

DE QUÉ DEPENDE EL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL, UNA EXPERIENCIA DE INVESTIGACIÓN EN EL AULA

Pablo Andrés Nieto

*Estudiante Universidad
Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C, Colombia
hypatias21@hotmail.com*

Fabio Torres Zuñeda

*Estudiante Universidad
Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C, Colombia
fernadadueas@hotmail.com*

Orlando Lurduy Ortegón

*Profesor Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C, Colombia
jolurduy@udistrital.edu.co*

Resumen

En esta comunicación se presenta algunos desarrollos en la propuesta de investigación, detallando los elementos del enfoque teórico adoptado y su articulación con la REA en cuanto a las relaciones que se establecen entre el saber puesto en juego en el aula y el profesor, el estudiante y la valoración de los instrumentos en el proceso de enseñanza, todo esto desde el diseño del tetraedro Didáctico (Lurduy y otros, 2005). Se exponen a su vez parte de los instrumentos tenidos en cuenta para el análisis y recolección de dichas relaciones como una aproximación al momento lógico de la investigación.

Antecedentes y Referentes para el Análisis

En el marco de la investigación de REA, han surgido varios estudios en torno a la función lineal enmarcadas o dando posibles respuestas a los distintos componentes de un proceso de enseñanza-aprendizaje¹: profesor y entorno; la investigación surge de la necesidad de caracterizar el aspecto saber, debido a que no se tiene suficientemente caracterizada la ruta epistémica puesta en juego en esta secuencia de actividades. Dado esto surge la necesidad de caracterizar dicho objeto de acuerdo con la teoría TSS propuesta por Godino, el cual permite desarrollar una técnica analítica para determinar o caracterizar significados que se ponen en juego en la actividad matemática; para esto se necesita disponer de textos² con la planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de la clase, entrevistas y respuestas escritas a las actividades y pruebas aplicadas.

Enfoque de la Investigación

En trabajos anteriores, Godino y Batanero (1991,2006) han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran *un enfoque ontológico-semiótico* de la cognición e instrucción matemática, en el que se le asigna un papel central al lenguaje, a los procesos de comunicación e

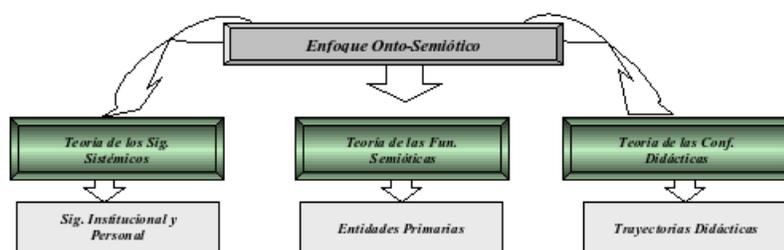
¹Secuencia de actividades de grado Noveno, diseñada desde la perspectiva de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986).

²Se toma la palabra texto como registros de las clases (protocolos, entrevistas, grabaciones, etc.).

interpretación y a la variedad de objetos que se ponen en juego en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Godino y Batanero, 1994; Godino 2002).

La motivación de estos autores para la elaboración de las nociones introducidas (significados institucionales y personales, entendidos, como sistemas de prácticas, objetos emergentes, dualidades cognitivas, función semiótica) fue progresar en la articulación de diversos modelos teóricos existentes en Didáctica de las Matemáticas, tales, como la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986, 1997), Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990), Teoría Antropológica (Chevallard, 1992, 1999).

Se presenta, así, a continuación el enfoque³ base para llevar a cabo la investigación, que se utiliza como referente base para realizar el análisis y caracterización del saber en la secuencia de actividades.



Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS)

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de situación-problemática, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, con el fin de hacer patente y operativo, por un lado, el triple carácter de la matemática a que hemos aludido, y por otro, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia.

Componentes del Enfoque Onto-Semiótico

■ **Situación-Problema**

Según Godino (2003), es cualquier tipo de circunstancia que precisa y pone en juego actividades de matematización (construir o buscar posibles soluciones que no son accesibles inmediatamente, inventar una simbolización para representar las situaciones y soluciones; y para comunicar, validar y justificar dichas soluciones).

