UN DISPOSITIVO DIDACTICO PARA LA ENSEÑANZA FUNCIONAL DE LAS MATEMÁTICAS: LAS ACTIVIDADES DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN - AEI

Marta Bonacina, Claudia Teti, Alejandra Haidar, Santiago Bortolato y Valeria Philippe
Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas, Univ. Nacional de Rosario. Argentina
mbacuario@yahoo.com.ar, cteti@live.com.ar, alejandrahaidar@yahoo.com.ar

Resumen. En este trabajo presentamos un avance en el diseño de dispositivos didácticos con los que dar cuenta de la siguiente problemática: lograr una enseñanza funcional de la Matemática; o sea, una enseñanza que proporcione al estudiante los conceptos y técnicas necesarios para dar respuesta a situaciones problemáticas, no se limite a una presentación desarticulada y carente de sentido de los mismos.
Nuestro modelo didáctico lo constituye la *Teoría Antropológica de lo Didáctico,* dentro del cual reconocemos dos conceptos de utilidad para los fines perseguidos: los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) y las Actividades de Estudio e Investigación (AEI). En particular, y en esta instancia, presentamos una AEI diseñada en torno a la noción de función y con el objetivo de dar respuesta al fenómeno didáctico de la falta de articulación entre las distintas formas de representar funciones.
Palabras clave: actividades estudio e investigación, funciones, representación
Abstract. In this paper we present a progress in the design of didactics dispositive with the aim of expose this issue: reach a functional math education; meaning, an education that would provide the student with the necessary concepts and techniques in order to solve problematic situations, without being limited to an unarticulated and meaningless presentation of those concepts and techniques.
Anthropological Theory of Didactics constitutes our model, in which we recognize two useful concepts for the objectives we are looking for: the Study and Research Course (SRC) and the Activity of Study and Research (ASR), In particular, and in this instance, we present a ASR designed around the notion of function and with the purpose to give an answer to the educational phenomenon of the lack of articulation between different ways of representing functions.
Key words: activity study and research, functions, representation

Introducción

Estudiar Matemática presenta dificultades tanto en el Ciclo Medio como en el Superior. En este último, el que nos ocupa, se observa actualmente un alto índice de deserción y fracasos, sobre todo en los primeros años de cursado.

Trabajos recientes de investigación en Didáctica de las Matemáticas concluyen que en las prácticas actuales se enfatiza el desarrollo de habilidades algebraicas y se desatiende la búsqueda de *comprensión* de las nociones (Artigue, 1998; Zuñiga, 2007). En este contexto surge la expresión "fenómeno didáctico" para referirse a aquellos hábitos o modos que se manifiestan en el aula con una regularidad fácilmente observable pero difícil de modificar y que tienen su correlato en la forma como el conocimiento fue impartido. Por ejemplo: "en la enseñanza de las Matemáticas en secundaria se observa el predominio del uso del registro algebraico y una marcada dificultad para articular el mismo con los demás registros, en especial, el gráfico" (Bosch, 2000). Creemos que este tipo de fenómeno, constatado en nuestros cursos habituales, constituye uno de los principales obstáculos para el aprendizaje.

El objetivo de nuestra investigación es dar cuenta de la siguiente problemática: lograr una enseñanza funcional de la Matemática; o sea, una enseñanza que proporcione al estudiante los conceptos y técnicas necesarios para dar respuesta a situaciones problemáticas, no se limite a una presentación desarticulada y carente de sentido de los mismos (a nuestro entender, principal razón de los "fenómenos didácticos" mencionados).

A tal efecto, nos hemos propuesto trabajar en el marco de lo que Chevallard denomina la "pedagogía de la investigación" o "del cuestionamiento del mundo". Para trabajar en esta dirección y sentido Chevallard propone los "Recorridos de Estudio e Investigación" (REI) y las "Actividades de Estudio e Investigación" (AEI), dispositivos que priorizan el carácter funcional de la Matemática y posibilitan un importante protagonismo de la herramienta informática.

En el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) la unidad elemental de análisis de la actividad matemática no es el concepto sino la praxeología u Organización Matemática (OM) de la que este "emerge"; en otras palabras, aquella donde se consideran y explicitan las actividades que "le dan vida".

Un REI es un dispositivo que se genera a partir de la búsqueda de respuesta a una "cuestión generatriz" que, para ser respondida, requiere la construcción de toda una secuencia de organizaciones matemáticas (OM) completas y articuladas (Serrano, Bosch, Gascón, 2007). Se reconoce el carácter abierto y dinámico de los REI como un hecho que hace a la completitud de los mismos pero que a la vez plantea cuestiones que van más allá de los límites de aplicación que, en general, son aceptados en las instituciones educativas.

