SISTEMAS GRANDES DE NÚMEROS O SISTEMAS DE NÚMEROS GRANDES

Arnold Oostra
Profesor Universidad del Tolima
Ibagué, Colombia
oostra@telecom.com.co

Resumen

Esta es una reflexión sobre la pregunta: ¿Existen conjuntos de números con cardinalidad mayor que la de los reales?

Los sistemas numéricos más empleados en la matemática se agrupan en tres clases cuando se los observa desde el punto de vista cardinal: los finitos, los que tienen el cardinal de los naturales y los que tienen el de los reales. ¿Existen sistemas numéricos más grandes? Por supuesto, primero debería precisarse qué puede entenderse por "sistema numérico", pero aquí no se ahondará en ese problema. Lo que se propone es la construcción de una estructura cuyo cardinal es mayor que el de los reales y que ciertamente debe reconocerse como un sistema numérico, pues es una generalización de los números reales no-estándar. Por ello se revisará la construcción de estos números, que puede verse como otro eslabón en la cadena de construcciones de los sistemas numéricos usuales a partir de los naturales. Dando aún otro paso atrás, se inicia con un repaso de esta cadena.

1. Revisión de los sistemas numéricos usuales

Los sistemas numéricos usuales incluyen los números naturales $\mathbb{N}$, los enteros $\mathbb{Z}$, los racionales $\mathbb{Q}$, los reales $\mathbb{R}$ y los complejos $\mathbb{C}$, además de algunos de sus cocientes como los $\mathbb{Z}_n$, algunos de sus subconjuntos como los números algebraicos y algunas de sus variantes como los cuaternos de Hamilton. Los primeros cinco sistemas mencionados pueden construirse de manera sucesiva a partir de los números naturales iterando un mismo procedimiento general. Este proceso, aplicado a un sistema numérico cualquiera $\mathbb{S}$, se describe como sigue.

- ✓ Inicialmente se escoge una potencia $\mathbb{S}^I$ del conjunto (*desdoblamiento*)
- ✓ Luego se toma cierto subconjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{S}^I$ (*selección*)
- ✓ A continuación se define una relación de equivalencia $\sim$ en el conjunto $\mathcal{S}$ (*identificación*)
- ✓ En el conjunto cociente $\mathcal{S}/\sim$ se definen las operaciones y (si es posible) el orden
- ✓ Finalmente se observa cómo la estructura nueva extiende la original $\mathbb{S}$

A continuación se indican de manera muy breve las variantes que surgen en cada paso de la construcción sucesiva de estos sistemas numéricos (véase [6]).

(a) De los naturales a los enteros se toma la potencia $\mathbb{N}^2$; el subconjunto $\mathcal{S}$ es todo $\mathbb{N}^2$; la relación de equivalencia es $(a, b) \sim (c, d)$ si $a + d = b + c$. La clase de equivalencia $[a, b]$ representa la solución del problema $a = x + b$, de hecho en los números enteros *existen todos los opuestos aditivos.*

(b) La potencia que se toma para pasar de los enteros a los racionales es $\mathbb{Z}^2$; el subconjunto es $\mathcal{S} = \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$; la relación de equivalencia es $(a, b) \sim (c, d)$ si $ad = bc$. La clase de equivalencia de la pareja (a, b) se denota $\frac{a}{b}$ y representa la solución del problema $a = xb$. En los números racionales *existen todos los opuestos multiplicativos.*

(c) De los racionales a los reales se toma la potencia $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, esto es, el conjunto de las sucesiones de números racionales; el subconjunto $\mathcal{S}$ está integrado por todas las sucesiones de Cauchy[1]; la relación de equivalencia es $(r_n) \sim (s_n)$ si para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|r_n - s_n| < \frac{1}{k}$ para cada entero $n \geq N$. La clase de equivalencia $[r_n]$ representa el límite de la sucesión de Cauchy (r_n), de hecho en los números reales *existen todos los límites de sucesiones de Cauchy.* Esta propiedad junto con la arquimediana[2] —que también es válida en los naturales, enteros y racionales— equivale a que el orden de los números reales es *completo*, esto es, a que todo subconjunto no vacío y acotado de números reales posee mínima cota superior (véase [8]).