■ **Sistemas de Prácticas Operativas y discursivas⁴**

Se considera Práctica Matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero,

³Se entiende por enfoque el desarrollo teórico con el cual se va a llevar a cabo la investigación.

⁴Toda práctica matemática está ligada a un campo o tipo de problema.

1994, p. 334). Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una institución⁵ está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento⁶.

Para estudiar los procesos cognitivos y didácticos se introducen dos unidades de análisis, denominadas *prácticas significativas* y *significado de un objeto*. Una práctica es significativa para una persona o institución (respectivamente) si desempeña una función en la resolución del problema, para comunicar, validar o extender la solución a otros contextos; el significado de un objeto emerge de los sistemas de prácticas significativas, y estos a su vez están asociados a un tipo o campo de problemas. Para el sistema de prácticas que realiza una persona (*significado personal*), o compartidas en el seno de una institución (*significado institucional*). Esta emergencia es progresiva a lo largo del tiempo, en un momento dado es reconocido como tal pero incluso después de esta etapa sufre transformaciones según se va ampliando el campo de problemas al cual está asociado.

Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales” mientras que si tales sistemas corresponden a una persona los consideramos como “objetos personales”.

■ Tipos de Significados Personales e Institucionales

La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados (los objetos matemáticos son entidades socialmente compartidas), entendidos como sistemas de prácticas lleva a introducir una tipología básica de significados, esencial en el análisis de la actividad matemática y los procesos de enseñanza y aprendizaje. Con relación a los significados institucionales proponen tener en cuenta los siguientes tipos:

<i>Implementado</i>	En un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas implementadas por el docente (<i>Guía del Estudiante</i>).
<i>Evaluado</i>	El subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes (<i>Niveles de Evaluación</i>).
<i>Pretendido</i>	Sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio (<i>Objetivos y Descripción de la Actividad</i>).
<i>Referencial</i>	Sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático (<i>Temática de la Actividad</i>).

Respecto de los significados personales proponen los siguientes tipos:

⁵La institución se concibe como “comunidades de prácticas”, e incluye, las culturas, grupos étnicos, y contextos socioculturales.

⁶Godino y Otros, 2006.

compuesto por entidades de los restantes tipos (un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos (Godino y Otros, 2006).

■ Análisis de Procesos de Instrucción Matemática

Para poder realizar un análisis de los procesos organizados de generación y comunicación de los conocimientos matemáticos en una institución escolar (*instrucción escolar* o proceso de estudio dirigido), en los que intervienen unos determinados sistemas de prácticas matemáticas (conocimientos institucionales), unos estudiantes (cuyo compromiso es la apropiación de dichas prácticas), el profesor o director del proceso y uso recursos o medios instruccionales; se identifican o esta comprendida por seis *dimensiones* que interactúan entre sí, con sus respectivos estados⁷ y trayectorias que han tenido lugar a lo largo del tiempo:

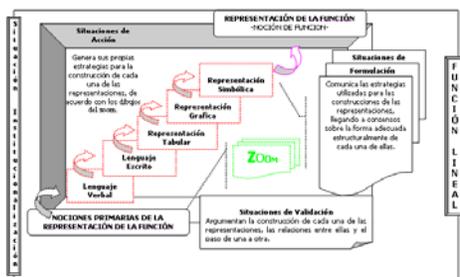
<i>Trayectoria epistémica</i>	Es la distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del significado institucional implementado. Estos componentes (problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades, argumentos) se van sucediendo en un cierto orden en el proceso de instrucción.
<i>Trayectoria docente</i>	Distribución de las tareas/acciones docentes a lo largo del proceso de instrucción.
<i>Trayectorias discentes</i>	Distribución de las acciones desempeñadas por los estudiantes (una para cada estudiante).
<i>Trayectoria mediacional</i>	Representa la distribución de los recursos tecnológicos utilizados (libros, apuntes, manipulativos, software, etc.).
<i>Trayectorias cognitivas</i>	Cronogénesis de los significados personales de los estudiantes.
<i>Trayectorias emocionales</i>	Distribución temporal de los estados emocionales (actitudes, valores, afectos y sentimientos) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

