mediano o largo plazo, esta confusión provoca una pérdida de comprensión”. (Duval, 1998, p.173). El autor sostiene que todo acceso a los objetos matemáticos (ecuaciones, funciones, etc.) pasa necesariamente por las representaciones semióticas. Sin embargo, no se puede confundir nunca un objeto matemático y su representación, el objeto puede tener otras tantas representaciones diferentes de las que uno ve.

El enfoque teórico de Duval sobre registros de representación considera que no hay conocimiento que pueda ser movilizado por un sujeto sin una actividad de representación y que la utilización de varios sistemas de representación es esencial para el ejercicio y el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales.

En la misma obra Duval hace notar que las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma.

También el autor define las representaciones semióticas como producciones humanas constituidas por el empleo de signos y que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significación y de funcionamiento. Un enunciado en lengua natural, una figura geométrica, una gráfica, una expresión algebraica son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes.

Dicho autor señala que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

1. La formación de una representación identificable dentro de un registro dado. Por ejemplo, el enunciado de una frase, la elaboración de un dibujo o esquema, de una gráfica, la escritura de una expresión algebraica, etcétera.
2. El tratamiento de una representación, que es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna de un registro. Por ejemplo, la transformación equivalente de una expresión algebraica.
3. “La conversión de una representación que es la transformación en una representación dentro de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial” (Duval, 1998, p. 175). Por ejemplo, la transformación de una expresión algebraica en una gráfica, o viceversa).

En la actividad matemática es esencial poder movilizar y coordinar varios registros de representación semiótica en una situación, y poder escoger entre un registro y otro.

Duval da tres razones para justificar lo anterior:

1. La conveniencia del tratamiento.
2. La complementariedad de los registros. Toda representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que ella representa y de un registro a otro, no son los mismos aspectos del contenido de una situación los que se representan.
3. “La conceptualización implica una coordinación de registros de representación. El tener acceso a varios registros es fundamental para no confundir el objeto matemático con sus representaciones, y también para poder reconocerlo en cada una de ellas” (Duval, 1998, pp. 181-182).

Duval llama semiosis a la aprehensión de las representaciones semióticas y noesis a la aprehensión conceptual. Afirma que no hay noesis sin semiosis, lo que significa que no hay acceso al objeto matemático sino a través de sus representaciones semióticas.

El diseño de las hojas de trabajo promueve la articulación de los registros de representación: verbal, tabular, gráfico y algebraico, y así como el realizar un tratamiento adecuado en cada registro de representación, haciendo uso como recurso didáctico de la balanza concreta y simulada, a través del software de geometría dinámica GeoGebra; que vuelva asequible en los estudiantes, la construcción de los significado de dichos conceptos matemáticos.

Un estudiante que aprende el tema de ecuaciones es necesario que tenga claro que existen varias representaciones para una misma ecuación. La aprehensión del concepto matemático demanda entonces que éste sea identificado en sus diversas formas de representación.

Cuando un estudiante tiene acceso a todas las representaciones de un objeto matemático, es capaz de identificarlas, darle un tratamiento adecuado en cada registro de representación y además hacer una articulación coherente de los diferentes registros de representación sin contradicciones, el estudiante puede acceder a ese conocimiento y apropiárselo. Sin embargo, esta articulación entre diferentes registros de representación no es espontánea, y debe por tanto ser objeto explícito de enseñanza.

En la teoría de Duval, el proceso de reformulación o tránsito de cualquiera de las representaciones equivalentes a cualquier otra de ellas constituye un tratamiento dentro del mismo registro de representación.

### Método

Balanza concreta. La versión elegida consiste en una balanza de platillos, articulada en forma de paralelogramo, con sus elementos laterales siempre verticales y los elementos horizontales diseñados de tal manera, que cuando en los platillos se tenga el mismo peso, éstos deberán estar a la misma altura.

Para ecuaciones lineales con una incógnita, se utiliza una balanza sencilla, y se trabajan con ecuaciones del tipo de  $x + a = b$ ,  $ax = b$ ,  $ax + b = c$  y  $ax + b = cx + d$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números enteros no negativos.

Y para el caso de sistemas de ecuaciones lineales de  $2 \times 2$ , se utiliza una combinación de balanzas (dos balanzas).

La correspondencia entre los elementos de la ecuación y los de la balanza son los siguientes:

- ❖ Una ecuación se representa mediante una balanza en equilibrio: en los platillos del lado izquierdo de la balanza se representa el primer miembro y en los platillos del lado derecho de la balanza se representa el segundo miembro.

- ❖ Los términos independientes de una ecuación se representan mediante canicas depositadas en tapaderas descubiertas.
- ❖ Los términos con incógnita se representan mediante tapaderas cubiertas, que representarán las cantidades a descubrir (incógnita).
- ❖ Los números enteros serán representados con canicas.

La balanza simulada es una representación plana de la balanza tangible desarrollada en GeoGebra. En este tipo de balanza simulada los términos independientes no requieren de un recipiente, las canicas se acomodan formando un montón; los recipientes que representan a la incógnita quedan plasmados en rectángulos apilados. Para realizar las manipulaciones de estos elementos se utilizan deslizadores que se desplazan con la ayuda del *ratón*.

Los tipos de ecuaciones serán  $x + a = b$ ,  $ax = b$ ,  $ax + b = c$  y  $ax + b = cx + d$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números enteros no negativos.

Adicionalmente se mostrará la representación algebraica del contenido de cada platillo. En la figura 4 se puede observar una balanza simulada en GeoGebra.

Mediante hojas de trabajo, se busca la vinculación entre las diferentes representaciones de ecuaciones lineales, cuadráticas y de sistemas de ecuaciones lineales como condición necesaria para la aprehensión efectiva de dichos conceptos en los estudiantes de la escuela secundaria.

