View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Funes

Un método geométrico para resolver ecuaciones cúbicas

Ana María Prada Coronado
Profesora Colegio Colombo Americano
Bogotá D.C., Colombia
anmapraco@gmail.com

Henry Alejandro Angulo Escamilla
Profesor Instituto Pedagógico Nacional
Bogotá D.C., Colombia
anguloalejandro@gmail.com

Resumen

En esta conferencia se presenta un método geométrico para resolver ecuaciones cúbicas empleado hacia el siglo XII por Omar Al- Khayyam (matemático y poeta árabe); para tal efecto se hace indispensable conocer el "estado del arte"de la resolución de ecuaciones hacia el siglo XII, resaltando particularmente los aportes de las civilizaciones Babilónica, Egipcia, Griega, Hindú y Árabe. Se presenta un ejemplo detallado, algunas conclusiones de este sucinto estudio y algunas proyecciones.

> *Ignorante que presumes de sabio: preocupado te veo entre el infinito del pasado y el infinito del porvenir. Quisieras poner límite entre estos dos infinitos y detenerte... Siéntate antes bajo un árbol con un cántaro de vino y olvidarás tu importancia.*
> Omar Al-Khayyam

El Álgebra de los Babilonios y Egipcios

Es bien conocido que la mayoría de historiadores de las matemáticas (Collete, 1985; Cajori, 1985; Kline, 1992; Bell, 2003) sitúan los orígenes o rudimentos primarios matemáticos en mesopotamia, en la civilización de los babilonios; posteriormente, abordan los aportes de la cultura egipcia a tales "fundamentos". De cualquier manera, se sitúa a estas dos culturas en la base del desarrollo de las corrientes centrales de las matemáticas. Particularmente, interesan aquí los inicios del álgebra.

El álgebra de los babilonios y la de los egipcios, aunque desarrolladas en diferentes épocas, tienen algunas características comunes. En ambas culturas se desarrolló un "algebra" sin simbolismo que estaba orientada a resolver problemas que generalmente se presentaban en contextos de agrimensura, astronomía o comercio. Los problemas y las "reglas" para resolverlos eran expresados y transmitidos de manera retórica (en el lenguaje natural), lo cual dificultaba tal transmisión, y mas aún, el tratamiento mismo de los problemas. Aunque en ambas culturas se contaba con un sistema de símbolos para representar cantidades, estos no se emplearon o extendieron al tratamiento algebraico de las ecuaciones que planteaban como "modelos" para resolver los problemas.

Existen evidencias (Bell, 2003) de que los babilonios, más que los egipcios, eran asiduos tabuladores y compiladores de "valores numéricos" que les permitían resolver un tipo determinado de ecuación o problema. Esto no quiere decir que los babilonios hayan determinado explícitamente unos "tipos" de ecuaciones, pero si usaban algunas reglas generales para resolver ecuaciones "reduciéndolas" a "casos típicos". Ese uso persistente de las reglas es indicio de algún reconocimiento por parte de los Babilonios sobre la validez de las mismas; aunque no se encuentra (ni en babilonios, ni en egipcios) ningún intento de demostración, se percibe la existencia de cierta intuición sobre la demostración. Más importante es, la utilización (no explícita, e incluso inconsciente) de una metodología en el desarrollo del álgebra: el "reduccionismo". Un ejemplo claro de esa metodología es presentado por Bell (Ibid, p. 44) una ecuación cúbica del tipo $x^3 + px^2 + q = 0$ (en nuestra simbología) fue reducida por algún babilonio a la ecuación $y^3 + y^2 = r$ $\left(\text{siendo } y = \frac{x}{p} \text{ y } r = \frac{-q}{p^3}\right)$, y se encuentra aquí la utilidad de las tablillas, ya que poseían en una tablas las sumas de un número al cubo y el número al cuadrado $(y^3 + y^2)$.

De acuerdo con lo que se ha planteado, se esperaría que una cultura posterior como lo fue la griega continuara con el desarrollo de la corriente que se ha llamado álgebra; sin embargo, inexplicablemente, los griegos no utilizaron el legado de los orientales.

