Relaciones transitivas sobre un conjunto X

Edilberto Sarmiento
Profesor Universidad Distrital
Bogotá D.C, Colombia
esarmiento@udistrital.edu.co

Carmen Pulido
Profesora Universidad Distrital
Bogotá D.C, Colombia
clpulido@yahoo.com.co

Resumen

Se presentan algunos ejemplos y propiedades de la colección de relaciones transitivas y se encuentran cotas inferiores y superiores para el número de relaciones transitivas sobre un conjunto finito.

1. Nociones preliminares

Algunas Notaciones

Sea X un conjunto no vacío y A un subconjunto de X.

Se denota por cA el comlemento de a respecto a X, $|A|$ el cardinal del conjunto A, $\wp(A)$ a la colección de todos los subconjuntos de A y por $\mathcal{H}(A)$ la colección de hiperconjuntos de A:

$\wp(A) = \{B \subseteq X : B \subseteq A\}$

$\mathcal{H}(A) = \{B \subseteq X : A \subseteq B\}$

$\wp_*(A)$ denota al conjunto $\wp(A) - \{\emptyset\}$

Si A y D son subconjuntos de X, con $A \subseteq D$, la colección de todos los conjuntos que están entre A y D es:

$[A, D] = \{B \subseteq X : A \subseteq B \subseteq D\}$

Si $\mathcal{A}$ es una colección de subconjuntos de X,

$c\mathcal{A} = \wp(X) - \mathcal{A} \quad \mathcal{A}c = \{B \subseteq X : (X - B) \in A\}$

$c\mathcal{A}c = \{B \subseteq X : (X - B) \notin A\} = \wp(X) - \mathcal{A}c.$

Resultado

a)$|\wp(A)| = 2^{|A|}$, $\qquad$ $b)|\mathcal{H}(A)| = 2^{|X|-|A|}$ $\qquad$ $c)$ $|\mathcal{A}c| = |\mathcal{A}|$.

Demostración.

b) $\mathcal{H}(A) = \wp(X - A)c$.

Para cada entero positivo $m \leq |X|$, $\wp_m(X)$ es la colección de subconjuntos de X que tienen m elementos:

$\wp_m(X) = \{B \subseteq C : |B| = m\}$. $|\wp_m(X)| = \binom{n}{m}$, si $|X| = n$.

$\wp_{\uparrow m}(X) = \{B \subseteq C : |B| > m\}$.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos colecciones finitas tal que $\forall A \in \mathcal{A}$ y $\forall B \in \mathcal{B}$, $A \cap B = \emptyset$.

$\mathcal{A} \bigsqcup \mathcal{B} = \{A \cup B : A \in \mathcal{A} \text{ y } B \in \mathcal{B}\}$.

Proposición.

$|\mathcal{A} \bigsqcup \mathcal{B}| = |\mathcal{A}||\mathcal{B}|$

Demostración.

La función $j : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A} \bigsqcup \mathcal{B}$ es biyectiva.

$$(A, B) \longrightarrow A \cup B.$$

Supongamos $(A, B) \neq (C, D)$ entonces sin perdida de generalidad podemos suponer $A \neq C$, luego existe $x \in A$ y $x \notin C$, asi $x \in A \cup B$ y $x \notin (C \cup D)$, pues $x \notin C$. y si $x \in D$, entonces $D \cap A \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. así que $j((A, B)) \neq j((C, D))$

Luego $|\mathcal{A} \bigsqcup \mathcal{B}| = |\mathcal{A}||\mathcal{B}|$

Sea X un conjunto.con n elementos.

Una relación R sobre X es un subconjunto de $X \times X$, así hay 2^{n^2} relaciones sobre X.

Una relación R sobre X es reflexiva si para cada $x \in X$, $(x, x) \in R$

R es una relación simétrica sobre X si : $\forall (x, y) \in X \times X, (x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R$.

R es una relación antisimétrica sobre X si : $\forall (x, y) \in X \times X, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$.

Hay $2^{n(n-1)}$ relaciones reflexivas, $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ relaciones simetricas y $2^n 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$relaciones antisimétricas sobre X.

2. Definición y ejemplos

Sea X un conjunto. R es una relación transitiva sobre X si :

$$(\forall x, y, z \in X)\left((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R\right)$$

Proposición.