(d) De los reales a los complejos se toma la potencia $\mathbb{R}^2$; el subconjunto $\mathcal{S}$ es todo $\mathbb{R}^2$; la relación de equivalencia es la igualdad. Aquí el avance se logra definiendo la multiplicación de manera adecuada, garantizando que en el sistema construido el polinomio $x^2 + 1$ tiene raíces. Aunque este sistema no tiene ningún orden compatible, en los números complejos *existen todas las raíces de todos los polinomios.*

2. ¿Existen sistemas numéricos grandes?

En 1873 Georg Cantor abrió la caja de Pandora de los cardinales transfinitos. Primero probó que los números racionales están en correspondencia biyectiva con los naturales y luego, al final de ese mismo año, demostró que no existe tal correspondencia entre los números naturales y los reales. Esta ruptura abrió la posibilidad de considerar conjuntos infinitos con diversos tamaños, y los primeros ejemplos conocidos fueron los sistemas numéricos usuales.

Con la terminología de hoy, desde el punto de vista cardinal los sistemas numéricos usuales se clasifican en tres niveles. En primer lugar los conjuntos numéricos $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$ y en general $\mathbb{Z}_n$ son todos finitos. En segundo lugar el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ y el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ son todos infinitos enumerables, esto es, son infinitos pero su cardinal es igual al de $\mathbb{N}$. Cantor asimismo demostró que el conjunto de los números algebraicos también es infinito enumerable. En tercer lugar el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y el conjunto de los complejos $\mathbb{C}$ son infinitos no enumerables, sus cardinales son mayores que el de $\mathbb{N}$ pero son iguales entre sí. El conjunto de los cuaternos de Hamilton también comparte este mismo cardinal.

Así pues, en la cadena de los sistemas numéricos infinitos el único salto cardinal se presenta al pasar de los racionales a los reales. Ahora no es difícil aclarar la razón para este salto pues si X es cualquier conjunto infinito entonces X^2 tiene el mismo cardinal que X; y si X es un conjunto

[1] Una sucesión (r_n) de números racionales es *de Cauchy* si para cada entero positivo $k \in \mathbb{Z}^+$ existe algún entero positivo $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|r_n - r_m| < \frac{1}{k}$ para cualquier par de índices m, n con $m, n \geq N$. Nótese cómo se evita el uso de los números reales en esta convención.

[2] La propiedad *arquimediana* consiste en que para cada $\varepsilon > 0$ y cada $x > 0$ existe un entero positivo $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n\varepsilon \geq x$.

enumerable[3] entonces $X^{\mathbb{N}}$ tiene un cardinal estrictamente mayor que X.

En este punto se puede enunciar con toda claridad la pregunta central de este trabajo. *¿Existen sistemas numéricos cuyo cardinal es mayor que el de los números reales?* Una respuesta inmediata es que entre los sistemas usuales no existe ninguno que cumpla esta condición. Pero el mundo matemático es "ancho y ajeno" y en él aún hay mucho por explorar, incluso hay inmensos territorios ya descubiertos pero poco conocidos para la mayoría de los matemáticos.

Otra respuesta inmediata, aunque con un soporte mucho más elaborado, la provee la Teoría de Modelos. Para mirar esta respuesta es preciso indicar antes qué se quiere cobijar bajo la expresión "sistemas numéricos". Por ejemplo, un sistema numérico podría ser un campo ordenado: esta es una estructura cuyos elementos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir y en la que además existe una relación de orden lineal que es compatible con la adición y la multiplicación. Como casos particulares puede pensarse en los números racionales $\mathbb{Q}$, en los números reales $\mathbb{R}$ y en los números algebraicos (reales). Pues bien, la teoría de los campos ordenados es una teoría *de primer orden*, esto es, sus axiomas pueden expresarse mediante fórmulas lógicas del cálculo de predicados cuyos cuantificadores solo afectan los elementos del conjunto subyacente[4]. Ahora el siguiente es un caso particular de los célebres *teoremas de Löwenheim-Skolem-Tarski* (véase [1, 5]), que tanto en una perspectiva histórica como en una visión conceptual son fundamentales en la Teoría de Modelos.