Matemática Griega (11 Siglos: VII a.c. - IV d.C.)

La matemática griega es reconocida como una "edad de oro" en el desarrollo de las matemáticas. En las obras más sobresalientes de aquella época se tiende a reconocer explícitamente que la demostración por el razonamiento deductivo ofrece una base sólida para la geometría y la aritmética. (Véanse por ejemplo las obras de: Eudoxio, Tales, Euclides, Apolonio y Arquímedes). Además, los griegos demostraron cierto interés por asumir la posibilidad de que la naturaleza fuera comprendida por los seres humanos a través de las matemáticas, ya que estas se consideraban como el lenguaje más adecuado para idealizar la complejidad de la naturaleza y reducirla a una sencillez comprensible (Véanse las obras de Pitágoras y Arquímedes) (Ibid)

Tal vez fue ese interés en la demostración como base sólida para el desarrollo de las matemáticas lo que impidió que el algebra de los babilonios y egipcios siguiera el curso que había tomado, y, en cambio, se hiciera especial énfasis en el desarrollo la geometría.

Diofanto es reconocido como el griego con mayor interés por el álgebra (si no el único), con él se da un paso hacia el álgebra simbólica a la cual Nesselman (1848) la llamó Álgebra sincopada (Malisani, 1999); sin embargo, el análisis diofántico aporta, casi que exclusivamente, a la resolución de ecuaciones lineales de 1, 2 o 3 incógnitas.

Por otra parte, el desarrollo de la geometría tuvo algunas implicaciones sobre el desarrollo del álgebra (por lo menos indirectamente). Ejemplos de ello son los siguientes: Euclides resolvió la ecuación de segundo grado $x^2 + ax = a^2$ con $a > 0$ y estableció equivalentes geométricos para identidades algebraicas básicas como: $a(a + b) = a^2 + ab$ y $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; además, presentó en el libro X (lema 28) (Euclides, 1952) la que parece ser la primera demostración de la solución de una ecuación indeterminada $(a^2 = b^2 + c^2)$. Por su parte Arquímedes resolvió (por intersección de cónicas) la ecuación $x^3 + c = ax^2$ mientras se enfrentaba al problema de cortar una esfera por un plano de modo que los segmentos estuvieran en una proporción dada.

Una gran herencia de los griegos fue la clasificación de los lugares geométricos (posiblemente propuesta por Euclides), tal clasificación también la utilizaban para clasificar los problemas a los que se enfrentaban; de acuerdo con Del Río (1994) es posible establecer las siguientes relaciones:

- Problemas resolubles con regla y compás: Lugares planos
- Problemas resolubles utilizando cónicas ("Duplicación" del cubo): Lugares sólidos o espaciales (cónicas)

- Problemas resolubles utilizando otras "curvas" ("Cuadratura" del círculo, trisección del ángulo): Lugares lineales (Cuadratriz, espiral uniforme).

Posteriormente se analizará cómo esta clasificación tuvo incidencia en el desarrollo del algebra árabe, para ello es necesario estudiar la influencia de otras culturas como la hindú.

No queremos aquí extender el estudio sobre los valiosos aportes de la cultura griega al desarrollo de las matemáticas, simplemente hemos expuesto algunos aspectos que se relacionan a nuestro juicio con el desarrollo del álgebra.

Álgebra "Árabe": Influencia Hindú, Griega y Posiblemente China

Los sucesores de los griegos en la historia de las matemáticas son los hindúes. Particularmente, el álgebra hindú se caracterizó por el intento de introducir un simbolismo operatorio, personajes como Aryabhatta (sigloVI), Brahmagupta (sigloVII) y Bhaskara (siglo XII) trabajaron en el uso de las letras para representar incógnitas en problemas particulares (Bell, 2003); sin embargo, es una lástima que esos trabajos no hayan sido acogidos por la comunidad de matemáticos árabes de la época, al contrario de esto algunos personajes dieron una paso atrás con respecto a Diofanto, retornando a la retórica, entre ellos es posible mencionar a Mohammed ibn Musa Al-Khowarizmi cuya obra representativa es Al-jebr w'almuquabala (825 d.c.).