La construcción de una AEI comprende los mismos pasos que la de un REI pero se pueden obviar cuestiones que caracterizan los REI y dificultan su aplicación. Estos dispositivos son anteriores a los REI y básicamente difieren de estos en lo relativo al "control del tiempo didáctico". En la construcción de las AEI el tiempo destinado a cada actividad es una variable a considerar. Si bien las AEI no resuelven acabadamente el problema de la monumentalización del saber (Bosch, Gascón et al, 2011), tienen un punto en común con los REI, exigen un cuestionamiento fuerte al contrato didáctico tradicional. En función de ello estimamos que las AEI constituyen una opción *gradualista y viable* para trabajar en medios no preparados para la pedagogía de REI; que son una alternativa válida para comenzar a introducir en las instituciones educativas la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo.

En este trabajo en particular, presentamos una Actividad de Estudio e Investigación diseñada en torno a la noción de función con el objetivo de dar respuesta al fenómeno didáctico de la falta de articulación entre las distintas formas de representar funciones.

Marco teórico

El principio fundamental de la TAD radica en que "toda actividad humana regularmente hecha puede describirse con un modelo único denominado praxeología". En particular y respecto a la actividad matemática y el saber que de ella emerge, hablamos de praxeologías u Organizaciones Matemáticas (OM).

Una OM es una entidad compuesta por: tipos de problemas o "tareas"; tipos de técnicas que permiten resolver las tareas; tecnologías o discursos (logos) que describen y explican las técnicas; una teoría que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos. Los tipos de tareas y los tipos de técnicas constituyen el "saber-hacer" matemático mientras que los discursos tecnológicos y teóricos conforman el "saber" matemático propiamente dicho.

En este modelo, "hacer matemática" consiste en activar una OM, es decir en resolver determinados tipos de tareas con determinados tipos de técnicas (el "saber hacer"), de manera inteligible, justificada y razonada (mediante el correspondiente "saber").

"Enseñar y aprender matemáticas" comprende la actividad de "reconstrucción" de una OM para utilizarlas en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones.

Para realizar la actividad matemática se acude a una pluralidad de registros (escrito, gráfico, verbal). El reconocimiento de dificultades ligadas a la articulación entre ellos no es privativo de la TAD; pero en esta se enfatiza la no-diferenciación entre registros desde el punto de vista de su "valor" o "función" en el trabajo matemático.

En cuanto al desarrollo y análisis de la actividad de construcción de una OM; es decir, de cómo organizar el proceso de estudio de las cuestiones a considerar a tal efecto, aparecen dos aspectos inseparables: *el objeto matemático a construir* y *la manera como puede ser construido*. El primer aspecto es de hecho el *producto* a obtener (la OM); el segundo es el proceso de estudio y construcción de lo que llamamos su *organización didáctica* (OD). Como toda praxeología, una OD se articula a través de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que aquí denominamos "didácticas" (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003).Este proceso de estudio se caracteriza por tener una estructura organizada en distintos *momentos didácticos* relativos al encuentro con la actividad desde distintas perspectivas.

Diseño de un proceso de estudio para construcción de una AEI

En primera instancia procedimos a la discusión y elección de la mínima infraestructura praxeológica necesaria al efecto de alcanzar los objetivos propuestos según y acorde la OD pretendida. O sea, a la identificación de las variables *didáctico-matemáticas* a partir de las cuales comenzar a generar la *familia de tareas* que conformarían la AEI. Se procedió también al análisis del equipamiento praxeológico con que debía contar el alumno:

Sistemas de referencia, distancia entre puntos, cónicas, ecuación de las cónicas. Definición de función (**f**); conjuntos asociados a **f**: dominio "natural", codominio e imagen; distintos registros para **f** : ***gráfico, numérico, algebraico y verbal***; criterios gráficos para el tratamiento de una ***curva/función***, operaciones entre funciones.

Concluida esta instancia, procedimos a proponer la "cuestión generatriz inicial", **CG_o**; o sea, el punto del cual partir al efecto de decidir y secuenciar las tareas (**T**) requeridas para dar respuesta a los distintos interrogantes que, indefectiblemente, debían ir presentándose al tratar de dar respuesta a la cuestión inicial.

