LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS EN LOS INICIOS DEL NIVEL SUPERIOR

María Carmen Quercia, Adriana Laura Pirro y Lucrecia Ethel Moro
Universidad Nacional de Mar del Plata Argentina
mariacarmenq@yahoo.com.ar, adriana.pirro@gmail.com, lemoro@mdp.edu.ar

Resumen. Muchas de las dificultades que aparecen en el tránsito de los estudiantes del nivel secundario al nivel superior, pueden ser explicadas en términos de los cambios que se producen en el tipo de actividad matemática que se desarrolla en cada uno de estos niveles.
Para contribuir a superar una de estas dificultades: el paso de una matemática "mostrativa" en secundaria a una "demostrativa" en la universidad, se ha diseñado un Taller de Prácticas Matemáticas a ser implementado con alumnos ingresantes en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Se presentan en este trabajo los fundamentos teóricos de su diseño e implementación a partir del diagnóstico realizado
Palabras clave: taller de prácticas matemáticas, demostración
Abstract. Many of the difficulties encountered students' transition from high school to college can be explained in terms of the changes that occur in the mathematical tasks developed in each of these levels.
To help overcome one of these problems—the change from 'explanatory' mathematics at high school to 'demonstrative' mathematics at college, a Workshop on Mathematical Practice has been designed to be implemented with incoming students in the School of Engineering at the National University of Mar del Plata (Universidad Nacional de Mar del Plata, UNMdP). In this paper we present the theoretical basis for its design and implementation from the diagnosis made.
Key words: workshop on mathematical practice, demonstration

Introducción

Entre las dificultades relativas al aprendizaje y al estudio de la Matemática que aparecen en el tránsito del Nivel Secundario al Nivel Superior, algunas son más "visibles", como el bajo rendimiento de los estudiantes en el curso de nivelación que cada año se desarrolla en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Otras, como los índices de lentificación y/o de deserción en los primeros años de las carreras de Ingeniería se producen "disimuladamente" durante el cursado de las materias correspondientes al primer cuatrimestre del primer año de estudios.

En ambos casos, se han detectado dos aspectos.

Por un lado, y a partir del análisis realizado de los exámenes de ingreso y de los exámenes parciales de las asignaturas Algebra A y Análisis Matemático A, se observa, entre otras cuestiones, que los estudiantes resuelven satisfactoriamente los llamados "ejercicios tipo", pero si, por ejemplo, la consigna no responde a esta estructura, la validación de resultados queda limitada al plano de las conjeturas o directamente no aparece.

Por otro lado, durante las clases prácticas, los alumnos muestran en sus consultas falta de confianza en sus propias posibilidades cuando la situación propuesta para resolver no se centra en lo algorítmico. Reclaman en este caso, una "fórmula" o un "método" para la resolución y tienden a desestimar la orientación del docente que los invita a explorar, representar y conjeturar para luego poder arribar a una validación de los resultados.

En este último sentido, queda manifiesta una diferencia muy general y característica entre las organizaciones matemáticas de la escuela secundaria y de la universidad, que es el paso de una matemática "mostrativa" a una matemática "demostrativa" (Gascón, 1997).

A partir de estos análisis preliminares, y para contribuir a facilitar este cambio en los inicios del nivel superior, se ha concebido, como una posibilidad, el Taller de Prácticas Matemáticas, que tiene como destinatarios a los alumnos que comienzan su primer año de estudios en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata y que se desarrolla en la semana previa al inicio del ciclo lectivo.

Fundamentos teóricos del diseño e implementación del Taller de Prácticas Matemáticas

Para el encuadre de este Taller se consideran los lineamientos que en sus trabajos de investigación didáctica han establecido Chevallard, Bosch y Gascón (1997) quienes, para la enseñanza universitaria, muestran la necesidad y la pertinencia de enriquecer los dispositivos didácticos tradicionales (clases de teoría y de práctica) con los del tipo que aquí se propone para incidir en la estructuración y en el desarrollo del proceso de estudio de las matemáticas en este contexto.

A continuación se presentan los aspectos tenidos en cuenta en el diseño e implementación del Taller de Prácticas Matemáticas: la selección de contenidos, los objetivos de aprendizaje, las nociones previas que deben tener los alumnos y la estructura y análisis a priori de las situaciones de enseñanza que se proponen.