En Puig (2002) se encuentra una "restauración" del texto de Al-Khowarizmi de la cual es posible deducir que este matemático árabe combinó la herencia griega con los adelantos hindúes en la numeración, resolvió ecuaciones cuadráticas algebraicamente y presentó "diagramas" de los cuales se podían deducir las soluciones geométricamente. Al Khowarizmi asumió la geometría de los griegos para clarificar y concretar los procesos algebraicos. Posteriormente, Abu Kamil perfeccionó la obra de Al-Khowarizmi al incluir la prueba geométrica de la resolución de una ecuación de segundo grado (Moreno, 2002)

Los traductores, compiladores y comentaristas de obras hindúes, griegas y árabes desempeñaron un papel preponderante en la difusión de las matemáticas de estas civilizaciones, particularmente, en lo relacionado con el álgebra y la numeración hindú (Vasco, 1985); entre este grupo de personajes se encuentran Tabit ibn Qurra, Abu-l-Wafa, Al-Karhi, Ibn Sina, Al-Biruni (Siglos IX - XI).

Así pues, hacia el siglo XII en los observatorios astronómicos y en las escuelas de los templos árabes ya era completamente conocida y utilizada la numeración hindú y la geometría griega. Es precisamente en esa época y en un observatorio astronómico donde Omar Al-Khayyam desarrolló sus estudios sobre ecuaciones cúbicas. (Moreno, 2002)

Omar Al-Khayyam (Ghiyath al-Din Abul'l-Fath Umar ibn Ibrahim Al-Nisaburi al-Khayyami) 1050? - 1123? d.C.

Al-Khayyam nació en Nishapur (actual Irán) fue Matemático, astrónomo y poeta. Un visir amigo lo instaló en su observatorio astronómico y allí pudo adelantar sus estudios en los cuales asumió la tradición algebraica árabe-hindú y la geometría griega. (Solaeche, 2002)

El principal aporte de Khayyam tiene que ver con la resolución de ecuaciones cúbicas a través de la intersección de cónicas. Aunque este proceso ya era conocido por algunos griegos como Menecmo y Arquímedes y algunos árabes como Alhazén y Al-Biruni, fue Al-Khayyam quien lo generalizó como un método para aplicarlo a todas las ecuaciones de tercer grado con raíces y coeficientes positivos. De acuerdo con Moreno (2002) y Tarrés (2004), Khayyam realizó una clasificación de las ecuaciones cúbicas en 25 formas distintas: 6 ya habían sido estudiadas, 5 eran reducibles a las anteriores y 14 no podían ser resueltas con ayuda exclusiva de los Elementos (recapitulando, 11 eran resolubles con lugares planos y 14 con lugares espaciales); así pues, Al-Khayyam usó nuevamente el “reduccionismo” como metodología para el desarrollo de su álgebra.

Así por ejemplo, para resolver la ecuación $x^3 = ax^2 + c$ Khayyam hace transformaciones a la ecuación (conocidas por el acceso a Al-jebr w'almuquabala) para obtener

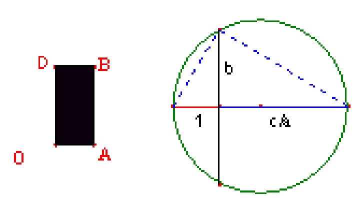
$$x^3 - ax^2 = c$$
$$c = x^2(x-a)$$
$$\frac{c}{(x-a)} = x^2$$

Es esta última ecuación es posible (para nosotros) identificar una hipérbola y una parábola; sin embargo, Khayyam tuvo que valerse de algunas proposiciones de Euclides y de Apolonio para resolver la ecuación. Aunque en la bibliografía consultada no se evidencian con claridad las proposiciones utilizadas por Khayyam, creemos que las que presentamos a continuación son las que dan cuenta del proceso desarrollado por el matemático árabe.

