¿A.B=0 $\Rightarrow$ A=0 v B=0? REFLEXIONES E IMPLICACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA[1]

Cristina Ochoviet, Asuman Oktaç
Instituto de Profesores Artigas, CINVESTAV- IPN
Montevideo – Uruguay, México D.F. - México
princesa@adinet.com.uy, oktac@cinvestav.mx

Campo de investigación: Pensamiento algebraico ; Nivel educativo: Básico, Medio y Superior

Resumen

Reportamos una investigación sobre Pensamiento Algebraico realizada en Uruguay, con estudiantes de 3er. año del Ciclo Básico de enseñanza secundaria (14-15 años), 6º año de bachillerato de enseñanza secundaria (16-17 años) y 3er. año de profesorado de Matemática (mayores de 21 años con edades variadas), en torno a la propiedad cuyo enunciado dice: "Si a y b son números reales y a.b=0, entonces a=0 o b=0" y que en Uruguay es frecuentemente conocida como propiedad Hankeliana.

Estudios exploratorios y determinación de objetivos

Los estudios exploratorios revelaron que los estudiantes de bachillerato y también los de nivel terciario muestran cierta tendencia a generalizar la propiedad Hankeliana de los números reales a otras estructuras algebraicas donde esta propiedad no es siempre válida, aun cuando hubieran recibido instrucción específica al respecto.
También observamos que cuando los estudiantes de secundaria deben resolver ecuaciones en R como por ejemplo $(2x\text{-}6)(5x+10)=0$, no siempre aplican la propiedad, aun cuando sea la única herramienta disponible y hayan recibido instrucción sobre su aplicación a la resolución de ecuaciones donde aparecen expresiones polinómicas factorizadas e igualadas a cero.
Asimismo detectamos un error que los estudiantes cometen al momento de verificar las raíces de una ecuación de esta forma. Ejemplificaremos tomando la ecuación presentada más arriba. Si los estudiantes determinaron las raíces 3 y -2, es frecuente que verifiquen sustituyendo la x del primer factor por 3 y la x del segundo factor por -2. El error consiste entonces en la asignación de dos valores distintos a la incógnita en forma simultánea.

No tenemos conocimiento de trabajos previos que atiendan la problemática que nos proponemos estudiar, y dada su importancia, debido a su extensivo uso en la enseñanza, consideramos que dar una explicación a las posibles causas de los errores que cometen los estudiantes alrededor de la propiedad, por un lado nos sensibiliza hacia posibles caminos a tomar como docentes, y por otro lado contribuye a la disciplina dentro de la línea de investigación del Pensamiento Algebraico.

Fijamos entonces los siguientes objetivos para el trabajo de investigación:

- Observar las estrategias que utilizan los estudiantes que conocen la propiedad Hankeliana de los números reales cuando se enfrentan a la resolución de ecuaciones donde aparecen expresiones polinómicas factorizadas e igualadas a cero, poniendo

[1] Este trabajo forma parte del proyecto Conacyt 2002-C01-41726.

atención en los alumnos que conociendo la propiedad y constituyendo esta la única herramienta de resolución de estas ecuaciones[2], no la aplican.

- Examinar el error que cometen los estudiantes cuando sustituyen a la incógnita por dos valores distintos en forma simultánea, al verificar las raíces en una ecuación donde aparece una expresión polinómica factorizada e igualada a cero y formular posibles explicaciones del mismo.
- Buscar elementos para destacar, en relación a los estudiantes que generalizan la propiedad Hankeliana de los números reales a otras estructuras algebraicas donde no es válida, aun cuando hayan recibido instrucción específica al respecto y observar cómo evoluciona la ampliación del repertorio de objetos matemáticos que los estudiantes interpretan cuando ven a y b en la expresión $a.b=0$, a lo largo de los años de instrucción.

Consideraciones teóricas

El análisis teórico se organizó en base a tres componentes: la epistemológica, la didáctica y la cognitiva. Esto nos permitió tres dimensiones para la reflexión y el análisis de los fenómenos que observamos, y por tanto, una visión compleja, y si se quiere sistémica, de la problemática estudiada.

La dimensión epistemológica permite conocer los obstáculos que enfrentaron los hombres a lo largo de la historia en la construcción de los significados y conceptos matemáticos; conocerlos en profundidad nos brinda información acerca de los posibles obstáculos y dificultades que pueden enfrentar los estudiantes cuando deben abordar tales conceptos. Es por esto que decidimos dar una mirada histórica a lo que fue la evolución del álgebra en la rama de la resolución de ecuaciones, hasta llegar a las ecuaciones donde aparecen expresiones polinómicas factorizadas e igualadas a cero, para luego situarnos brevemente en la aparición de álgebras abstractas con y sin divisores de cero. Este trabajo tomó la historia como fuente para obtener posibles interpretaciones del trabajo que realizan los alumnos.