Selección de contenidos

El proceso de producción de conocimientos matemáticos implica el uso de diferentes formas de razonar. Sin embargo, en el momento de dar cuenta de los conocimientos producidos, la racionalidad matemática exige dejar de lado en las explicaciones las formas no deductivas para arribar a resultados legitimados en la comunidad científica.

En este sentido, y para favorecer así a los estudiantes en el paso de una matemática "mostrativa" a una matemática "demostrativa", se tiene como propósito en este Taller enseñar las formas de validar en matemática. Para ello, se considera pertinente el tratamiento de las reglas que Arsac (1992) denomina "reglas del debate" y que se refieren a enunciados cuyo dominio de validez es infinito. En este espacio se profundiza en tres de ellas:

- Un enunciado matemático puede ser verdadero o es falso.

- Un contraejemplo es suficiente para validar la falsedad de un enunciado.
- En matemática, no son suficientes algunos ejemplos que verifican un enunciado para probar que es verdadero.

En relación a esta última regla, en el Taller de Prácticas Matemáticas se busca que los alumnos la amplíen apropiándose de la forma de validación propia de la comunidad de matemáticos. En términos de Balacheff (1987) -quien distingue entre explicación, prueba y demostración- en el seno de la comunidad matemática, se aceptan pruebas que adoptan una forma particular, y que son las demostraciones:

a partir de una serie de enunciados según reglas determinadas, un enunciado es aceptado como verdadero, o bien es deducido de aquellos que le preceden con la ayuda de las reglas de la deducción tomadas de un conjunto de reglas bien definidas (Panizza, 2005, p.15).

En este sentido, se asume que un razonamiento es válido si a partir de ciertos enunciados (las premisas) se deriva otro (la conclusión) de manera tal que siempre que las premisas son verdaderas, la conclusión también es verdadera.

Se tienen en cuenta entonces en este Taller los problemas ligados a la validez lógica y la verdad pues, según la manera en que los estudiantes regulen los procesos que afectan a la validez y a la verdad, resultarán los objetos, propiedades y significados que formen parte de sus conocimientos. Su comprensión del funcionamiento de los distintos modos de razonamiento, sus nociones de verdad, el grado de credibilidad que otorgan a los enunciados, los contextos en los cuales realizan los razonamientos, son algunos de los elementos que intervienen en sus procesos de validación y control.

Estos análisis ponen en evidencia la complejidad del proceso de razonamiento de un estudiante, destacando el papel que juegan sus conocimientos cuando realiza una deducción. En este sentido se señala aquí que una de las relaciones entre conocimientos y capacidad de razonar es

que la capacidad de razonar no es independiente de los contenidos matemáticos en juego. Desde el punto de vista de la enseñanza, esto nos conducirá a discutir nuestra posición: no es conveniente pensar en el razonamiento matemático como un objeto (de enseñanza) en sí mismo, sino en estrecha conexión con los contenidos. (Panizza, 2005, p.20).

Se asume entonces que las diferentes áreas de la matemática (aritmética, geometría, álgebra, estadística, etc.) plantean problemas específicos respecto del razonamiento y tanto los problemas generales como los específicos deberían ser abordados desde la enseñanza a fin de orientar a los estudiantes en el desarrollo de la *racionalidad matemática* y el aprendizaje de los diferentes saberes de este dominio.

Acorde a esta última cuestión, en este Taller se enseñan las reglas del debate matemático y las técnicas de demostración a propósito de problemas para cuya resolución se ponen en juego nociones ligadas a la divisibilidad en el conjunto de los números naturales.

Objetivos de aprendizaje

- ❖ Aprender a razonar según las reglas legítimas del pensamiento matemático en interacción con sus pares.
- ❖ Estudiar de manera autónoma.
- ❖ Resignificar la propia actividad matemática a la luz de los objetivos anteriormente planteados.

Conocimientos previos necesarios de los alumnos

- ❖ Divisibilidad en el conjunto de los números naturales: múltiplos y divisores, números primos y números compuestos.
- ❖ Cuestiones elementales ligadas al proceso de generalización.

Concepción y análisis a priori de las situaciones

Para el diseño y el análisis a priori de las situaciones que se proponen para este Taller se identifican y describen las variables globales que intervienen en la configuración de la dinámica de las mismas:

Metodología de trabajo en el aula

Los doscientos alumnos ingresantes se distribuyen en tres grupos de similar cantidad de asistentes y para cada grupo se implementa un Taller de Prácticas Matemáticas.

