

REDISEÑO Y APLICACIÓN DE DE UNA SECUENCIA DE ACTIVIDADES PARA EVITAR QUE ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR MIREN A LAS OPERACIONES DE POTENCIACION Y RADICACION COMO INVERSAS

María Patricia Colín Uribe, Celia Araceli Islas Salomón y Fernando Morales Téllez

Instituto Politécnico Nacional, CECyT NB

México

patricia_c_u@hotmail.com, pcolin@ipn.mx

Resumen. Este trabajo complementa otras investigaciones que evidencian las “*disfunciones escolares*” que el operador raíz cuadrada presenta en el tránsito del contexto aritmético al algebraico y del algebraico al funcional. Juárez (2007) muestra cómo estudiantes de bachillerato en el estado de Guerrero, México, no logran detectar la problemática que se genera al considerar a las operaciones de potenciación y radicación como inversas sin considerar ninguna restricción. En este trabajo mostramos el rediseño de la secuencia de actividades de Juárez y los resultados de su aplicación a estudiantes de bachillerato en un Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyT) del Instituto Politécnico Nacional (IPN) en el Distrito Federal, México. Mostraremos la nueva secuencia y las consideraciones que hicimos para modificarla, así como las respuestas de algunos estudiantes. Mostraremos que el considerar a las operaciones de potenciación y radicación como inversas permea en el conocimiento de los estudiantes.

Palabras clave: raíz cuadrada, potenciación, radicación, disfunción

Abstract. This work complements other research showing "school dysfunctions" presents the square root operator in the transit of the arithmetic to the algebraic context and the algebraically to the functional. Juárez (2007) shows how high school students fail to detect the problems that exist when considering empowerment and establishment operations such as reverse without restriction. In this work we redesigned the sequence of activities from Juárez to be applied to students of high school of the Instituto Politécnico Nacional. We will show the new sequence and the considerations that we did to modify it

Key words: square root, potentiation, radication, dysfunction

Introducción

La Matemática Educativa es la disciplina que estudia los procesos de transmisión y adquisición del saber matemático en situación escolar; así, describe y explica los fenómenos que se originan entre la enseñanza, el aprendizaje y el saber.

En el discurso matemático escolar, la matemática se presenta seccionada, es decir, se divide en áreas que están lineal y jerárquicamente estructuradas y son trabajadas bajo el supuesto de que las reglas del nivel anterior serán respetadas y utilizadas en el nivel posterior. Para nuestro tema de interés, la raíz cuadrada, esta jerarquización presenta ciertas *disfuncionalidades*, puesto que las reglas de la aritmética aprendidas para obtenerla, ya no son respetadas al movernos en el plano algebraico. Esta disfunción probablemente funciona como un obstáculo para que el estudiante comprenda el significado de este operador en el contexto algebraico (Colín, 2006).

A nuestro trabajo le anteceden tres investigaciones; la primera realizada por Lorenzo (2005) quien se interesó por estudiar las concepciones que tienen los alumnos del Nivel Básico Secundaria sobre el concepto matemático raíz cuadrada. Este trabajo de investigación muestra

cómo los libros de texto de nivel básico secundaria tratan, transmiten y justifican temas relacionados con la *raíz cuadrada*. Además, muestra algunas concepciones de estudiantes de este nivel escolar. Algunas de ellas son

- ❖ La *raíz cuadrada* no es una operación básica.
- ❖ La solución de la ecuación $x^2 - 4 = 0$ es únicamente $x = 2$
- ❖ El algoritmo tradicional (o método de la “casita”) es único método que sirve para calcular raíces cuadradas.
- ❖ La *raíz cuadrada* sólo se aplica para resolver problemas que involucran el cálculo de áreas de terrenos.
- ❖ la *raíz cuadrada* sólo se utiliza en la escuela.
- ❖ La *raíz cuadrada* es la operación inversa de elevar al cuadrado.