Teorema. *Si una teoría de primer orden tiene algún modelo infinito enumerable, entonces posee algún modelo de cualquier cardinal infinito.*

En particular, para cualquier cardinal infinito existe algún campo ordenado cuyo conjunto subyacente tiene ese cardinal. Obviamente, entonces también existen campos ordenados cuyo cardinal es mayor que el de los reales. Y lo mismo puede decirse, de inmediato, para cualquier teoría que se escoja para indicar "sistema numérico", siempre que sea una teoría de primer orden.

A pesar de lo poderosa y portentosa y prodigiosa y provechosa de la respuesta provista por la Teoría de Modelos, ella también es un poco decepcionante porque no es, en general, constructiva. Es decir, no provee ni siquiera una imagen mental de cómo es el modelo, o en este caso, de cómo es el sistema numérico. La garantía de su existencia no da absolutamente ninguna información adicional sobre características suplementarias que la estructura puede tener. Entonces la pregunta podría reformularse como sigue. *¿Cómo construir algún sistema numérico cuyo cardinal es mayor que el de los números reales*?

Hay al menos una respuesta a esta pregunta en una generalización de los *números reales no-estándar*. Este es un sistema numérico poco conocido[5] al que vale la pena echar una mirada en este punto.

3. Un sistema de números grandes

El sistema de los números reales no-estándar es una extensión del de los reales que se caracteriza por la presencia de números infinitesimales y también infinitos. Puede construirse a partir de los números reales siguiendo el mismo procedimiento general indicado en la sección 1 de esta

[3] En esta nota, *enumerable* significa finito o infinito enumerable, es decir, un conjunto es enumerable si y solo si su cardinal no supera el de los números naturales.

[4] Nótese que, por el contrario, en el axioma de inducción de los números naturales y en la propiedad de completez de los números reales se cuantifica universalmente sobre los *subconjuntos* del conjunto base.

[5] Aunque muy estudiado por algunos matemáticos, véase por ejemplo [4, 7, 9].

nota: se toma la potencia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, esto es, el conjunto de las sucesiones reales; el subconjunto $\mathcal{S}$ es todo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La sutileza de la construcción consiste en escoger de manera adecuada la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathcal{S}$.

3.1. Propuesta tentativa

Inicialmente, en el conjunto $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de las sucesiones reales se toma la relación de equivalencia $\equiv$ definida como sigue.

$$(r_n) \equiv (s_n) \text{ si existe } N \in \mathbb{Z}^+ \text{ con } r_n = s_n \text{ para cada } n \geq N$$

Definiendo las operaciones componente a componente, las clases de equivalencia se pueden sumar, restar y multiplicar. Sin embargo, no toda clase distinta de cero posee inverso multiplicativo. Por otro lado, la relación $\leq$ definida entre clases como $[r_n] \leq [s_n]$ si existe $N \in \mathbb{Z}^+$ con $r_n \leq s_n$ para cada $n \geq N$, es un orden que además es compatible con las operaciones definidas antes. Pero este orden no es lineal (o total).

Quizás un cambio de escritura permite apreciar mejor el "defecto" de la relación $\equiv$ que entraña las barreras indicadas (a saber: no existen todos los inversos multiplicativos; el orden no es lineal). Sea $\mathcal{F}$ la familia de los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que contienen alguna "cola" $[N, +\infty)$, esto es:

$$F \in \mathcal{F} \text{ si y solo si existe } N \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } n \in F \text{ para cada } n \geq N.$$

Se verifica de inmediato que $\mathcal{F}$ es un filtro[6] sobre el conjunto $\mathbb{N}$. En estos términos, $[r_n] = [s_n]$ si y solo si $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n = s_n\} \in \mathcal{F}$ y por otro lado $[r_n] \leq [s_n]$ si y solo si $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n \leq s_n\} \in \mathcal{F}$. Además de lo sugestivo de esta escritura, ella manifiesta que las características de la construcción dependen de las propiedades del filtro $\mathcal{F}$. En particular, los "defectos" observados en la construcción se deben a que hay subconjuntos de $\mathbb{N}$ —como el de los números pares— tales que *ni el subconjunto ni su complemento pertenecen a* $\mathcal{F}$.