Estructura general del AEI

OMo $\rightarrow$ CGo: "La representación algebraica de una función,

¿Se puede obtener a partir de su representación grafica?.

To: Para cada función elemental obtener su representación algebraica (ecuación) conocida su representación gráfica (curva).

OM1→ CG_1: ¿Se puede **operar** con funciones?

T1: Operaciones entre o sobre funciones: algebraicas $(\pm ; \times ; \div)$, composición, inversa y <u>transformaciones</u>

<u>DESARROLLAMOS</u>: <u>transformaciones</u>

OM2→ CG_2:¿Existe algún criterio para **agrupar** funciones?;¿ Para **caracterizar** estas agrupaciones?

T2: Clases de Funciones, Ecuaciones Prototipo

<u>Descripción de T2</u>: Dada C_i = graf f_i (C_i = recta, potencia, recíproca) obtener la ley de $\mathbf{f_i}$ con fórmula **y=f(x)**. Luego, y en base a lo visto en **T1** (transformaciones), hallar la "ecuación prototipo" correspondiente a la clase de funciones a la que pertenece cada $\mathbf{f_i}$.

<u>OD-T2</u>: Las actividades propuestas tienen por objeto trabajar la idea de "clase o familia de funciones"; identificar los parámetros característicos para cada clase; sus propiedades *geométricas* (simetrías, asíntotas) y *analíticas* (crecimiento, decrecimiento, extremos). En cada "tarea" se proponen actividades que fuercen al estudiante a reconocer y/o justificar la "técnica" utilizada para resolverla.

En lo que sigue mostramos la secuencia de OM a través de las cuales entendemos el estudiante logrará una apropiación significativa del objeto matemático propuesto en **T1**

OM1 → CG$_1$: ¿Se puede operar con funciones "gráficamente"?

T1: TRASFORMACIONES

CG$_{1.1}$: La representación algebraica de una función:¿Se puede obtener a partir de su gráfico?

T1.1: Dada **C** = **graf. f** ; hallar ley f con fórmula y = f(x).

CG$_{1.2}$: La representación algebraica de una función; ¿Se puede obtener a partir de su gráfico y "*operaciones gráficas*" realizadas sobre la curva prototipo de la cual proviene?

T1.2: Dada **C*** = **graf g**, a partir de "*operaciones gráficas*" sobre **C (T1.1),** hallar la ley g con fórmula y = g(x) Describir la "operación" y "darle un nombre".

OD-T1.1:

1) Identificadas las variables didáctico-matemáticas relativas a esta tarea, así como el equipamiento praxeológico necesario para abordarla, para diseñar esta actividad elegimos una curva "conocida" por el estudiante: la circunferencia.

2) Si C = **arco de circunferencia**, entonces C es objeto de tres praxeologías diferentes, según el bloque <u>tecnológico/teórico</u> al que remita la tarea propuesta.

- <u>Modelización funcional</u>: C como gráfica de una función.
- <u>Modelización geométrico-analítica</u>: C como lugar geométrico que verifica una ecuación.
- <u>Modelización geométrico-sintética</u>: **C** como conjunto de puntos equidistantes del centro.
- Los tipos de tareas y técnicas que <u>toman sentido</u> en cada praxeología, <u>son diferentes</u>.

Realizar esta tarea requiere el trabajo articulado entre las tres formas de acercarse al objeto.

Las actividades a realizar por el estudiante en esta instancia son: adiestrar la "mirada" al efecto de detectar propiedades de los gráficos "visibles" para el ojo adiestrado; conjeturar, validar o refutar. O sea, un repertorio de "acciones" que la matemática escolar tiende a minimizar y que no resultan fáciles ni triviales para la mayoría de los estudiantes.

En esta actividad el acento está puesto en el "momento exploratorio"; en hacer notar la necesidad de acudir a una "técnica" para concretar exitosamente la acción propuesta. También tiene por objeto que se internalice la idea de que con datos experimentales sólo se pueden formular conjeturas o hipótesis; que, para "afirmar" estas conjeturas hay que proceder a "validarlas" con técnicas más elaboradas; o sea, acudir a la "tecnología".

Las consignas para esta tarea son:

1) Obtener "leyendo" del gráfico las coordenadas de distintos **P**i de **C**;"registrar", con método, los datos obtenidos → tabla de valores ≈ $\mathbf{f_{num}}$ (representación numérica de **f**)

2) Calcular la distancia de **P**i a Q (punto fijo "detectado" al estudiar la curva). Registrar estos datos en la tabla, buscar un "patrón" en el comportamiento de los **P**i respecto a Q, (d(Pi ;Q) = "cte"), formular una conjetura.