En la componente didáctica analizamos el estado actual de la enseñanza en relación a los tópicos en los que nos hemos concentrado para tener un panorama claro de lo que ilustran los libros de texto de los estudiantes en relación al tema.
En Uruguay solamente el 13,5 % de los profesores de matemática que dan clase poseen título habilitante. Por lo tanto, consideramos que los libros de texto constituyen un reflejo de las prácticas de aula ya que son el principal punto de referencia de los profesores que no han completado su formación inicial como docentes o que ni siquiera han pasado por ella. Estos textos entonces, nos permiten de alguna forma, introducirnos en las prácticas de aula y tener una noción de qué se enseña y cómo se enseña. También nos brindan información acerca del discurso docente y los posibles enfoques didácticos de los temas.

La componente epistemológica y la didáctica también aparecen interrelacionadas en la reflexión. El estudio de cómo surgen las ecuaciones a lo largo de la historia, a qué tipo de problemas prácticos responden y qué tipo de herramientas fueron utilizadas para resolverlas, permiten realizar una comparación con las prácticas de aula. Es decir, cómo

[2] Cuando decimos que la aplicación de la propiedad es la única herramienta con la que cuentan los estudiantes es porque todavía no han estudiado la conocida fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado.

se presentan actualmente las ecuaciones, a qué tipo de problemas dan solución y qué tipo de herramientas se usan para resolverlas. Hemos observado que las prácticas de aula no reflejan necesariamente las condiciones históricas. En el caso de las ecuaciones en las que nos hemos concentrado[3], podríamos decir que la principal actividad de aula que aparece ligada a ellas es la resolución de las mismas a través de la aplicación de la propiedad Hankeliana, es decir, se da una ecuación donde aparece una expresión polinómica factorizada e igualada a cero y se pide hallar sus raíces. Pero históricamente, parecería que la factorización es utilizada como una herramienta para poder determinar una ecuación con raíces dadas, cuestión que hoy en día no aparece prácticamente en las actividades que se desarrollan en el aula. Quizás realizar los dos procesos: construir una ecuación conociendo sus raíces usando la factorización y hallar las raíces de una ecuación que está dada en forma factorizada, deban ser tratadas en el aula para que los estudiantes logren una mejor comprensión de lo que significa resolver una ecuación y cuál es el papel de la incógnita en ellas.

En la componente cognitiva se incluyen diversos aspectos teóricos que fueron elegidos para dar interpretación al pensamiento de los estudiantes. Abordamos diversos marcos teóricos, pero nos centramos en la noción de *Imagen conceptual* presentada en (Vinner, 1991), en el concepto de *compartimentalización* (Vinner, 1990), en la *Teoría de la Intuición* (Fischbein, 1987) en general y en la noción de *Autonomía de los modelos mentales* presentada en (Fischbein, Tirosh, Stavy & Oster, 1990) en particular, para formular posibles explicaciones a los fenómenos que estamos estudiando. Como marco teórico específico del pensamiento algebraico usamos el *Modelo 3 UV* presentado por Trigueros y Ursini (2003).
La inclusión de estas consideraciones teóricas se fundamenta en la necesidad de poseer una perspectiva de análisis amplia para interpretar y explicar la problemática que se estudia, la cual no ha sido previamente abordada.

Principales resultados

Un porcentaje pequeño de los estudiantes de 14-15 años logra resolver la ecuación propuesta, igualando cada uno de los factores a cero para hallar las raíces. Estos estudiantes que logran resolver la ecuación en forma exitosa pueden formular una explicación para lo que están haciendo, dentro de algún campo semántico, ya sea matemáticamente correcta o no. Sin embargo la mayoría de los estudiantes de esta edad aplican la propiedad distributiva para luego tratar de aplicar las técnicas conocidas por ellos para resolver ecuaciones de primer grado. La mayoría no obtiene éxito en su tarea debido a la complejidad de la ecuación que obtienen pues no poseen recursos como la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado para poder resolverla[4].
Observamos que estos estudiantes optan por emplear un proceso algorítmico que involucre cierta operatoria para resolver una ecuación polinómica de este tipo. En algunos casos esto podría deberse a que la matemática es enseñada como un conjunto de reglas o procedimientos a emplear, según sea el caso. Cuando el estudiante se enfrenta a una situación que no le es familiar, seguramente tratará de aplicar cierta algoritmia según las herramientas que disponga. En las entrevistas algunos estudiantes manifestaron que hubieran podido dar solución al problema mentalmente pero parecería que esto no los satisface ya que no han ensayado ningún procedimiento algorítmico para

[3] Recordamos que son de la forma $(ax+b)(cx+d)=0$ en el caso en que tienen dos raíces reales y distintas.
[4] Los estudiantes de este nivel no han estudiado todavía la fórmula.

resolverlo. Observamos entonces, cierta preferencia por trabajar con la expresión polinómica desarrollada.