En este Taller se proponen situaciones ligadas a la resolución de problemas y a la reflexión en torno a los procedimientos que se realizan para resolverlo y los resultados que se obtienen.

Cuando se menciona la palabra *problema* no se hace referencia a la ejercitación que afianza aprendizajes logrados, sino a una situación en la que el alumno, al poner en juego los conocimientos que ya posee, los cuestiona y los modifica generando nuevos conocimientos. La resolución de un problema matemático requiere que el alumno pruebe, se equivoque, recomience a partir del error, proponga soluciones, las defienda, las discuta, comunique procedimientos y conclusiones, construya conceptos.

Una situación se transforma en problema cuando el alumno lo reconoce como tal y decide hacerse cargo de él, y para lograrlo, se propone intercalar momentos de trabajo en forma individual con instancias en pequeños grupos, y también la participación en debates colectivos, reconociendo que las discusiones entre pares constituyen una etapa de la comprensión matemática y un punto de partida para la formalización de los conceptos. Además, promueven en el alumno la necesidad de buscar argumentos sólidos para sostener sus hipótesis en el intercambio entre pares.

Desde esta perspectiva se promueve tanto el aprendizaje de los contenidos seleccionados, como su estudio pues, si bien en este trabajo se sostiene que no hay aprendizaje sin un trabajo personal del alumno, es decir, sin estudio, también se asume que contribuir a la organización del estudio del alumno debe ser parte del proyecto del profesor.

Para el desarrollo del Taller de Prácticas Matemáticas se tienen previstos dos encuentros de dos horas de duración cada uno en la semana previa al inicio del ciclo lectivo.

Rol del docente

Las intervenciones docentes resultan esenciales en el proceso que se pretende desarrollar en este Taller, pues es su responsabilidad favorecer la creación de un ambiente en el que los alumnos encuentren las condiciones adecuadas para el quehacer matemático: explorar, conjeturar, volver con una mirada crítica sobre las actividades que se van desarrollando, diseñar técnicas y estrategias para obtener soluciones, detectar errores y discutir sus producciones con sus compañeros.

Para lograrlo, es el docente quien define cuándo la actividad se efectúa en forma individual o grupal, si habrá puesta en común o cierre y en qué momento de la clase se realiza cada tarea. El profesor actúa entonces como coordinador, acompañando a los estudiantes durante su tarea, pero sin interferir con el trabajo autónomo que deben desarrollar para resolver las situaciones propuestas. Es decir, en algunos casos, las intervenciones del docente tienden a reorientarlos, cuando es necesario, hacia los objetivos que se hayan planteado. En otros casos, ayuda a los estudiantes a descartar aquellos planteos que no se relacionen con la propuesta, lo que no significa que él también los descarte, ya que podrá retomarlos posteriormente. En cualquiera de estas dos situaciones debe retomar el tema principal para que los alumnos continúen trabajando.

Si el docente observa que la tarea de algún alumno o grupo no avanza en algún sentido, resulta necesario que entable un diálogo que le permita descubrir las razones de ello y brinde cierta información para que la tarea se restablezca, recurriendo, por ejemplo, a preguntas orientadoras, a una nueva lectura de la situación, a la evocación de situaciones anteriores que tengan relación con la actividad que se está desarrollando.

El docente, en el momento que considera apropiado, organiza una puesta en común de las conclusiones obtenidas por los estudiantes. De esta puesta en común, en la que se confrontan distintas soluciones, extrae aquello que las relaciona y establece el estatus matemático de las construcciones de los alumnos.

Estructura y análisis a priori de la secuencia de enseñanza:

Primer encuentro:

A fin de indagar los saberes previos de los alumnos, en relación al contenido que se quiere enseñar, se propone a los estudiantes una primera situación. Se trata de un problema para que determinen la verdad o falsedad de seis enunciados matemáticos referidos a la divisibilidad en el conjunto de los números naturales:

Decidan si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos y expliquen en todos los casos por qué.

a) *Todo múltiplo de 4 es múltiplo de 8.*
b) *Si se suman tres números naturales consecutivos, el resultado es siempre múltiplo de 3.*
c) *Si se suman dos divisores de 36, el resultado es divisor de 36.*
d) *Si se multiplican dos números primos, se obtiene un número primo.*
e) *Si el cuadrado de un número natural es un número impar, entonces éste es un número natural impar.*
f) *Si a un múltiplo de 6 se le suma un múltiplo de 3, el resultado es un múltiplo de 3.*

Los estudiantes trabajan primero individualmente y luego en pequeños grupos. Ante sus consultas, el docente sostiene cierta incertidumbre momentánea promoviendo el análisis de aspectos que aquellos aún no hayan advertido, con el propósito de que la construcción de conocimiento de los alumnos se fortalezca analizando los puntos cuestionables de la misma.