Un filtro sobre un conjunto es un *ultrafiltro* si para cada subconjunto se tiene que él o su complemento pertenecen al filtro[7]. Con la ayuda del axioma de elección puede demostrarse que cualquier filtro sobre un conjunto está contenido en algún ultrafiltro sobre el mismo conjunto [2].

3.2. Construcción

La discusión del apartado anterior va encaminada al desarrollo siguiente, que también sigue el mismo esquema de la construcción de los sistemas numéricos en la sección 1. Se toma la potencia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, esto es, el conjunto de las sucesiones de números racionales; el subconjunto $\mathcal{S}$ es todo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; dado un ultrafiltro $\mathcal{C}$ sobre $\mathbb{N}$ que contenga todas las colas $[N, +\infty)$, en $\mathcal{S}$ se define la relación de equivalencia $\sim$ como sigue.

$$(r_n) \sim (s_n) \quad \text{si} \quad \{n \in \mathbb{N} \mid r_n = s_n\} \in \mathcal{C}$$

En el conjunto cociente $\mathbb{R}^* = \mathcal{S}/\sim$ se definen las operaciones de adición y multiplicación componente a componente, estas operaciones están bien definidas y con ellas se puede sumar, restar,

[6]Un *filtro* sobre un conjunto X es una colección no vacía de subconjuntos de X cerrada para intersecciones finitas y para superconjuntos [2].

[7]Un ejemplo inmediato es el ultrafiltro *principal*, constituido por los subconjuntos que contienen cierto elemento fijo.

multiplicar y dividir. También se define la relación $[r_n] \leq [s_n]$ si $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n \leq s_n\} \in \mathcal{C}$, esta relación está bien definida y es un orden lineal compatible con las operaciones. Así pues, este nuevo sistema numérico $\mathbb{R}^*$ es un *campo ordenado*. Sus elementos se denominan *números reales no-estándar*.

Los números reales no-estándar $\mathbb{R}^*$ incluyen los números reales usuales (estándar) si cada real $r \in \mathbb{R}$ se identifica con la clase $[r]$ de la correspondiente sucesión constante. Es claro que esta función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^*$ es inyectiva y que preserva las operaciones y el orden, de suerte que el sistema estándar $\mathbb{R}$ se sumerge en el sistema no estándar $\mathbb{R}^*$.

Todas las sucesiones que no son equivalentes según la relación $\sim$ a alguna constante dan lugar a números reales no-estándar que no son reales. Considérese por ejemplo la sucesión $(\frac{1}{n})$: como $\frac{1}{n} > 0$ para cada n, se tiene $[\frac{1}{n}] > 0$ (desigualdad estricta) y como para cada real $r > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{1}{n} < r$ para todo $n \geq N$, también se tiene $[\frac{1}{n}] < [r]$ (desigualdad estricta). Es decir, $[\frac{1}{n}]$ es un número real no-estándar *positivo y menor que todo real positivo*. Por otro lado, considérese la sucesión (2^n): como para cada real r existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $2^n > r$ para todo $n \geq N$, se tiene $[2^n] > [r]$ (desigualdad estricta). Es decir, $[2^n]$ es un número real no-estándar *mayor que todos los reales*.

3.3. Algunas propiedades

En el sistema $\mathbb{R}^*$ de los números reales no-estándar, se define que un número $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ es *infinitesimal* si $|\varepsilon| < r$ para todo real $r > 0$ y un número $\lambda \in \mathbb{R}^*$ es *infinito* si $|\lambda| > s$ para todo real s.