Frente a la primera ecuación la mayoría de los alumnos de bachillerato aplican la fórmula cuadrática aunque a lo largo de su tarea algunos cambian de estrategia, fundamentalmente en las ecuaciones de la forma $x(ax+b)=0$, seguramente por la presencia del factor x, aunque igualmente se aprecia una tendencia a la algoritmización dado que algunos alumnos desarrollan la expresión para luego factorizarla y dejarla tal como se les presentó para luego iniciar el proceso de resolución. Los estudiantes de bachillerato no valoran la aplicación de la propiedad como un procedimiento más sencillo, de forma que aunque sabiendo de su posible aplicación, optan por la aplicación de la fórmula resolvente. Algunos alumnos de bachillerato que aplican la propiedad Hankeliana para resolver la ecuación, lo hacen porque sus profesores le han enseñado que "*así se hace*" o "*porque me lo enseñaron así*" (como ellos mismos lo explicitaron) y no siempre pueden elaborar una explicación para lo que están haciendo.

Los estudiantes de nivel terciario son los que han generado una autonomía suficiente como para decidir y elegir qué herramienta les conviene usar según la situación a la que se enfrenten. La herramienta óptima sería la más económica al nivel de la algoritmia involucrada y consideran que es la más sencilla de aplicar.

A partir de las evidencias obtenidas en el estudio que hicimos, parecería que los docentes realizan más énfasis en cómo se resuelve una ecuación que en por qué puede hacerse de una u otra forma. Pensamos que antes de que al alumno de Ciclo Básico se le enseñe a aplicar la propiedad Hankeliana, se le debería enfrentar a la ecuación de segundo grado factorizada para que intente ensayar diversos procedimientos *sui generis* para despejar la incógnita, que en la mayoría de los casos le resultarán ineficaces. De esta forma, quizás pueda valorar la herramienta que se desea enseñar y pueda ver que no siempre es necesario realizar una larga secuencia de operaciones para poder resolver una ecuación, que es lo que ellos esperan.

Por lo que hemos visto, presentarle una ecuación a un estudiante y enseñarle a resolverla, no representa un aprendizaje, aun cuando a corto plazo demuestre saber aplicar la técnica que le hemos mostrado. Los aprendizajes duraderos parecerían ser lo que están cargados de significado y no los que contienen solamente un conjunto de procedimientos o reglas. Podemos decir que los alumnos construyen imágenes conceptuales más ricas si éstas contienen algún significado asociado al concepto. Si enseñamos una regla, vacía de significado, el estudiante podrá recordar quizás sus características sintácticas y tal vez pueda también enunciarla, pero no siempre podrá evocarla y aplicarla para resolver una situación, ya que no posee significados que le permitan reconocer en la situación que debe resolver su aplicabilidad.

Pasemos ahora al análisis del error en el que nos hemos centrado. En un principio supusimos que este error estaba directamente relacionado con la aplicación de la propiedad Hankeliana pues el alumno podría estar viendo que la ecuación de segundo grado se fragmenta en dos de primer grado. Algunos alumnos manifestaron en la entrevista confusión acerca de si la ecuación dada era de segundo grado o si se trataba de dos de primer grado. Esto podría estar llevando a los estudiantes a realizar la verificación de forma incorrecta.

Luego vimos que el error también se hacía presente cuando eran utilizadas otras estrategias para la resolución de la ecuación como la aplicación de la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado. En este sentido, detectamos que si bien los estudiantes explicitan que para que un producto sea cero uno u otro de los factores debe ser cero, parecería existir una fuerte creencia de que ambos factores deben ser cero simultáneamente. Esta situación que consideramos de orden intuitivo podría estar influenciando el funcionamiento de la variable en el álgebra.

La problemática que estudiamos superó ampliamente el ámbito de las expresiones polinómicas que se presentaban factorizadas cuando detectamos que los estudiantes avalaban la ocurrencia simultánea de valores distintos para la incógnita en ecuaciones que involucraban expresiones polinómicas desarrolladas. Pudimos apreciar en las entrevistas realizadas a los estudiantes que otro problema podría estar influenciando en la incorrecta realización de la verificación de la ecuación: un problema de orden lógico. Con esto nos referimos a que si las raíces son 4 y 3, parecería que las dos deben estar presentes en la ecuación al momento de realizar la verificación. Es decir que, la condición $x=3$ o $x=4$, que es la que admite el funcionamiento algebraico estaría entrando en conflicto con la expresión "las raíces de la ecuación son 3 y 4", aun cuando esto no sea consciente por parte de los estudiantes.