R es transitiva $\Longleftrightarrow R \circ R \subseteq R$.

Ejemplos de relaciones transitivas:

1. Si $X = \{a\}$, entonces $T_1(X) = \{\emptyset, \{(a, a)\}\}$.

2. Si $X = \{a, b\}$, entonces

$\{(a, b), (b, a)\}, \{(a, b), (b, a), (b, b)\}, \{(a, b), (b, a), (a, a)\}$ no son transitivas,

así que hay 13 relaciones transitivas.

3. $\emptyset$ y $X \times X$ son relaciones transitivas

4. $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$ es una relación transitiva.

5. Si $R \subseteq \Delta_X$ entonces R es transitiva.

Cada subconjunto de la diagonal es una relación transitiva sobre X.

6. Si a, b y c son tres elementos distintos de X, $T_{abc} = \{(a,b),(b,c),(a,c)\}$ es una relación transitiva.

Se denota por $T(X)$ al conjunto de todas las relaciones transitivas sobre X.

Como $T(X) \subseteq \wp(X \times X)$, este conjunto queda automáticamente ordenado por el orden de la inclusión en $\wp(X \times X)$.

Proposición.

1. Las relaciones $\emptyset$ y $X \times X$ son respectivamente el mínimo y máximo de $(T(X), \subseteq)$.

Sea $\{R_i\}_{i \in I}$ una familia de relaciones transitivas sobre X,.

2. La intersección $\bigcap_{i \in I} R_i$ es una relación transitiva.

3. Si $\{R_i\}_{i \in I}$ es una familia encajada de relaciones transitivas, entonces $\bigcup_{i \in I} R_i$ es transitiva

En símbolos: $(i \neq j \Longrightarrow R_i \subseteq R_j \text{ o } R_j \subseteq R_i) \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} R_i \in T(X)$.

Observación.

La unión de relaciones transitivas no siempre es transitiva.

Ejemplo: $R = \{(1,2)\}$ y $S = \{(2,3)\}$ son transitivas pero $R \cup S = \{(1,2),(2,3)\}$ no lo es.

Proposición.

Sea X un conjunto con $|X| = n$.

1. $|T(X)| \leq 2^{n^2}$

2. $\{A \times B : A, B \in \wp_*(X)\} \subseteq T(X)$

3. $(2^n - 1)^2 \leq |T(X)|$

Demostración

3. $\{A \times B : A, B \in \wp_*(X)\}$ es equipotente a $\wp_*(X) \times \wp_*(X)$ así:

$(2^n - 1)^2 = |\{A \times B : A, B \in \wp_*(X)\}| \leq |T(X)|$.

3. Relaciones en $T_1(X)$

Definición. Sea X un conjunto y $\Delta = \Delta_X$.

$T_1(X) = \{R \in T(X) : R \cap \Delta = \emptyset\}$

$T_2(X) = \{R \in T(X) : R \cap \Delta \neq \emptyset \ \text{ y } \ R \subsetneqq \Delta\}$.

Las relaciones del conjunto $T_1(X)$ se llamaran relaciones puramente transitivas.

Proposición.

$T(X) = T_1(X) \cup T_2(X) \cup \wp * (\Delta)$. y la unión es disyunta.