En el momento de la clase previsto para la puesta en común de las producciones de cada uno de los grupos, propone a la clase completa la discusión sobre el valor de verdad de las cuestiones planteadas en el trabajo previo. Procura que los estudiantes muestren a sus compañeros la validez de sus desarrollos con argumentos sólidos. Para ello es preciso que sus intervenciones habiliten la palabra de un integrante de cada grupo, de manera que no se aprecien sólo algunas de las propuestas.

La puesta en común posibilita la identificación de los conocimientos disponibles en los alumnos en relación a las reglas del debate matemático, tratando de comprender qué es lo que hay detrás del discurso de los alumnos cuando analizan el valor de verdad de los enunciados matemáticos. Es posible que aparezcan respuestas que intenten explicar que, si con un contraejemplo puede argumentarse que un enunciado matemático es falso, entonces con "muchos" ejemplos puede sostenerse que un enunciado es verdadero. Pueden aparecer también dificultades de los alumnos en relación a vincular indebidamente la validez con la verdad, pudiendo ser las razones de ello de naturaleza diversa: la fuerza del contenido sobre la forma en el análisis de la verdad y de la validez, la noción de verdad que manejan los alumnos, la influencia del razonamiento y del lenguaje natural, etc. (Panizza, 2005).

Respuestas y dificultades como las recientemente enunciadas, entre otras, se constituyen entonces en un punto de apoyo para enseñar las técnicas de demostración (forma directa, forma indirecta y método del absurdo). A partir de las producciones de los alumnos se destaca también la conveniencia de utilizar una u otra técnica en función del enunciado matemático verdadero propuesto.

Luego de orientar a los estudiantes respecto de qué registrar en las carpetas en referencia a lo recientemente acordado para que lo tengan disponible para estudiar, se les propone como estrategia de aprendizaje individual la "explicación a un amigo" (Napp, Novembre, Sadovsky, Sessa, 2005):

Imagínense que un amigo de ustedes no entiende los problemas resueltos en la actividad anterior y les pide ayuda. Pero, debido a incompatibilidades de horarios, no se pueden reunir y ustedes deben explicárselos por escrito.

Por supuesto, el escrito no debe sólo contener la resolución de los ejercicios, sino que tiene que incluir explicaciones, consejos, ayudas, relaciones entre los distintos conceptos que se involucran, etc. Es decir, que todo lo que este amigo necesite para estudiar tiene que estar escrito.

Esta producción debe estar completa para el segundo encuentro.

Segundo encuentro:

Tomando como punto de apoyo la "explicación a un amigo", la hipótesis de trabajo contempla, para el primer momento de la clase, la evocación de lo realizado en la anterior (Napp, Novembre, Sadovsky, Sessa, 2005). Evocar las acciones sin realizarlas, intentando decir colectivamente lo que sucedió, qué problema fue tratado, posibilita que los alumnos sean llevados a revisitar tanto el problema como los procedimientos de resolución utilizados. En este momento, los estudiantes tienen que pensar en el sentido del problema, más que en los detalles de su resolución, siendo ésta una manera de trabajar sobre el olvido, pues el proceso mental que se requiere para hablar de lo que se hizo es mucho más complejo que el que se requiere sólo para "hacer".

Posteriormente, y a partir de la evocación realizada, los estudiantes resolverán en pequeños grupos un problema para reinvertir lo estudiado en el primer encuentro:

Decidan si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos y justifiquen su elección.

a) El resultado de la suma de cuatro números naturales que tienen distinto resto al dividirlos por cuatro, es un múltiplo de cuatro.

b) El resultado de la suma de cinco números naturales que tienen distinto resto al dividirlos por cinco, es un múltiplo de cinco.

c) Si el producto de dos números naturales es un número par, entonces alguno de ellos es un número par.

d) Si el producto de dos números naturales es un número par, entonces ambos números son pares.

e) Si a un múltiplo de 12 se le resta 8, al dividirlo por 12 el resto es 8.

f) Si a un múltiplo de 12 se le suma 10, al dividirlo por 12 el resto es 10.