El segundo trabajo de investigación realizado por Colín (2006), quien, a través de un detallado análisis epistemológico, muestra la naturaleza y significados de la *raíz cuadrada* en diferentes contextos; mediante un análisis didáctico muestra las costumbres escolares que los libros de texto presentan al momento de tratar la *raíz cuadrada*; por último, en un análisis cognitivo, presenta las concepciones que poseen los estudiantes respecto a expresiones que involucran a la *raíz cuadrada*. Finalmente, esta investigación muestra los fenómenos didácticos ligados a las concepciones que los estudiantes tienen respecto a la *raíz cuadrada*, entre los cuales se encuentran los siguientes:

- ❖ Los estudiantes, en su mayoría, consideran solamente a la raíz principal como la *raíz cuadrada* de un número. Esto es, el significado que le dan al operador *raíz cuadrada* es el que tiene en el contexto aritmético
- ❖ Para los estudiantes de secundaria, el concepto raíz cuadrada es entendido como un operador aritmético, no algebraico. La extracción de raíces cuadradas solamente da números positivos como resultado.
- ❖ Los estudiantes de Nivel Superior establecen la diferencia entre que la solución de una ecuación cuadrática (contexto algebraico) y la raíz cuadrada de un número (contexto aritmético).
- ❖ La costumbre escolar “*la radicación es la inversa de la potenciación*” es utilizada sin restricción.

- ❖ La raíz cuadrada que se considera para la solución de ecuaciones del tipo $x^2 - 4 = 0$ es la principal (positiva).
- ❖ La raíz cuadrada (en el contexto aritmético) tiene dos signos.
- ❖ Los libros de texto nos muestran que al calcular raíces cuadradas de números concretos, sólo se tomará la positiva (a la que llaman raíz principal).
- ❖ La gráfica de la expresión $y^2 = x$ es la misma que la de la expresión $y = \sqrt{x}$, puesto que ambas expresiones son iguales.

El tercer trabajo de investigación es el de Juárez (2007) el cual, al aplicar una secuencia de actividades a un grupo de estudiantes de una escuela de Nivel Medio superior en el estado de Guerrero, México, muestra cómo los estudiantes no identifican las restricciones que deben considerar cuando se trabaja con el operadores que involucran la raíz cuadrada.

Nuestro trabajo de investigación se origina tomando en cuenta las respuestas de los estudiantes con los que trabajó Juárez (2007). Nuestro objetivo es el de modificar la secuencia de actividades diseñada por el y aplicarla ahora en un contexto diferente: un CECyT del IPN localizado en la Ciudad de México. Lo que deseamos es que, con estos cambios, estos nuevos estudiantes entren en conflicto al enfrentarse a una situación en donde, al considerar (sin restricción) a las operaciones de potenciación y radicación como inversas, y reconsideren que estas operaciones sólo son inversas bajo ciertas condiciones.

Marco Teórico

Nuestro marco teórico es la Teoría de Situaciones Didácticas, pues ésta propone el estudio, control y determinación de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos matemáticos e implica que el investigador debe participar en la producción (o diseño) de las situaciones didácticas que analiza. (Cantoral y Farfán, 2000)

Metodología

Para nuestro trabajo de investigación, utilizaremos a la Ingeniería Didáctica como metodología. En Lezama (2001) se presenta en forma sintetizada a la Ingeniería Didáctica, la cual se muestra en la figura 1.

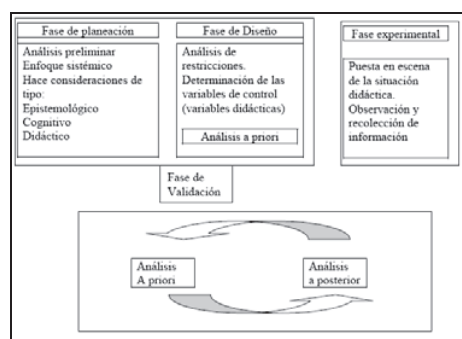


Figura 1

Fase de planeación: *Análisis preliminar.* Consta de un análisis didáctico para el cual, revisaremos los programas de estudio de nivel medio superior del IPN, así como, los objetivos que persiguen. También realizaremos un análisis de los libros de texto utilizados en este nivel y en esta casa de estudios para el tratamiento de conceptos que involucran a la *raíz cuadrada*.

Fase de diseño: *Rediseño de la secuencia de actividades.* (Fase predictiva y prescriptiva).