Ejemplos de relaciones puramente transitivas. $T_1(X)$

1. Si $X = \{a\}$, entonces $T_1((X) = \{\emptyset\}$.

2. Si $X = \{a, b\}$, entonces $T_1((X) = \{\emptyset, \{(a, b)\}, \{(b, a)\}\}$.

3. Si $X = \{a, b, c\}$, entonces $X \times X =$

c	(a,c)	(b,c)	(c,c)
b	(a,b)	(b,b)	(c,b)
a	(a,a)	(b,a)	(c,a)
	a	b	c

y

$$T_1((X) = \{\emptyset\} \cup \left\{\begin{array}{c} \{(a,b)\} \\ \{(b,a)\} \\ \{(a,c)\} \\ \{(c,a)\} \\ \{(b,c)\} \\ \{(c,b)\} \end{array}\right\} \cup \left\{\begin{array}{c} \{(a,b),(a,c)\} \\ \{(b,a),(c,a)\} \\ \{(a,c),(b,c)\} \\ \{(c,a),(c,b)\} \\ \{(a,b),(c,b)\} \\ \{(b,a),(b,c)\} \end{array}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\begin{array}{c} \{(a,b),(b,c),(a,c)\} \\ \{(b,a),(a,c),(b,c)\} \\ \{(a,c),(c,b),(a,b)\} \\ \{(b,c),(c,a),(b,a)\} \\ \{(c,a),(a,b),(c,b)\} \\ \{(c,b),(b,a),(c,a)\} \end{array}\right\} \quad \text{total } 19$$

4. Las relaciones unitarias cuyo elemento no es de la diagonal son de $T_1(X)$

5. Sea $X = \{a, b, c, d\}$,

$\{(a, b), (c, b)\}$, $\{(a, b), (a, c)\}$ y $\{(a, b), (c, d)\}$ son los únicos tipos de relaciones con dos elementos de $T_1(X)$.

6.Si $A \in \wp(X)$ y $x \notin A$, $A \times \{x\}$ y $\{x\} \times A$ son relaciones de $T_1(X)$

Proposición..

Sea X un conjunto con $|X| = n$.

1. Si $R \in T_1(X)$ entonces $R \subseteq (cR)^{-1}$

2.$T_1(X) \cap SIM(X) = \emptyset$

3.$T_1(X) \subseteq \wp(X \times X) - SIM(X)$.

4. $|T_1(X)| \leq 2^{n^2} - 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Demostración.

1. Si $R \in T_1(X)$ entonces $(a,b) \in R \Longrightarrow (b,a) \notin R \Longleftrightarrow R \subseteq (cR)^{-1}$.

Proposición.

1. Si R es transitiva y $S \in \wp_*(\Delta)$, entonces $R \cup S$ es transitiva.

2. $T_2(X) \supseteq T_1(X) \sqcup \wp * (\Delta) = \{R \cup S : R \in T_1(X) \text{ y } S \in \wp_*(D)\}$.

3. $|T_2(X)| \geq (2^n - 1)\,|T_1(X)|$

4. $|T(X)| \geq 2^n\,(|T_1(X)| + 1) - 1$

Demostración.

3. $|T_2(X)| \geq |T_1(X) \sqcup \wp_*(\Delta)| = |T_1(X)||\wp_*(\Delta)| = (2^n - 1)\,|T_1(X)|$

4.$|T(X)| = |T_1(X) \cup T_2(X) \cup \wp * (D)| = |T_1(X)| + |T_2(X)| + |\wp * (D)|$

$\geq |T_1(X)| + (2^n - 1)|T_1(X)| + 2^n - 1 = 2^n|T_1(X)| + 2^n - 1 = 2^n\,(|T_1(X)| + 1) - 1.$

Proposición.

1. Si $R \in T_1(X)$,entonces $R^{-1} \in T_1(X)$.

2. La función $\varphi : T_1(X) \longrightarrow T_1(X)$, tal que $\varphi(R) = R^{-1}$ es biyectiva.

3. Si X es finito, $|T_1(X)|$ es un número par.

Se denotapor $T_1(X)_1$ al conjunto $T_1(X)_1 = \{R \in T_1(X) : |R| = 1\}$

Proposición.

1. Si $A \subseteq B$, entonces $T_1(A) \subseteq T_1(B)$.

2. Si X es unconjunto con n elementos, entonces $|T_1(X)_1| = n(n-1)$.

Demostración

2. $T_1(X)_1 \approx X \times X - \Delta$.

Proposición.

Sean $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ con el orden usual de $\mathbb{Z}^+$ A y B subconjuntos de X. Notamos por

$A \times B_I = \{(a,b) \in A \times B : a < b\} \qquad A \times B^S = \{(a,b) \in A \times B : a > b\}$

1. Las relaciones $A \times B_I$ y $A \times B^S$ son transitivas

2. $\{A \times B_I : A \in \wp_{\uparrow 2}(X) \text{ y } B \in \wp_{\uparrow 2}(X)\} \biguplus \left\{A \times B^S : A \in \wp_*(X) \text{ y } B \in \wp_*(X)\right\} \subseteq T(X)$.