En esta instancia detectamos otro fenómeno didáctico: "*los alumnos subestiman la importancia del error su tratamiento, e los cálculos aproximados*"

3) Proponer un método o proceso para "validar" la conjetura hecha. Ejecutarlo y concluir.

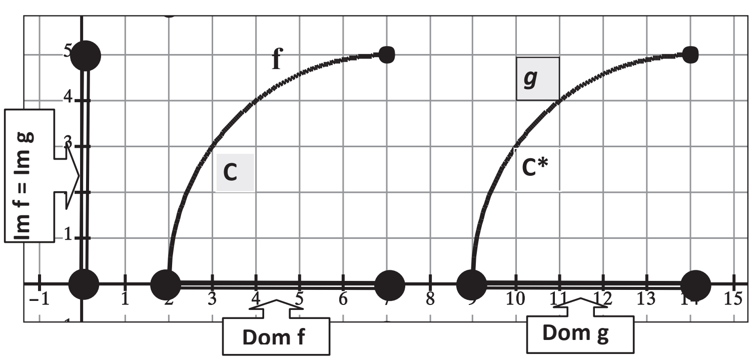
OD-T1.2:

1) T1.2 se divide en cuatro tareas, una por cada "trasformación";

T1.2(1)→traslación; T1.2(2)→reflexión; T1.2(3)→dilatación; T1.2(4)→reflexión;

2) La curva C* = **graf g** a trabajar en cada T1.2(i), es una curva obtenida al aplicar la transformación del caso a la curva C = *graf f* de T1.1. (arco circunferencia).

Ejemplo



g: <u>traslación horizontal</u>

- **g(x) = f(x-7)**

(corrimiento a derecha de **7**u.)

- **f(x) =** $\sqrt{25-(x-7)^2}$

- **g(x) =** $\sqrt{25-(x-14)^2}$

3) Si **T** = **transformación**, entonces **T** es objeto de tres praxeologías diferentes según el bloque <u>tecnológico/teórico</u> al que remita la tarea propuesta.

- <u>Modelización funcional</u>: **T** como gráfica de una función ($\mathbf{T_{graf}}$ **)**
- <u>Modelización geométrico-analítica</u>: **T** como lugar geométrico que verifica una ecuación

- Modelización geométrico-sintética: **T** como lugar geométrico que verifica cierta propiedad con respecto a la curva de la cual es la "transformada".

Realizar esta tarea requiere el trabajo articulado entre las tres formas de acercarse al objeto.

4) Al finalizar esta actividad el estudiante debería haber internalizado la siguiente cuestión: que cuando sobre **f** se aplica una **transformación** se genera una nueva función**, g ,** con la particularidad de que el "nexo" entre la "representación algebraica" de **f** y **g** es fácil de establecer pues **g**(x) **=** A.**f** (*a* x + b) **+** B. La presencia (o no) en la ecuación de uno o más parámetros (***a*, b, A, B**), *depende de la transformación o composición de transformaciones aplicada*. Estos parámetros son entonces el "nexo" entre la función original y su transformada. Por ello, para conocer las característica de **C** que se conservan en la curva transformada; el "efecto" sobre C de cada transformación, basta estudiar el efecto de cada uno de estos parámetros en la ecuación prototipo correspondiente, **y =** A. ***f*** (*a* x+b) **+** B.

5) Cabe aclarar que dado las importantes limitaciones que el contexto institucional nos impone, las actividades propuestas están "fuertemente dirigidas", más de lo que estimamos conveniente. Pero de otra forma no hubiéramos podido llevar a cabo la experiencia.

Las consignas para esta tarea son:

1. explorar C*, recopilar información y usarla para hallar la ***ley g*** con fórmula **y = g(x)**
2. comparar C* con C; concluir que modificación produce el parámetro no nulo en la ***ley g*** sobre la curva original (C); identificar la operación aplicada.

Primera aplicación y evaluaciòn de T1

La tarea identificada como **T1** se trabajó durante el cursado de Matemática I, el 1er cuatrimestre de 2013, con 160 alumnos. Elegimos este tema, "transformaciones", pues la experiencia indica que existen importantes dificultades para la aprehensión significativa del mismo, dificultades que son imposibles de salvar en los tiempos asignados a la materia.