Proceso de resolución de la ecuación $x^3 = ax^2 + c$ [1]

1. *Construcción de un paralelepípedo*
   Dado c el volumen y a la altura, ¿cuál debe ser b (lado de la base cuadrada)?

$$b^2 = \frac{c}{a} \qquad \text{(E,XI,34)}$$
$$\frac{1}{b} = \frac{b}{\frac{c}{a}} \qquad \text{(E,VI,13) (Media proporcional)}$$

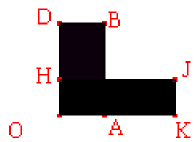


$a = m\overline{OA}, b = m\overline{AB}$

[1] En este proceso se presentara el desarrollo con los símbolos que frecuentemente son utilizados y las justificaciones se darán en referencia a los conocimientos de los que disponía Khayyam, por ejemplo, (E,XI,34) hará referencia a la proposición 34 del libro XI de los Elementos. La letra C hará referencia al libro de Apolonio (Cónicas). Estas proposiciones pueden ser consultadas al final del documento.

2. *Construcción de paralelogramos de áreas iguales*

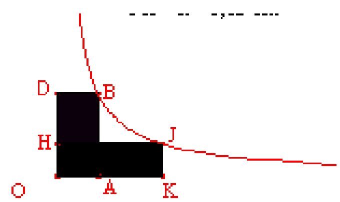
$$ab = hk \qquad \text{(k es fijo)}$$
$$\frac{a}{k}b = h \qquad \text{(E,VI,12) (Cuarta Proporcional)}$$



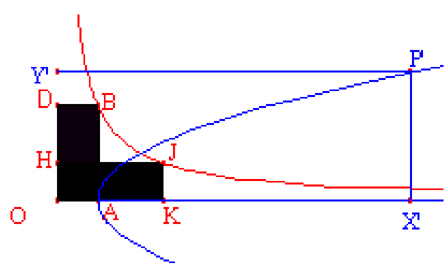
$$h = OH, k = OK$$

El paralelogramo $OKJH$ tiene área constante (para cualquier valor de k)

3. *Construcción del lugar Geométrico de J*
El lugar geométrico de J determina la rama (positiva) de una hipérbola, las rectas OK y OH son las asíntotas de la misma (C, II, 4) y el paralelogramo $OKJH$ es un invariante de la cónica.



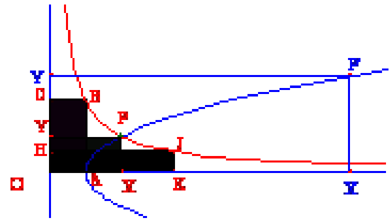
4. *Construcción de una parábola*
De acuerdo con Euclides (E,VI,13) y Apolonio (C,I,11) el lado recto de la parábola es OA y el vértice es A. $P'X'$ es media proporcional de OA y AX'



5. *Determinación del punto de intersección*
Sea P el punto de intersección de la hipérbola y la parábola (nótese que $OY = PX$)

Por estar P en la hipérbola (paralelogramo como invariante)	Por estar P en la parábola: (OA es lado recto: C,I, 11)
$OX \cdot OY = OA \cdot AB$	$\dfrac{OA}{OY} = \dfrac{OY}{AX}$
$\dfrac{OX}{AB} = \dfrac{OA}{OY}$	$OY^2 = OA \cdot AX$

Luego, $\frac{OX^2}{AB^2} = \frac{OA^2}{OY^2} = \frac{OA \cdot OA}{OA \cdot AX} = \frac{OA}{AX}$ de donde se obtiene $AB^2 \cdot OA = OX^2 \cdot AX$



6. *Verificación de la solución* Veamos que el segmento $OX = x$ es solución de la ecuación:

$$\begin{aligned} x^3 = OX^3 = OX^2 &= OX^2(OA + AX) = OX^2OA + OX^2AX \\ &= OX^2OA + AB^2OA = ax^2 + c \end{aligned}$$