3. $2\,(2^n - n - 1)^2 \leq |T_1(X)|$.

Sea $X = \{1, 2, \cdots, n\}$

Notación $X \times X_I = \{(i,j) \in X \times X : i < j\}$

$MT_1(X) = \{R : R \text{ es una relación maximal de } T_1(X)\}$

$S(X)$ el grupo de permutaciones del conjunto X.

Sea $\sigma \in S(X)$,definimos $R_\sigma = \left\langle \{(\sigma(i), \sigma(i+1))\}_{i=1}^{n-1} \right\rangle$

$\sigma X \times X_I = \{(\sigma(i), \sigma(j)) \in X \times X : i < j\}$

Teorema

1. $R_\sigma \in T_1(X)$.

2. $R_\sigma = \{(\sigma(i), \sigma(j)) \in X \times X : i < j\}$

3.$|R_\sigma| = \frac{1}{2}n(n-1)$.

4. $\sigma \neq \rho \Longrightarrow R_\sigma \neq R_\rho$

5. $R_\sigma \in M(X)$

Demostración.

1.$R_\sigma - \Delta \in T(X)$ y $\{(\sigma(i), \sigma(i+1))\}_{i=1}^{n-1} \subset R_\sigma - \Delta \Longrightarrow R_\sigma \subseteq R_\sigma - \Delta$ y $R_\sigma \in T_1(X)$.

2. $\supseteq$) Si $(\sigma(i), \sigma(j)) \in \sigma X \times X_I, i < j$ entonces existe $r > 0$, tal que $i + r = j$, luego

$\sigma(i) \sim \sigma(i+1) \sim \sigma(i+2) \sim \cdots \sim \sigma(i+r)$ y $(\sigma(i), \sigma(j)) \in R_\sigma$.

$\subseteq$) Supongamos $(\sigma(i), \sigma(j)) \in R_\sigma,\ i > j$ entonces $(\sigma(j), \sigma(i)) \in R_\sigma$ y $(\sigma(i), \sigma(i)) \in R_\sigma$.

3. R_σ :

σ_n	(σ_1, σ_n)	(σ_2, σ_n)	(σ_3, σ_n)	$\cdots$	(σ_i, σ_n)	$\cdots$	(σ_{n-2}, σ_n)	(σ_{n-1}, σ_n)	
σ_{n-1}	(σ_1, σ_{n-1})	(σ_2, σ_{n-1})	(σ_3, σ_{n-1})	$\cdots$	(σ_i, σ_{n-1})	$\cdots$	$(\sigma_{n-2}, \sigma_{n-1})$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
σ_j	(σ_1, σ_j)	(σ_2, σ_j)	(σ_3, σ_j)	$\cdots$	(σ_i, σ_j)	$\cdots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						
σ_3	(σ_1, σ_3)	(σ_2, σ_3)							
σ_2	(σ_1, σ_2)								
σ_1									
	σ_1	σ_2	σ_3	$\cdots$	σ_i	$\cdots$	σ_{n-2}	σ_{n-1}	σ_n

$|R_\sigma| = 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 = \frac{1}{2}n(n-1)$

4. $\sigma \neq \rho$, entonces existen $i, j, r, s \in X$, con $i < j$ y $r > s$ tal que $\sigma(i) = \rho(r)$ y $\sigma(j) = \rho(s)$, entonces $(\sigma(i), \sigma(j)) \in R_\sigma$ y $(\sigma(i), \sigma(j)) = (\rho(r), \rho(s)) \notin R_\rho$ así $R_\sigma \neq R_\rho$.

5. Si existiera $R \in T_1(X)$ tal que $R_\sigma \subset R$ entonces existiria $(l, m) \in R$ y $(l, m) \notin R_\sigma$ asique existen $0 \leq r, s \leq n$ tal que $l = \sigma(r), m = \sigma(s), r \geq s,$ entonces $(x_{\sigma(s)}, x_{\sigma(r)}) = (m, l) \in R$ y esto contradice el hecho que $R \in T_1(X)$.