ANTECEDENTES TEMÁTICOS

Al hacer una revisión del currículo propuesto para desarrollar en la escuela (pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos), se evidencia la función lineal como una temática fundamental a abordar en la matemática escolar, y desde la exploración bibliográfica se muestra poca atención a este tipo de caracterización en este nivel educativo.

Suspe y Vega (2006) realizaron una investigación centrada en la valoración del papel de profesor en el diseño y gestión en el aula en la construcción de la noción de función lineal como dependencia, puntualizando en el quehacer docente frente a la planeación de actividades, la gestión en cada una de ellas y la evaluación que realiza en el proceso, a su vez destacan cada uno de estos, como los son: el diseño, la gestión y la evaluación de su quehacer; ampliando el conocimiento pedagógico del proceso de investigación en el aula de clase a partir de una secuencia de actividades en la temática de la función lineal y el uso de sus representaciones.

⁷Puesto que un proceso de instrucción tiene características no deterministas, existen elementos que producen cambios en las trayectorias, en otras palabras un caso posible.



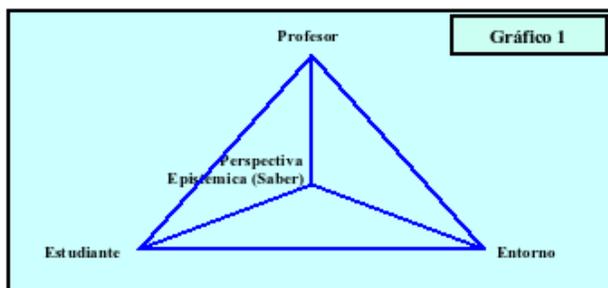
Método para la investigación

Se tiene en cuenta la investigación exploratoria-descriptiva como base para llevar a cabo la descripción, caracterización y valoración de la ruta Epistémica en torno al trabajo con la función lineal sustentándose en la situación problema del Zoom, desde un enfoque teórico, que, no reporta desde la educación básica este tipo de trabajos y a su vez desde la misma exploración de los instrumentos de análisis con los cuales se busca llevar a cabo dicha descripción.

Elementos para el Análisis Cualitativo del Saber

Con la realización de los instrumentos de análisis para la caracterización de la Trayectoria Epistémica se busca tener una descripción más fina de los elementos que componen o caracterizan los objetos matemáticos Función Lineal, para esto es necesario comenzar una identificación de las relaciones existentes en El Tetraedro Didáctico⁸.

En Lurduy (2005), como herramienta para dicha investigación usan el sistema didáctico⁹ para el análisis de procesos de enseñanza-aprendizaje (Gráfico 1), donde se caracteriza cada uno de los componentes que hacen parte de dicho sistema, encontrando que esta constituido por el componente didáctico que se refiere a las acciones propias del profesor, el componente cognitivo alusivo al estudiante, el componente ecológico que concierne a las interacciones y ambientes de aprendizaje y el componente epistémico entendido como el saber puesto en juego en el aula, al adoptar esta herramienta para la caracterización del saber y al tratar de describir las interacciones que se presentan con este (saber- profesor, saber-estudiante, saber- entorno), surge la necesidad de abordar diferentes perspectivas teóricas para dicho proceso.



Para describir la relación Saber-Profesor y Saber-Estudiante se tienen en cuenta la Faceta Ins-

⁸Tetraedro didáctico. Rutas de Estudio y aprendizaje del aula. Primera aproximación a su estudio, para el caso de las matemáticas. UDFJC. (Lurduy y otros 2005).