Esta fase se refiere al control de las relaciones que existen entre el significado y las actividades. Es aquí donde se hacen las restricciones y se determinan las variables de control. Dichas variables son las siguientes:

- ❖ Que los alumnos hubieran trabajado con el tema raíz cuadrada
- ❖ Que los alumnos interpreten correctamente las instrucciones que se presentarán y encuentren las respuestas correctas.

Fase experimental. Se aplicará la secuencia de actividades a 15 estudiantes de cuarto semestre del Nivel Medio Superior del CECyT Narciso Bassols del IPN. El tiempo programado para la realización de la secuencia es de dos sesiones de hora y media cada una, para hacer un total de 3 horas.

Fase de validación. Nuestra secuencia consta de cuatro actividades con cuatro incisos cada una, en las cuales además de solicitarles la resolución de los ejercicios, se les recomienda justifiquen su respuesta, con el propósito de que, al reflexionarlas, se percaten de que las operaciones de potenciación y radicación sólo resultan inversas bajo ciertas restricciones.

Análisis Didáctico

Este análisis didáctico complementará los resultados obtenidos por Lorenzo (2005), Colín (2006) y Juárez (2007).

Para hacer patente la presencia de la raíz cuadrada, en el currículo de matemáticas, analizaremos los programas de estudio de la Unidad de Aprendizaje de Álgebra que se imparte en los CECyTs del IPN, pues es aquí donde se trabajan conceptos relacionados con las propiedades de los radicales. En cuanto a los libros de texto, se revisaron 7 textos sugeridos en el plan de estudios de esta Unidad de Aprendizaje. La información que obtuvimos fue la siguiente

- ❖ Los programas de estudio tratan a la raíz cuadrada en el área de Aritmética. En los cursos subsecuentes se utiliza sólo como herramienta, por ejemplo, en la solución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, la elaboración de la gráfica de la función raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$ o en el trabajo de funciones en Cálculo Diferencial e Integral.
- ❖ Los libros analizados, en términos generales, presentan a la potenciación y radicación como inversas, unos hacen las restricciones correspondientes pero otros las omiten o la hacen al principio del capítulo, de tal manera, que al presentarla en forma de símbolos algebraicos, ya se ha perdido la restricción. A continuación mostramos algunos ejemplos en la figura 2:

TEXTO	DEFINICIÓN	RESTRICCIONES
Phillips, E.(2005)	$\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$	No se observan
Gustavson, (2005) D.	Si a y b son números positivos, $\sqrt{b} = a$, siempre y cuando $a^2 = b$	Se hace énfasis en los valores de a y b sólo pueden ser positivos.
Swokowsky. E.W. y Cole, J.A. (2006)	La principal raíz enésima del número real a, siendo n un número entero positivo. a) Si $a = 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 0$ b) Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real positivo b tal que $b^n = a$ c) Si $a < 0$ y n es non, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real negativo b tal que $b^n = a$ d) Si $a < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.	Tiene todas las restricciones que se muestran

Figura 2

- ❖ Hay autores que hacen énfasis en la pertinencia de las restricciones respectivas, incluso, presentan algunos ejemplos en los cuales manifiestan la o las contradicciones que pudieran presentarse si no se hacen dichas restricciones.

Análisis cognitivo

Para nuestro análisis cognitivo, describiremos el objetivo de nuestra secuencia de actividades y las respuestas que proporcionaron los estudiantes.

Objetivo: La secuencia esta diseñada con el objetivo de que, a través de las actividades, los estudiantes se percaten que las operaciones de potenciación y radicación (en particular, las operaciones de extraer raíz cuadrada y elevar al cuadrado). La secuencia consta de 4 actividades. A continuación mostraremos cada una de las respuestas que dieron los estudiantes. Cabe señalar que trabajaron 15 alumnos divididos en grupos de 3 personas.

Actividad 1. En esta actividad se pretende que el estudiante aplique sus conocimientos previos, manifestando que las operaciones de radicación y potenciación son inversas. La respuesta que esperamos es que los alumnos eliminen tanto exponente como radical, pues consideraran que las operación e son “inversas”. Esto se muestra en la figura 3.