Para poder brindar la ayuda adecuada, el docente debe escuchar las explicaciones de sus alumnos para averiguar, a través de ellas, el estado de situación en el que se encuentran en relación con la comprensión del problema propuesto. Luego, se hace la puesta en común para analizar los procedimientos realizados y resultados obtenidos por cada uno de los grupos, estableciendo similitudes y diferencias.

Posteriormente, se invita a los estudiantes a reflexionar en torno a lo producido a fin de establecer la conveniencia de un método de demostración u otro en función de las características del enunciado verdadero que se debe demostrar. Para ello se propone la siguiente actividad para resolver en el mismo pequeño grupo que en la actividad anterior:

Expliquen cómo se dieron cuenta cuál método de demostración resultaba conveniente utilizar cuando el enunciado era verdadero.

Se espera que el análisis que se realice en este momento posibilite una nueva revisita a lo estudiado en el primer encuentro y se fortalezcan los acuerdos establecidos a fin de habilitar su utilización para el estudio del Algebra y del Análisis Matemático durante el primer cuatrimestre de todas las carreras de la Facultad de Ingeniería.

Para cerrar el segundo encuentro, se propone a los alumnos una última actividad para realizar en forma individual:

Escribí el enunciado de algún problema o ejercicio que te haya llamado la atención y explicá por qué lo elegiste.

Para los estudiantes que entendieron, esta actividad significa una oportunidad de repasar los conceptos con otra perspectiva, no ya como resolutores sino como personas que reflexionan sobre lo que se está estudiando. Los alumnos que no entendieron aún algunos aspectos encuentran otra oportunidad y una razón para hacerlo, puesto que deberán elegir un problema, ampliar lo realizado oportunamente y, además, explicar el motivo de su elección.

A modo de cierre, siempre abierto

Con la implementación del Taller de Prácticas Matemáticas se pretende contribuir a vencer la brecha que se produce entre los contratos didácticos vigentes en cada uno de los niveles educativos involucrados, cuyas cláusulas rigen en cada momento las obligaciones recíprocas de los alumnos y del profesor (Fonseca Bon, 2004).

Para ello, se considera necesario favorecer la resignificación de la actividad matemática de los estudiantes, a quienes en los inicios del Nivel Superior se les exige abruptamente pasar de ser alumnos con poca autonomía y limitada responsabilidad matemática, a ser estudiantes (co)responsables de su proceso de estudio (Gascón, 1997).

En este contexto, y con las limitaciones que el cronograma impone, se procura colaborar al desarrollo de la racionalidad matemática de los alumnos en los inicios del Nivel Superior, no sólo desde sus aspectos lógicos, sino también desde su dimensión social. La interacción en clase, con intervenciones docentes ajustadas a los razonamientos de los alumnos, posibilita el avance en los procesos que comprometen a los estudiantes en un genuino quehacer matemático, enfrentándolos a una práctica no mecánica y fundamentada.

Conforme a lo expuesto, el análisis a posteriori que se realice luego de la implementación del Taller posibilitará retroalimentar el proceso que aquí se presenta como una hipótesis de trabajo.

Referencias bibliográficas

Arsac, G. (1992). *Initiaton au raisonnement déductif*. Presses Universitaires de Lyon.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.

Chemello, G. y Crippa, A. (2011). Enseñar a demostrar: ¿una tarea posible? En A. Díaz. (coord.) *Enseñar matemáticas en la Escuela Media* (pp. 55-77). Buenos Aires: Editorial Biblos.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE/ Horsori.

Fonseca Bon, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis de Doctor, Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial, Universidad de Vigo, Vigo, España.

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad. *Suma*, 26, 11-21.

Napp, C., Novembre, A., Sadovsky, P. y Sessa, C. (2005). *La Formación de los Alumnos Como Estudiantes. Estudiar Matemática*. Buenos Aires: Dirección General de Planeamiento. Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires. Disponible en: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/media.php#matematica

Panizza, M. (2005). *Razonar y conocer*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.