⁹Elaborado y trabajado por distintos didáctas Franceses

titucional y Personal del significado de los objetos matemáticos¹⁰ aceptando “la concepción pragmática y relativista de las matemáticas” (Godino, 1996), y para la relación saber-entorno se tiene en cuenta la mediación existente entre lo Institucional y lo Personal de acuerdo con La Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986); pero para un análisis más fino de objeto matemático en cada secuencia es necesario implementar las Entidades Primarias de los Objetos Matemáticos en cada uno de los instrumentos realizados, “para con ellas describir configuraciones definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas de un objeto matemático”. Godino (2001).

Según Godino (2003), “*la distinción entre persona e institución es esencial en el análisis de la actividad matemática y los procesos de enseñanza y aprendizaje*”, por ello la faceta dual Institucional y personal del conocimiento sirve como punto de partida cuando se centra un interés de analizar al sujeto individual (estudiante) o al igual al analizar textos utilizados como referencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje (profesor). Esta descripción de lo ocurrido entre profesor y los estudiantes en el aula parte de la interpretación de situaciones comunicativas de donde se busca el significado de los términos y expresiones matemáticas.

Para poder describir los “elementos” puestos en juego ante una actividad matemática Godino introduce una tipología de objetos matemáticos primarios: Lenguaje, Situaciones - Problemas, conceptos-Definición, Proposiciones, Procedimientos, Argumentos¹¹, como describe él, desde los cuales se pueden describir los diferentes tipos de prácticas y acciones implementadas o realizadas en dicha actividad, todo esto bajo un lenguaje simbólico específico con un sistema conceptual lógicamente organizado.

Algunos de los Componentes de la Guía del Profesor

Para la recolección y caracterización de la relación Saber-Profesor se tienen en cuenta algunos componentes que conforman toda la parte del diseño de la actividad, esto con el propósito de dar cuenta de cada uno de los momentos del saber puesto en juego desde un punto de vista matemático, curricular, guía del estudiante y la evaluación de la misma:

- **Marco Teórico**

En la guía del profesor este apartado se centra específicamente en los componentes de tipo matemático que se involucran en la actividad, detallando y especificando de una manera precisa cuales aspectos de todos los desarrollos de tipo matemático del objeto matemático puesto en juego involucran específicamente en la actividad.

- **Marco Curricular**

Se tiene en cuenta en este apartado las diferentes descripciones que a nivel legal se establecen para el grado específico de intervención y la temática misma. Se toman entonces como base los lineamientos curriculares que permiten ubicar el tipo de pensamiento a desarrollar y los estándares que colocan en evidencia los diferentes aspectos que a nivel temático se pueden desarrollar de acuerdo al grado específico en donde se lleva a cabo la intervención.

¹⁰Teoría De Las Funciones Semióticas. Godino, J.D. (2003).

¹¹Teoría de las funciones Semióticas, capítulo 4. p.p (105-118).

■ Objetivos

Los objetivos permiten tener claro las razones y las necesidades de llevar a cabo la intervención y a su vez muestran de alguna manera los propósitos y específicamente el lugar hacia donde se quiere que los estudiantes logren durante y luego de la intervención en cuanto a su desempeño y desarrollo de pensamiento matemático.

■ Guía del Estudiante

En esta guía se colocan todas las actividades y momentos en los que tienen que intervenir los estudiantes con el fin de que estos se manifiesten a la misma y por medio de esta puedan justificar su accionar frente al objeto matemático puesto en juego en la misma.

■ Niveles de Evaluación

Con los niveles de evaluación se busca tener una visión global de cómo fue el accionar de los estudiantes durante la ejecución de la actividad y poder de alguna manera sacar conclusiones frente al diseño de la actividad misma y verificar el nivel de proximidad que los estudiantes tuvieron con el objeto matemático puesto en juego.

Instrumento de Caracterización

El instrumento encaminado a caracterizar la relación del Saber con el profesor: describiendo el proceso que sufre el saber por parte del profesor en el momento del diseño de una actividad. Este instrumento propicia la necesidad de describir de una mejor manera cada uno de los componentes del objeto matemático en cada una de las actividades planteadas que a su vez permiten una mejor apropiación del saber puesto en juego en el aula, y en términos de Godino (2003) caracterizar el aprendizaje como un “acoplamiento progresivo” entre significados personales e institucionales, describiendo las dificultades y obstáculos que se presentan en dicho proceso.