Conclusiones

- En el procedimiento que se acaba de presentar el simbolismo utilizado es una potente herramienta para "sintetizar" o representar algunos procesos que expresados de manera retórica (la empleada por Khayyam), serían muy extensos y confusos. La falta de un simbolismo adecuado constituyó uno de los principales limitantes que no permitieron a Khayyam lograr mayores avances en el desarrollo del álgebra; afortunadamente ello fue superado posteriormente por François Vietè. Otro de los obstáculos fue el notable rechazo a las raíces negativas suscitado por el desconocimiento de todas las intersecciones de cónicas, por ejemplo, en la ecuación resuelta, Khayyam sólo considera una de las ramas de la hipérbola (la positiva), a ello se suma el desconocimiento de la expresión general de una cónica en términos de parámetros. Hoy con esa ecuación general, es relativamente fácil resolver la ecuación propuesta.

- La gran herencia griega relativa a la "clasificación" de los problemas de acuerdo a los lugares geométricos, condujo a Khayyam a afirmar:

  > *"... esto no puede resolverse por medio de la geometría plana, es decir, usando solamente regla y compás, debido a que contiene un cubo, y para resolverlo necesitamos las secciones cónicas"* (Martos, 2006)

  Es decir, las ecuaciones de tercer grado no se pueden resolver "algebraicamente"

  > *"... lo que llaman los algebristas cuadrado-cuadrado en el tratamiento de las magnitudes continuas, es sólo una cuestión teórica que no existe de ninguna manera en la realidad..."* (Ibid)

  Es decir las ecuaciones de cuarto grado no se pueden resolver ni si quiera geométricamente.

- Khayyam dio un paso fundamental hacia el "acercamiento" entre álgebra y geometría que se concretó finalmente en los siglos XVI y XVII con Descartes:

  > *"El álgebra es un arte científico. Su objeto son los números absolutos y las magnitudes medibles, las cuales son desconocidas, pero referidas a cualquier cosa conocida de tal manera que puedan ser determinadas, y a esta cosa conocida se llega, analizando las condiciones del problema; en este arte se buscan las relaciones que vinculan las magnitudes dadas en el problema con la incógnita, la*

cual de la forma antes indicada constituye el objeto del álgebra. La perfección de este arte consiste en el conocimiento de los métodos matemáticos, con ayuda de los cuales puede realizarse la determinación mencionada, tanto de las incógnitas numéricas como geométricas. La resolución algebraica, como es bien conocido, se realiza solo mediante una ecuación, o sea, por la igualación de unas potencias con otras."

"... quienquiera que piense que el Álgebra es un sistema de trucos para obtener los valores de incógnitas, piensa vanamente. No se debe prestar ninguna atención al hecho de que el Álgebra y la Geometría son en apariencia diferentes. Los hechos del Álgebra son hechos geométricos que están demostrados..." (Ibidem)

Algunas proyecciones de estudio

- Khayyam se interesó por el problema suscitado por el quinto postulado de Euclides, y al parecer, logró algunos avances conducentes a las hipótesis del ángulo agudo, ángulo obtuso y del ángulo recto estudiadas por Saccheri y que originan, respectivamente, la geometría de Bolyai-Lobachevsky, la de Riemman y la geometría euclídea (Cajori, 1985), una pregunta natural para responder desde el punto de vista del historiador sería: ¿en qué consistieron esos avances?

- Además, Khayyam estudió la "Teoría de Proporciones" atribuida a Euclides concluyendo que *"Dos razones son iguales si pueden ser expresadas mediante la razón de dos números, con un nivel de precisión tan grande como se desee"*; afirmación que induce a indagar: ¿Qué tan cerca se encontró Khayyam del concepto de número real?