Notación: $T_S(A) = \{R_\sigma : \sigma \in S(A)\}$

Teorema

1. $T_1(X) \subseteq \biguplus \{T_S(A) : A \in \wp_{\uparrow 2}(X)\}$

2.$|T_1(X)| \leq \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} k!$.

Demostración.

3. $|T_1(X)| \leq |\biguplus \{T_S(A) : A \in \wp_{\uparrow 2}(X)\}| = \sum_{A \in \wp_{\uparrow 2}(X)} |A|! = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} k!$.

4. Relaciones transitivas y ordenes parciales

Sean $T(A)$ el conjunto de todas las relaciones transitivas sobre A, $T_a(A)$ el conjunto de todas las relaciones transitivas y antisimétricas sobre A. y $P(A)$ elconjunto de todas las relaciones de orden parcial sobre A.

Sean X un subconjunto arbitrario de A y $\mathcal{P}$ una partición de $A - X = cX$ Definimos

$T_a^*(X \cup \mathcal{P}) = \{R \in T_a(X \cup \mathcal{P}) : \forall z \in X \cup \mathcal{P}, (z, z) \in R \Leftrightarrow z \in \mathcal{P}\}$

$= \{R \in T_a(X \cup \mathcal{P}) : \Delta_{\mathcal{P}} \subseteq R \wedge \Delta_X \cap R = \emptyset\}$

Lema 1.

$T(A)$ es equipotente a $\biguplus_{X \in \wp(A)} \left(\biguplus_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}(A-X)} T_a^*(X \cup \mathcal{P}) \right)$

Demostración.

Para cada $R \in T(A)$ definimos $A_R = \{x \in A : (x, x) \in R\} = Dom(R \cap R^{-1})$ Para cada $x, y \in A_R$ definimos la relación

$x \sim y \Longleftrightarrow (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R$

$\sim$ es una relación de equivalencia sobre A_R. $\sim \; = R \cap R^{-1}$

Sean $X = A - A_R$ y $\mathcal{P} = A_R / \sim = \{[x] : x \in A_R\}$

Para $R \in T(A)$, definimos $S \in T_a^*(X \cup \mathcal{P})$ como sigue:

Si $(x, y) \in R$, entonces

i) $x \in X \wedge y \in X \Longrightarrow (x, y) \in S$

ii) $x \in A - X \wedge y \in X \Longrightarrow ([x], y) \in S$

iii) $x \in X \wedge y \in A - X \Longrightarrow (x, [y]) \in S$

iv) $x \in A - X \wedge y \in A - X \Longrightarrow ([x], [y]) \in S$

La aplicación f definida por $f(R) = S$ es una biyección.

$$f(R) = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in X \wedge (x, y) \in R\} \cup \{([x], y) : x \notin X \wedge y \in X \wedge (x, y) \in R\} \cup$$
$$\{(x, [y]) : x \in X \wedge y \notin X \wedge (x, y) \in R\} \cup \{([x], [y]) : x \notin X \wedge y \notin X \wedge (x, y) \in R\}$$

f esta bien definida pues $f(R)$ es transitiva antisimetrica y $\forall z \in X \cup \mathcal{P}, (z,z) \in f(R) \Leftrightarrow z \in \mathcal{P}$.

f es inyectiva: Si $R \neq R'$ existe $(x,y) \in R$ y $(x,y) \notin R'$ y $f(R) \neq f(R)$.

f es sobre: Sea $S \in T_a^*(X \cup \mathcal{P}), entonces$ existe $R =$

Lema 2

$T_a^*(X \cup \mathcal{P})$ es equipotente a $P(X \cup \mathcal{P})$

Para cada $R \in T_a^*(X \cup \mathcal{P})$ sea $f(R) = R \cup \Delta_{X \cup \mathcal{P}}$ f es una biyección.

Ejemplos:

1. Sea $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ y

$$R = \left\{ \begin{array}{c} (a,a), (b,b), (d,d), (e,e), (f,f), (a,b), (b,a), \\ (a,c), (b,c), (d,e), (e,d), (d,c), (e,c), (d,f), (e,f) \end{array} \right\}$$

una relación sobre A.