<i>Categorías</i>	<i>Subcategorías</i>	<i>Elementos para Analizar</i>	<i>Componentes</i>
<i>Saber: Profesor Estudiante</i>	<i>Tipos de Significados</i>	<i>Elementos de Significado</i>	<i>Algunas facetas Duales</i>

Pasos para el análisis

Selección de texto: Para el análisis de la información recolectada se parte de seleccionar y detallar los Textos¹² (tanto los recogidos con los instrumentos como los que hacen parte de la actividad a analizar) que van a ser caracterizados, esta selección parte de la descripción y división que realizamos de las categorías establecidas: Institucional (textos en los que interviene el profesor) y Personal (textos representativos del accionar de los estudiantes ante el objeto matemático).

Segmentación de los Textos que se va analizar en “Unidades de Análisis”:

Los Textos se caracterizaran con los instrumentos especificados anteriormente, esto se hace mediante un análisis de los Textos con el primer instrumento que en otras palabras es caracterizar

¹²Para describir lo que designamos por este termino, partimos de la noción de juegos del lenguaje (Baker y Hacke, citados por Godino, 2003) como “cualquier fragmento de nuestras prácticas lingüísticas efectivamente realizadas”, entonces en términos de un “proceso de instrucción” son situaciones comunicativas específicas realizadas, en las que se pueden identificar el significado en uso de expresiones y términos matemáticos; como las intervenciones comunicativas de una clase, un fragmento de un texto, grabaciones, protocolos, guías de trabajo, etc.

a que subcategoría pertenece. De acuerdo a está, a cada Subcategoría y a los respectivos Textos que la componen se hace una segunda delimitación o puntualización de la parte del Texto en la cual se puede identificar el significado en uso de un objeto matemático. Esta clasificación se llamo “Unidades de Análisis”; son fracciones del Texto en la que se puede ver o identificar significados en uso de expresiones y términos matemáticos relacionados entre si y con el objeto matemático investigado.

Caracterización con los Instrumentos específicos:

El tercer paso es la caracterización de la Unidades de Análisis y en consecuencia de los Textos con los “Instrumentos de Caracterización”, lo cual es, identificar el significado en juego de términos y expresiones matemáticas de acuerdo a los de elemento de significado. Esta caracterización depende o se centra en el objeto matemático indagado, buscando en términos pragmatista el significado del objeto, que en palabras de Godino (2006) el significado de un objeto matemático se debe entender en términos de lo que se puede hacer con dicho objeto matemático. A continuación se presenta un análisis desde el punto de vista del profesor (Institucional), en un esquema tomado a partir de algunas configuraciones epistémicas que Godino (2006) elabora a partir de análisis de algunos textos escolares.

Caracterización de lo Referencial

En el marco de referencia acudido puede verse nutrido en varios aspectos como son las Acciones, Conceptos y Proposiciones, pero se hace evidente la falta de una caracterización al tipo de problemas en los cuales interviene o modelan la Función Lineal, esto debido a que los explicitados en este sirven para todas las clases de Función.