Para explorar la generalización incorrecta de la propiedad formulamos a los estudiantes preguntas como:

- ✓ *Se sabe que b. c=0. ¿Qué puedes deducir sobre b y c a partir de esta información? ¿Qué representan para ti b y c?*

- ✓ *f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?*

- ✓ *D y B son dos matrices. Se sabe que D.B=0, es decir que el producto de ambas matrices es la matriz nula. ¿Qué puedes deducir sobre las matrices D y B a partir de esta información?*

En el caso de los estudiantes de bachillerato, varios de ellos contestaron pensando en la propiedad de absorción, es decir, si uno de los dos factores es cero, el producto lo será. Si bien este razonamiento es válido, no siempre permite obtener todas las posibilidades para los factores involucrados ya que si la estructura tiene divisores de cero, hay otras opciones. En el caso de los estudiantes de nivel terciario, la presencia de la propiedad Hankeliana es más fuerte y clara. En las entrevistas hicieron explícito que cuando dieron esa respuesta (uno u otro factor es nulo) pensaron en dicha propiedad en el conjunto de lo números reales. En estos estudiantes esa propiedad aparece sumamente arraigada a la experiencia, en el sentido de que tratan de aplicarla siempre que sea posible, factorizando en forma conveniente.

Además de la experiencia consideramos que la generalización incorrecta de la propiedad sería favorecido por los textos de estudio del alumno, que en general enuncian la regla $a.b=0 \Rightarrow a=0$ *o* $b=0$, sin especificar qué representan a y b, sin tener en cuenta que su validez no es universal. Esto podría llevar a los estudiantes a consolidar un modelo de pensamiento que no incluye la naturaleza de los objetos a y b, fijando la atención en la sintaxis de la redacción, según lo reportan English y Halford (1995) cuando nos hablan de que los estudiantes generan frecuentemente reglas prototípicas basadas en las características externas de índole sintáctico que hacen a la redacción de una propiedad. Aunque en nuestro trabajo esto no tiene la fuerza de una conclusión, pensamos que las características sintácticas del enunciado favorecerían la aplicación de la misma por parte de los estudiantes. Mientras que el objeto matemático va cambiando, las características sintáctico visuales permanecen prácticamente incambiadas. Las prácticas docentes contribuyen con esto manteniendo ausente la explicitación de los objetos matemáticos.

Se aplicó una misma secuencia de actividades sobre clases residuales módulo 6, a estudiantes de 3º año de Ciclo Básico (14-15) años y a estudiantes de 6º año de bachillerato (17-18 años). En ella, se enfrentaron a la existencia de una estructura con divisores de cero. Ninguno de los dos grupos tenía experiencia previa con el tema. Cuando se preguntó a los estudiantes qué podían decir acerca de un producto de dos factores que en esta estructura es nulo los estudiantes más pequeños incorporaron la existencia de divisores de cero en su respuesta, mientras que la mayoría de los estudiantes de bachillerato restringieron su respuesta a la idea de que uno u otro de los factores era cero. Los estudiantes más pequeños demostraron un pensamiento más versátil que los de bachillerato. Quizás porque la experiencia con estructuras sin divisores de cero todavía no ha incidido demasiado en la consolidación de esquemas estables.

Como sugerencia didáctica planteamos la posibilidad de que el estudio del álgebra no sólo se inicie a partir de las operaciones aritméticas y sus propiedades, sino también poniendo en contacto al alumno con otras estructuras que estén a su alcance y que le ofrezcan una visión más amplia de las propiedades algebraicas, en todos los sentidos. De esta forma creemos que se minimizarían los obstáculos para que en un futuro el estudiante pueda conceptualizar estructuras más abstractas o más generales.

Referencias bibliográficas:

English, L. y Halford, G. (1995). *Mathematics Education. Models and Processes*. Mahwah, New jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*. Dordretch: D. Reidel Publishing Company.

Fischbein, E. Tirosh, D., Stavy, R. & Oster, A.(1990). *The Autonomy of Mental Models*. For the Learning of Mathematics, 10, pp. 23-30.

Trigueros, M. y Ursini, S. (2003). *"First-year Undergraduates´ Difficulties in Working with Different Uses of Variable"*, en CBMS, Research in Collegiate Mathematics Education, Vol. 12, pp. 1-29.

Vinner, S. (1991). *The role of definitions in teaching and learning*. En Tall, D. (ed) Advanced Mathematical Thinking. Kluwer. Dordretch/Boston/London. Pp. 65-81.

Vinner, S. (1990). *Inconsistencies: Their Causes and Function in Learning Mathematics*. Focus on Learning Problems in Mathematics, 12 (3 & 4), pp. 85-98.