Así por ejemplo, toda sucesión real de términos positivos convergente a cero representa un infinitesimal y toda sucesión real divergente a infinito representa un infinito. En general, sin embargo, existen más infinitesimales (véase el artículo [3]). También es claro que un número no-estándar $\varepsilon \neq 0$ es infinitesimal si y solo si su opuesto $\frac{1}{\varepsilon}$ es infinito.

Si bien toda sucesión de Cauchy de números reales no estándar converge en $\mathbb{R}^*$ (véase [9]), este sistema numérico *no es completo*. Por ejemplo, no es difícil probar que el conjunto de los números infinitesimales es acotado y que no posee mínima cota superior; o, de manera simétrica, que el conjunto de los infinitos positivos no posee máxima cota inferior. Esto se debe a que en el sistema de los números reales no-estándar no es válida la propiedad arquimediana. En efecto, si $\varepsilon > 0$ es infinitesimal y $x > 0$ es real, entonces para cualquier entero positivo n el producto $n\varepsilon$ también es infinitesimal y en consecuencia siempre $n\varepsilon < x$.

Respecto al tamaño del conjunto de los reales no-estándar, se nota que por ser $\mathbb{R}$ no enumerable los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tienen el mismo cardinal. Luego el cardinal de $\mathbb{R}^*$ también es igual al del conjunto de los reales. En otras palabras, si bien en el sistema de los reales no-estándar hay números grandes, este no es un sistema numérico grande. O al menos, no es más grande que el de los reales, como se está buscando.

4. Sistemas grandes de números grandes

La construcción de los números reales no-estándar puede generalizarse de inmediato, dando lugar a una gran cantidad de estructuras que bien pueden llamarse sistemas numéricos. Modelando luego las variables de la construcción no es demasiado difícil encontrar un sistema cuyo cardinal es estrictamente mayor que el de los números reales.

4.1. Una generalización

Sea I un conjunto no vacío y sea $\mathcal{U}$ cualquier ultrafiltro sobre I. En el conjunto $\mathbb{R}^I$ de las funciones de I en $\mathbb{R}$ se define la relación de equivalencia $\approx$ como sigue.

$$f \approx g \quad \text{si} \quad \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$$

En el conjunto cociente, denotado $\mathbb{R}^I/\mathcal{U}$, de nuevo se definen las operaciones de adición y multiplicación componente a componente. Estas operaciones están bien definidas y con ellas se puede sumar, restar, multiplicar y dividir. También se define la relación $[f] \leq [g]$ si $\{i \in I \mid f(i) \leq g(i)\} \in \mathcal{U}$, esta relación está bien definida y es un orden lineal compatible con las operaciones. Si cada real $r \in \mathbb{R}$ se identifica con la clase $[r]$ de la correspondiente función constante, el sistema $\mathbb{R}$ se sumerge en la nueva estructura.

En pocas palabras, para un conjunto no vacío I y para cualquier ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I, el sistema $\mathbb{R}^I/\mathcal{U}$ construido arriba es un campo ordenado que contiene los números reales. Ciertamente puede considerarse que estas estructuras son auténticos "sistemas numéricos".

Cabe anotar que esta generalización puede llevarse más lejos, sustituyendo el sistema de los números reales por cualquier estructura con operaciones y relaciones. Esta construcción se denomina *ultrapotencia* y a su vez es un caso particular del *ultraproducto*. Una de las características notables de las ultrapotencias es que, gracias al *teorema de Łoš para ultraproductos*, en cualquier ultrapotencia son válidas exactamente las mismas fórmulas de primer orden que en la estructura original. Así, de nuevo, si la idea de "sistema numérico" se interpreta mediante cualquier teoría de primer orden, un sistema dado puede sumergirse en muchos sistemas del mismo tipo (para más detalles sobre ultraproductos y ultrapotencias véase [1]).

Puede esperarse que entre las numerosas extensiones de la forma $\mathbb{R}^I/\mathcal{U}$ alguna tenga un cardinal mayor que el de los reales, obteniendo así una solución específica para el problema planteado en esta nota. Para empezar se requiere que el conjunto I sea no enumerable, pues en caso contrario la potencia $\mathbb{R}^I$ tiene el mismo cardinal de los números reales y por lo tanto $\mathbb{R}^I/\mathcal{U}$ también.