Cabe observar que nuestro objetivo es el diseño de materiales que si bien pueden no resultar "ideales" en cuanto a lo teóricamente pretendido, sean posibles de ser "bajados" al aula; o sea, que no resulten "artificiales" y/o "ajenos" a la realidad institucional en la que nos desempeñamos. En función de ello y al efecto de aplicar y evaluar los materiales didácticos diseñados hemos ideado una forma alternativa a las tradicionales, adaptada al contexto y que nos provea de la información necesaria para continuar nuestra tarea.

En esta instancia la implementación se llevó a cabo según el siguiente esquema:

1. Propuesta a los alumnos del **T1** como Trabajo Práctico (optativo), a resolver fuera de las horas de clase y ser entregado, por escrito, en el término de 10 días.
2. Corrección, detección y clasificación de errores más frecuentes e importantes.

   Evaluación de la incidencia sobre dichos errores de fallas en el diseño de la actividad.
3. Una actividad presencial (optativa y por grupos) al efecto de realizar la devolución del trabajo, la corrección en pizarra de los errores, escuchar a los alumnos.
4. Horas de consulta especiales para aquellos a los que la actividad presencial no alcance.
5. Evaluación de este tema en el 1er Parcial.

Conclusiones

Si bien no hemos finalizado el procesamiento de toda la información recopilada, entre la que está el parcial, estamos en condiciones de hacer algunas apreciaciones iniciales.

Corroboramos que los alumnos "prefieren" el registro algebraico (aunque cometan graves errores en la manipulación algebraica) y consideran que la verificación por puntos es suficiente para resolver un problema. Que al registro algebraico le atribuyen una "utilidad" que no admiten para el gráfico; que tienden a privilegiar una única técnica que consideran "la manera evidente e incuestionable de resolver tareas de determinado tipo". O sea, que dan preponderancia a la función justificativa (que asegura que cada técnica sirve para lo que ha de servir y da el resultado que debe dar) por encima de la función explicativa (que debería aclarar *por qué* la técnica es correcta, *pertinente* y eficaz).

Los resultados del parcial (ya corregido pero no procesada la información) nos alientan a creer que la OD que guió la construcción de la OM fue acertada. Un indicador importante al respecto es que la mejoría producida en el tema que nos ocupa es tan importante que se detecta a primera vista. Claramente se observa que el ejercicio del tema del Trabajo Práctico (transformación) es el que más y mejor resolvieron los alumnos; que reconocen las distintas formas de representar funciones, que las dificultades para pasar de un registro a otro son menores, al igual que las relativas al trabajo algebraico con raíces y potencias.

En menor medida se observa una mejora en cuanto al reconocimiento de las diferentes técnicas existentes para abordar una tarea, a discernir criterios para elegir la más apropiada. Finalmente, estimamos importante remarcar que el desarrollo habitual del curso transcurre dentro del paradigma monumentalista o de visitar saberes, claramente opuesto a la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo que propone la TAD y a la cual adherimos, lo que no facilita nuestra tarea; que, no obstante ello, insistimos en buscar formas o modos de trabajar acorde con la meta propuesta: *conseguir que los conocimientos matemáticos que enseñamos en los cursos universitarios no se reduzcan a un conjunto desarticulado de conceptos y técnicas carentes de sentido.*

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1* (1), 41–56.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Los Recorridos de Estudio e Investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las Ciencias Experimentales. *Enseñanza de las ciencias*, 29 (3), 339-352.

Bosch, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. En L. Contreras [et al.] (Eds.). *Cuarto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática* (pp. 15-28). Huelva, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudios. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 23 (1), 79-135.

Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., y Larguier, M. (2011). *Un panorama de la TAD*. Barcelona: Centre de Recerca Matemática

Fonseca, C., Casas, J.M., Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII.* Santander: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Pereira, A. y Casas, J.(2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación. *Educación Matemática*, *23*(1), 97-121.

Llanos, V. C. y Otero, M. R. (2011). Evolución de una AEI como producto de investigación al cabo de seis implementaciones consecutivas. A. R. Corica [et al.] (Eds.). *I Congreso Internacional de*

Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática. Tandil: Universidad Nacional del Centro de Bs. As.

Otero, M. R. y Bilbao, M. P. (2011). Funciones Polinómicas en la Secundaria: primeros resultados de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI). *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *6* (1), 102-112.

Serrano, L., Bosch, M. y Gascón, J. (2007). Cómo hacer una previsión de ventas: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. *II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico* [en línea] Disponible en

http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/listado_comunicaciones.htm

Zuñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa ,10* (1) ,145–175.