Por el lema 1 $A_R = \{a,b,d,e,f\}$

La relación de equivalencia es $\{(a,a), (b,b), (d,d), (e,e), (f,f), (a,b), (b,a), (d,e), (e,d)\}$

La partición es: $\mathcal{P} = A_R/\sim\ = \{\{a,b\}, \{d,e\}, \{f\}\}$

$X = A - A_R = \{c\}, A - X = A_R$.

La relación antisimetrica y transitiva S es

$S = \{(\{a,b\}, \{a,b\}), (\{d,e\}, \{d,e\}), (\{a,b\}, c), (\{d,e\}, c), (\{d,e\}, c), (\{f\}, \{f\})\}$

Por el lema 2 la relación $S \cup \Delta_{X \cup \mathcal{P}}$ es una relación de orden parcial sobre A.

$$S \cup \Delta_{X \cup \mathcal{P}} = \left\{ \begin{array}{c} (\{a,b\}, \{a,b\}), (\{d,e\}, \{d,e\}), (\{a,b\}, c), \\ (\{d,e\}, c), (\{d,e\}, c), (\{f\}, \{f\}), (c,c) \end{array} \right\}.$$

2. Sea $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ y

$R = \{(1,1), (3,3), (5,5), (6,6), (1,3), (3,1), (1,5), (5,1), (2,6), (4,6)\}$

una relación sobre A.

Por el lema 1 $A_R = \{a,b,d,e,f\}$

y la relación de equivalencia es $\{(a,a), (b,b), (d,d), (e,e), (f,f), (a,b), (b,a), (d,e), (e,d)\}$

y la partición es $\mathcal{P} = A_R/\sim = \{\{a,b\}, \{d,e\}, \{f\}\}$

$X = A - A_R = \{c\}, A - X = A_R$.

la relación antisimetrica y transitiva S es

$S = \{(\{a,b\}, \{a,b\}), (\{d,e\}, \{d,e\}), (\{a,b\}, c), (\{d,e\}, c), (\{d,e\}, \{f\}), (\{f\}, \{f\})\}$

Por el lema 2 la relación $S \cup \Delta_{X \cup \mathcal{P}}$ es una relación de orden parcial sobre A.

$$S \cup \Delta_{X \cup \mathcal{P}} = \left\{ \begin{array}{c} (\{a,b\},\{a,b\}),(\{d,e\},\{d,e\}),(\{a,b\},c), \\ (\{d,e\},c),(\{d,e\},c),(\{f\},\{f\}),(c,c) \end{array} \right\}.$$

Bibliografía

[1] BRINKMANN, G. and MCKAY, B. D. Counting Unlabelled Topologies and Transitive Relations. Journal of Integer Sequences.,V 8 (2005).

Posets on up to 16 points, Order. Journal of Integer Sequences.,V 19 (2002). (147-179).

[2] DAVEY, B.A. Introduction to Lattices and Order. Cambridge University Press, 1990.

[3] DAVISON, J. L. Asymptotic enumeration of partial orders, Proc. 17 th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Boca Raton, 1986, ed. F. Hoffman, R. C. Mullin, R. G. Stanton and K. Brooks Reid, Congr. Numer.53, Utilitas Math., 1986. (277—286).

[4] EL-ZAHAR, M. H. Enumeration of ordered sets, Algorithms and Order, Proc. NATO Advanced Study Institute, Ottawa, 1987, ed. I. Rival, Kluwer, 1989, (327—352).

[5] ERNÉ, M. and Stege, K. Counting finite posets and topologies, Order 8 (1991). (247—265).

[6] KIM, K. H. and ROUSH, F. W. Posets and finite topologies, Pure Appl. Math. Sci.V14 (1981). (9—22).

[7] KLASKA, J. Transitivity and partial order. Math. Bohemica. V122 (1997). (75—82).

[8] KLEITMAN, D. J. and ROTHSCHILD, B. L. Asymptotic enumeration of partial orders on a finite set. Trans. Amer. Math. Soc. V 205 (1975). (205—220).

[9] PFEIFFER, G. Counting transitive relations. Journal of Integer Sequences.

V7 (2004). (11) .

[10] Sarmiento Edilberto Teoria de Colecciones de Conjuntos. Universidad Distrital. 2007.

[11] STEVEN, Finch. Transitive Relations, Topologies and Partial Orders. Mathematical Constants. Cambridge University Press (2003).