Anexo. Algunas proposiciones de Euclides y Apolonio

(E,VI,12): Elementos, Libro VI, Proposicion 12. *"Dadas tres rectas, hallar una cuarta proporcional"* (Euclides, 1991)

(E,VI,13): Elementos, Libro VI, Proposicion 13. *"Dadas dos rectas, hallar una media proporcional"* (Euclides, 1991)

(E,XI,34): Elementos, Libro XI, Proposición 34. *"Las bases de los sólidos paralelepípedos iguales están inversamente relacionadas con las alturas; y aquellos sólidos paralelepípedos cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas son iguales"* (Euclides, 1991)

(C,I,11): Conicas, Libro I, Proposicion 11. *"If a cone is cute by a plane through its axis, and also cut by another plane cutting the base in a straight line perpendicular to the base of the axial triangle, and if further the diameter of the section is parallel to the side of the axial triangle, then any straight line which is drawn from the section of the cone to its diameter parallel to the common section of the cutting plane and of the cone's base, will equal in square the rectangle contained by the straight line cut off by it on the diameter beginning from the section's vertex and by another straight line which has the ratio to the straight line between the angle of the cone and the vertex of the section that the square on the base of the axial triangle has to the rectangle contained by the remaining two sides of triangle. And let such a section be called a parabola ($\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\alpha$)"* (Apollonius, 1952)

(C, II, 4): Cónicas, Libro II, Proposición 4. *"Given two straight lines containing and angle and a point within the angle, to describe through the point the section of a cone called hyperbola so that the given straight lines are its asymptotes"* (Apollonius, 1952)

Bibliografía

[1] BELL, Eric. *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica. México D.F., 2003. 656 pp.

[2] CAJORI, Florian. *A History of Mathematics*. Chelsea Publications Company. New York, 1985.

[3] COLLETTE, Jean-Paul. *Historia de las Matemáticas*. Traducción de Pilar González y Alfonso Casal. Siglo XXI de España Editores. Madrid, 1985

[4] EUCLIDES, Elementos. Vol.1: Libros 1-IV. Vol. 2: Libros V-IX. Vol. 3: Libros X-XIII. Traducción de Maria Luisa Puertas. Editorial Gredos, 1991 Great books of the Western World; v. 11: The thirteen books of Euclid's elements / Euclides; translated by Sir Thomas L. Heath ; The works of Archimedes including the method /Archimedes; translated by Sir Thomas L. Heath; On conic sections / by Apollonius of Perga; translated by R. Cotesby Taliaferro; Introduction to arithmetic / by Nichomachus of Gerasa; translated by Martín L. D'Ooge. Encyclopaedia Britannica, London, 1952.

[5] KLINE, Morris. *El Pensamiento Matemático De La Antigüedad A Nuestros Días*. Versión española de Mariano Martínez et al. Alianza Editorial, Madrid, 1992.

[6] MALISANI, Elsa. (1999). *Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del Pensamiento Algebraico. Visión Histórica*. Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencia de la Educación (IRICE). Argentina. No 13.

[7] MARTOS, Juan (2006). *Omar Jayyam, Astrónomo.* Departamento de Estudios Árabes e Islámicos, Universidad Complutense de Madrid. Consultado el 24 de Marzo de 2007 en: http://www.islamyal-andalus.org/cultura/indice.php

[8] MORENO, Ricardo. *Omar Jayyam. Poeta y Matemático.* Nivola Libros Ediciones. Madrid, 2002.

[9] PUIG, Luis. (2002) *Componentes para una Historia del Álgebra. El Texto de Al-khowarizmi Restaurado.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València.

[10] SOLAECHE, Cristina (2002). *Omar Khayyam: Mathematics, the Nothing, Wine, the Potter's Wheel and the Beloved One.* Divulgaciones Matemáticas Vol. 10 No. 1, pp. 79-83

[11] TARRES, Juan (2004). *La Matemática Arabe durante la Edad Media.* En: De Arquímedes A Leibniz. Tras Los Pasos Del Infinito Matemático Teológico, Físico Y Cosmológico. Gobierno de Canarias. Consejería de Educación, Cultura y Deportes Material editado por la Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa Consultado el 24 de marzo de 2007 en: http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/fundoro/pubactas.htm

[12] VASCO, Carlos. El Algebra Renacentista. Empresa Editorial Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 1985.