4.2. Una particularización

En este apartado, sea I el intervalo unitario de los números reales, $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Sobre este conjunto se considera cualquier ultrafiltro $\mathcal{U}$ que contenga el filtro de coenumerables[8], de manera que si para cualquier subconjunto $S \subseteq I$ se tiene: si $I - S$ es enumerable entonces $S \in \mathcal{U}$; si S es enumerable entonces $S \notin \mathcal{U}$ (es claro que existen muchos subconjuntos de I que no son enumerables ni tienen complemento enumerable). Como en todos los casos, el conjunto cociente $\mathbb{R}^I/\mathcal{U}$ es un campo ordenado que extiende los números reales.

Con la ayuda del Lema de Zorn y el principio del buen orden (ambos equivalentes al axioma de elección) es posible probar que existe un subconjunto Σ de $\mathbb{R}^I$ con cardinal *mayor* que el de los números reales que tiene la propiedad siguiente (véase [1, Lemma 6.3.18]).

$$\text{Si } f, g \in \Sigma \text{ con } f \neq g \text{ entonces } \{x \in I \mid f(x) = g(x)\} \text{ es enumerable.} \tag{$*$}$$

[8]El filtro de *coenumerables* de un conjunto está constituido por todos aquellos subconjuntos cuyo complemento es enumerable.

Ahora se observa que esta condición entraña que la correspondencia natural $\Sigma \to \mathbb{R}^I/\mathcal{U} : f \mapsto [f]$ es inyectiva. Pues si $f \neq g$ entonces por $(*)$ en particular $\{x \in I \mid f(x) = g(x)\} \notin \mathcal{U}$, es decir, $[f] \neq [g]$. En consecuencia el cardinal de $\mathbb{R}^I/\mathcal{U}$ es mayor o igual que el de Σ y, finalmente, se obtiene *un sistema numérico con cardinal mayor que el de los números reales*. Este es un sistema numérico grande de números grandes.

Por supuesto, con esto no está resuelto del todo el problema. Sería muy interesante exhibir de manera explícita elementos de esta estructura $\mathbb{R}^I/\mathcal{U}$ que no correspondan a números reales. En particular sería interesante exhibir un infinitesimal de esta estructura, esto es, una función $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $[0] < [f] < [r]$ para cada función constante real positiva r.

Agradecimientos

El autor desea expresar su agradecimiento sincero al profesor Carlos Luque de la Universidad Pedagógica Nacional, quien le obsequió la pregunta alrededor de la cual gira este trabajo. También agradece a los profesores integrantes del Seminario *Espacios de Hilbert y Temas Varios* de la Universidad del Tolima, quienes le brindaron la oportunidad de exponer algunos avances de estas indagaciones.

Bibliografía

[1] John L. Bell and Alan B. Slomson, *Models and Ultraproducts: an introduction.* North-Holland, Amsterdam, 1971.

[2] N. Bourbaki, *Topologie Générale.* Hermann, Paris, 1951.

[3] Xavier Caicedo, *¿Son todos los infinitesimales representables por sucesiones convergentes a cero?* Matemática Enseñanza Universitaria **38** (1986) 28–34.

[4] H. Jerome Keisler, *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach.* Second edition. Disponible en Internet.

[5] David Marker, *Model Theory: an introduction.* GTM 217. Springer-Verlag, New York, 2002.

[6] José M. Muñoz, *Introducción a la Teoría de Conjuntos.* Cuarta edición. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2002.

[7] Edward Nelson, *Radically Elementary Probability Theory.* Annals of Mathematics Studies 117. Princeton University Press, Princeton (New Jersey), 1987. Disponible en Internet.

[8] Yu Takeuchi, *Axioma de completez.* Boletín de Matemáticas **XX** (1986) 124–141.

[9] Yu Takeuchi, *Métodos Analíticos del Análisis No-Estándar.* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1988.

[10] César A. Trejo, *El Concepto de Número.* Serie de Matemática 7. Organización de los Estados Americanos, Washington, 1968.