Actividad 1		
Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, realizando las operaciones indicadas y justifica tus respuestas, para llenar la siguiente tabla.		
Expresión	Expresión simplificada	Justificación
$y = \sqrt{x^2}$	$y =$	
$y = \sqrt{(-x)^2}$	$y =$	
$y = (\sqrt{x})^2$	$y =$	
$y = (\sqrt{-x})^2$	$y =$	

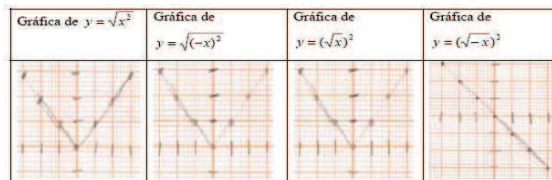
$y = (\sqrt{-x})^2$	$y = -x$	La raíz se elimina con el cuadrado.
$y = (\sqrt{-x})^2 = -x$		

Respuesta del equipo 1

Figura 3

Actividad 2: Se les pidió llenar una tabla de datos y posteriormente trazar las graficas de los puntos obtenidos en papel milimétrico. El objetivo de esta actividad es que, dando valores a la incógnita, los estudiantes observen la diferencia entre los resultados obtenidos en la actividad 1. (figura 4).

Actividad 2						
Tabula y grafica las expresiones anteriores en las hojas milimétricas anexas. Recuerda escribir a qué expresión se refiere la gráfica.						
Valores de x	$y = \sqrt{x^2}$	$y = \sqrt{(-x)^2}$	$y = (\sqrt{x})^2$	$y = (\sqrt{-x})^2$		
-3						
-2						
-1						
0						
1						
2						
3						



Respuesta del equipo 1

Figura 4

Actividad 3: Se les pide ahora llenar una tabla, pero simplificando las expresiones. Esperamos que al simplificar apliquen su conocimiento de que las operaciones son inversas. Además, se les pide comparar las graficas obtenidas con las de la actividad anterior. Los resultado de un equipo se muestran en la figura 5

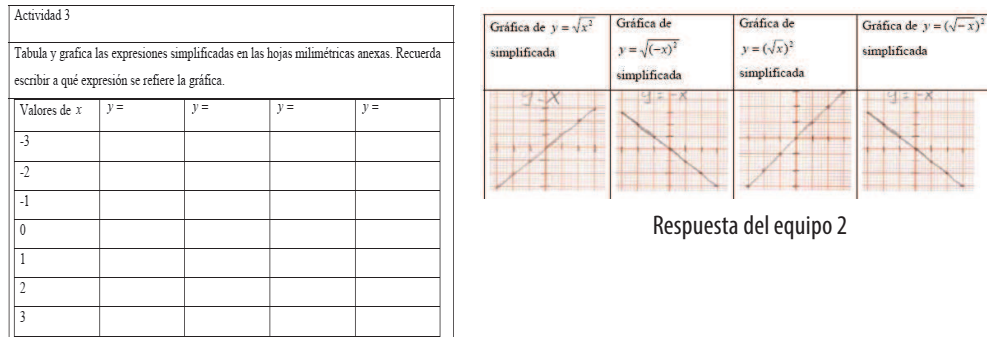


Figura 5

Actividad 4: Se pide a los estudiantes comparar las graficas de las actividades 2 y 3 y anotar sus conclusiones. El objetivo es que los estudiantes se percaten que las operaciones que realizaron de “simplificación” no son correctas, pues obedecen a ciertas restricciones. Los resultados de un equipo se muestran en la figura 6 .