Se plantea que a partir de la situación del equilibrio de la balanza, una representación icónica tangible como registro de partida, el estudiante realice la conversión a la representación en el registro verbal (lengua natural). Posteriormente se establece que el estudiante a partir de la representación hecha del registro verbal, lleve a cabo una actividad de conversión a la representación en el registro tabular; en este registro tabular se le da un tratamiento para poder llegar a la conversión de la representación en el registro gráfico; y del registro gráfico se lleve a cabo una conversión al registro algebraico, como registro de llegada; mediante una situación contextualizada como lo es el uso de las balanzas.

En las actividades se manipulan las balanzas realizando las operaciones que equivalen a las operaciones algebraicas, paulatinamente se representan los equivalentes algebraicos; el estudiante corrobora que efectivamente el equilibrio (o desequilibrio) refleja la relación entre los contenidos de canicas de ambos lados (izquierdo y derecho), ya sea de equivalencia, cuando hay equilibrio, o de mayor que, cuando hay desequilibrio; el realizar modificaciones en los contenidos manteniendo siempre el equilibrio en la balanza, sabrá que si agrega o quita cierta cantidad o proporción de un

lado, tiene que realizar lo mismo del otro lado. En la figura 1, se muestra a estudiantes manipulando las balanzas concretas.



Figura 1: Estudiantes manipulando balanzas concretas

Se tiene como escenario para la investigación, un grupo de estudiantes de la Escuela Secundaria General No. 4 *Profesor Rubén Gutiérrez Carranza* ubicada en calle Reforma y José María Mendoza de Hermosillo, Sonora.

El trabajo de implementación y observación se lleva a cabo durante 10 sesiones de 50 minutos cada una, en el aula asignada para la clase y en un laboratorio de cómputo, en donde se trabaja en la computadora, resolviendo las tareas propuestas en las hojas de trabajo.

Cabe señalar que por motivos de espacio se hace más alusión al tema de ecuaciones lineales.

En un primer momento los estudiantes manipulan la balanza concreta, las figuras 2 y 3 ilustran la balanza concreta para ecuaciones lineales; en la figura 2 muestra a la balanza en equilibrio (refleja la misma cantidad de canicas en ambos lados de los platillos), mientras que en la figura 3 se ve representado el desequilibrio.



Figura 2: Balanza concreta para ecuaciones lineales



Figura 3: Balanza concreta para ecuaciones lineales

En un segundo momento se trabaja con la balanza simulada, véase Figura 4, utilizando las características dinámicas del GeoGebra.

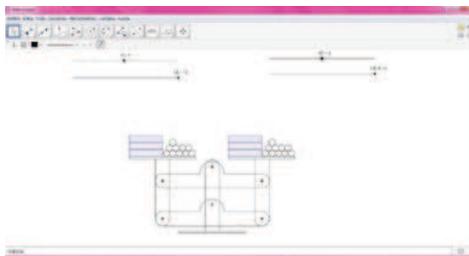


Figura 4: Balanza simulada para ecuaciones lineales

Y como última etapa se utilizaron applets de GeoGebra, para que los estudiantes construyeran los conceptos de ecuación lineal, cuadrática y sistemas de ecuaciones lineales a través de sus diversas representaciones. Este tipo de tecnología tiene la ventaja de estar dentro de los considerados software libres. La figura 5 muestra el Applet elaborado para sistema de ecuaciones lineales.

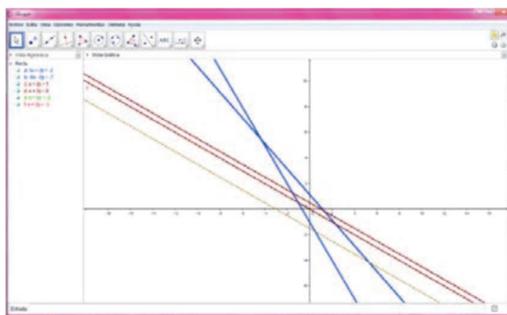


Figura 5: Applet para sistema de ecuaciones lineales

### Consideraciones finales

Dado que la presente investigación se encuentra en proceso, no se presentan conclusiones. Sin embargo, cabe hacer mención que los manipulables (balanzas concretas y simuladas) crean un ambiente en donde se facilita la construcción del conocimiento sin mecanizaciones, haciendo énfasis en que las ecuaciones al igual que la balanza, tienen que conservar el equilibrio o la igualdad para encontrar la solución.

Nuestro análisis de la información se basará en las observaciones de clases, en los resultados que arrojen las hojas de trabajo, los cuestionarios y en las entrevistas individuales al final del trabajo.

La inclusión dentro del aula de clase de un modelo como la balanza, puede dotar de significado a los símbolos, facilitando en los estudiantes, los procesos de desarrollo de aprendizaje y resolución de las ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas.

El uso de la computadora en el campo educativo ha potenciado la posibilidad de la explotación de los recursos de representación semiótica en la enseñanza de las matemáticas

## Referencias bibliográficas

- Duval, R. (1995) Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En: *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas. Escuela Francesa*. 125-139. DME CINVESTAV IPN.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática educativa II*, (pp.173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Rabino, A., Cuello, P. y De Munno, M. (2004). Aprender álgebra utilizando contextos significativos. *Revista Premisa*, 22, 36-42.
- Rojano, M. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 75, 5-20.
- Secretaría de Educación Pública (2011). *Programas de Estudios 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas*. México: SEP.
- Uicab, R. (2009). Materiales tangibles. Su influencia en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1007-1013. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Vlassis, J. (2002). The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics* 49, 341–359.