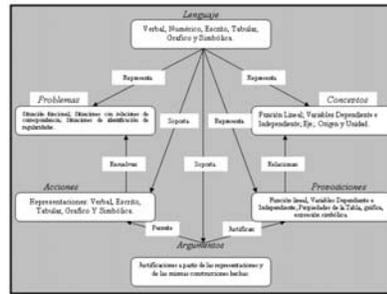


Caracterización de lo Pretendido

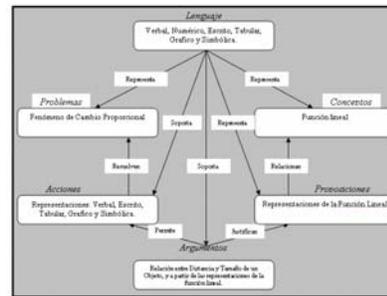
Como se esta analizando las pautas curriculares para la Función Lineal en un nivel de estudio básico, se puede evidenciar una gama más explícita de los tipos de problemas con los cuales se puede construir este concepto todo esto partiendo y teniendo en cuenta sus representaciones. Se parte del concepto de función lineal y de los conceptos que lo componen para después entender el de Función, los argumentos esperados son solo a partir de las representaciones y de las acciones frente al tipo de problema. A pesar de tomar a la identificación de regularidades como un tipo de problema no se hace alusión de el como una acción ante este tipo de situación.

Caracterización de lo Implementado

En la actividad solo se abordada un tipo de problema, centrando la atención a la Función Lineal y a sus representaciones, tomándolas como acciones y parte de las justificaciones. Aunque para

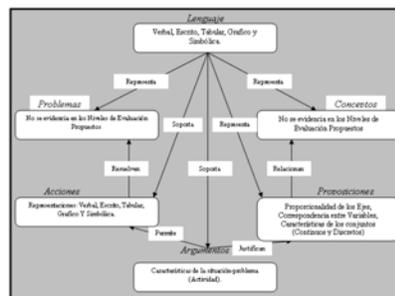


la realización de la Grafica Cartesiana se necesita la identificación del Dominio y del Rango de la función esto no es tomado como una acción.



Caracterización de lo Evaluado

Como la actividad se enmarca en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau y más específicamente en las situaciones de validación, en lo Evaluado se espera evidenciar “conceptos” adquiridos en las actividades previas. También se hace evidente que se evaluara el concepto de función lineal de acuerdo al manejo y uso de sus representaciones.



Reflexión

El realizar la caracterización del Objeto Matemático (función lineal) en la educación básica, desde el enfoque descrito, permite una amplia comprensión de los elementos que nutren, complementan y conforman dicho objeto dependiendo de la práctica a la que se le asocie. El establecimiento de textos y su respectiva descomposición en unidades de análisis permite observar de manera más puntual y específica cada uno de los elementos que emergen al llevar a caso la caracterización del objeto puesto en juego que en este caso era la función lineal y sus representaciones, visto este desde el punto de vista institucional y de manera mas puntual en la fase pretendida, que

involucraba dentro de una secuencia de actividades los objetivos previos y de la misma actividad a desarrollar.

El instrumento previsto también permite identificar cada uno de los componentes que se ponen en evidencia al llevar cabo la caracterización evidenciando una ruta del saber y su recorrido por la planificación, a su vez las fichas del curso permitieron tomar muchos elementos que se convirtieron en guía para determinar la selección de los textos y su descomposición en unidades de análisis soportado desde la teoría y trabajos desarrollados por Godino y otros autores.

Bibliografía

- [1] GODINO, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. [[Http://www.ugr.es/local/jgodino](http://www.ugr.es/local/jgodino)].
- [2] GODINO, J.D. (1993). *La Metáfora De La Ecología En El Estudio De La Noofesra Matemática*. *Revista Cuadrante*. Vol 2, No.2, pp. 69-79.
- [3] GODINO, J.D. y Batanero, C. (1998). *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.
- [4] LURDUY y Otros (2005). *Rutas de Estudio y aprendizaje del aula. Primera aproximación a su estudio, para el caso de las matemáticas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- [5] SUSPE y VEGA. (2006). *Reflexión, indagación y valoración del papel del profesor en el diseño y gestión en el aula. Construcción de la noción de función lineal como dependencia, a través del uso de sus representaciones grado noveno*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- [6] AZCÁRATE, C Y otros. (1996). *Funciones y Gráficas*. Editorial Síntesis. Octubre.
- [7] GARCÍA, G Y otros. (1997). *Cuadernillo didáctico. Hacia la noción de función como dependencia*. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.
- [8] RUIZ HIGUERAS, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Universidad de Jaén. Jaén.