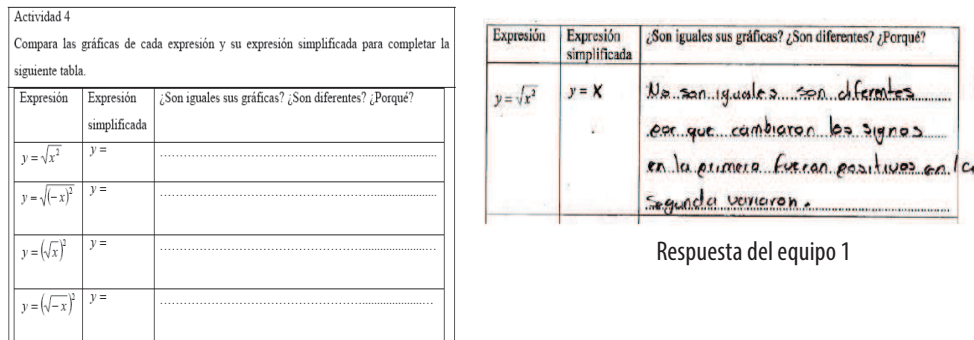


Figura 6

Conclusiones

En el plan y programa de estudio del nivel medio superior de la Unidad de Aprendizaje ALGEBRA del IPN se sugiere el uso de la raíz cuadrada sólo como herramienta para la resolución de problemas matemáticos, los cuales se trabajaran en unidades de aprendizaje posteriores. Esto muestra que este concepto es trabajado como mera herramienta y, de este modo, las restricciones no son consideradas.

Los libros de texto recomendados por los planes de estudio de la UA Algebra del IPN consideran que estas operaciones sólo son inversas bajo ciertas condiciones.

A pesar de ello, el manejo (de estudiantes y profesores) de las propiedades de los exponentes sin considerar la restricción de que $a > 0$, genera los siguientes resultados

$$a) (a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$$

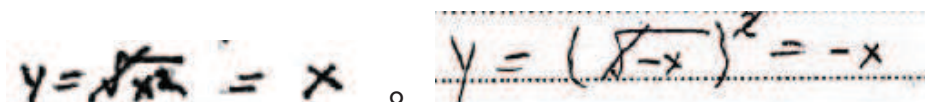
$$b) ((-a)^2)^{\frac{1}{2}} = (-a)^{\frac{2}{2}} = (-a)^1 = -a;$$

$$c) \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a;$$

$$d) \left((-a)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (-a)^{\frac{2}{2}} = (-a)^1 = -a$$

Los estudiantes de nivel medio superior del IPN consideran a las operaciones de potenciación y radicación como inversas (en particular, la de potencia dos y raíz cuadrada). Esta concepción esta tan arraigada en los estudiantes que, al realizar la actividad 4 de comparación de gráficas, no pudieron establecer que las “cancelaciones” que habían hecho en las actividades anteriores sólo podían realizarse para ciertos valores de la variable x

La “costumbre escolar” de tratar a las operaciones de potenciación y radicación como inversas genera que el estudiante de resultados como



$$y = \sqrt{x^2} = x \quad \circ \quad y = (\sqrt{-x})^2 = -x$$

Los estudiantes de nivel medio superior no identificaron a las operaciones de potenciación y radicación como “inversas bajo ciertas condiciones”.

Se propone trabajar con estudiantes de nivel Superior para mostrar si, a este nivel, los estudiantes ya no manejan a la potenciación y radicación como inversas y así concluir que la raíz cuadrada, sus propiedades y restricciones son establecidas conforme el estudiante avanza en su formación escolar.

Referencias Bibliográficas

- Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2000). Teoría de Situaciones Didácticas. En R. Cantoral, R. M. Farfan, F. Cordero, J.A. Alanis, R.A. Rodríguez y A. Garza, *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (p.p. 41-44), México: Trillas.
- Colín, M. (2006). *De la aritmética al cálculo. Un estudio transversal de la raíz cuadrada*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. Ciudad de México, México.
- Juárez, S. (2007). *Sobre la costumbre escolar de la raíz cuadrada como operación inversa de elevar al cuadrado: Un análisis didáctico y cognitivo en el Nivel Medio Superior*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, México.
- Lezama, J. y Farfán, R. M. (2001). Introducción al estudio de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 161-194.
- Lorenzo, D. (2005). *Sobre la vida escolar de la raíz cuadrada en el nivel básico*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, México.
- Phillips, E. (2005). *Álgebra con Aplicaciones*. México: Oxford.
- Gustavson, D. (2005). *Algebra Intermedia*. México: Thomson.
- Swokowsky, E.W. y Cole, J.A. (2006). *Algebra y trigonometría intermedia*. México: Thomson.