# PROPUESTA DIDÁCTICA SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE LA RECTA TANGENTE SIN EL USO DE LA DERIVADA

Oleksandr Karelin, Carlos Rondero Guerrero, Anna Tarasenko
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México
skarelin@uaeh.reduaeh.mx rondero@uaeh.reduaeh.mx anataras@uaeh.reduaeh.mx
Campo: Gráficas y funciones- Pensamiento matemático avanzado; Nivel Educativo: Medio y Superior

**Resumen**

El trabajo contiene resultados sobre la construcción de la recta tangente para las funciones elementales sin derivar así como para las funciones formadas por operaciones lineales y aritméticas entre ellas. Dentro del estudio de las nociones fundamentales del cálculo, se consideran: crecimiento, decrecimiento, puntos mínimos y máximos, concavidad y conexiones entre si. En base de estas relaciones se presentó, en trabajos previos, un enfoque no tradicional acerca de la construcción de la recta tangente. Para ello dicho problema se redujo a la búsqueda de puntos extremos de una función adicional que está conectada con la función inicial.

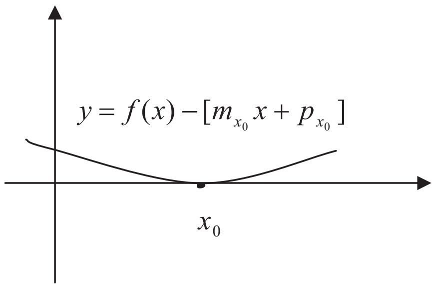
La propuesta didáctica que se ha venido estructurando, posibilita el entender más profundamente las nociones fundamentales del cálculo y sus articulaciones entre sí y está dirigida a los profesores y estudiantes de matemáticas de los niveles educativos medio superior y superior.

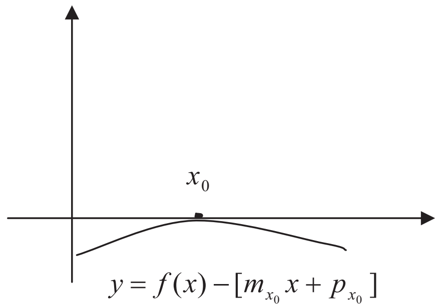
**Relación entre la recta tangente en un punto de una función y los puntos extremos de una función adicional**

Se parte del esquema general acerca de la construcción de la recta tangente que fue presentada en [1].
Se consideran las funciones $y = y(x)$ para las cuales en cada punto $(x_0, y_0)$ de su gráfica $L: \{(x, y(x))\}$ existe una y sólo una recta $R(x_0, y_0)$: $y = m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}$, que pasa por el punto $(x_0, y_0)$, no tiene otros puntos comunes con la gráfica $L$ en una vecindad de $(x_0, y_0)$ y está ubicada por arriba o por debajo de la recta $R(x_0, y_0)$. La clase de tales funciones se denota por $C$ y la clase de rectas para la función $y = f(x)$, se denota por $T(f)$.
Afirmación 1.
Se escoge una función $y = f(x)$ de la clase $C$ y un punto $(x_0, y_0)$, $y_0 = f(x_0)$.
Una recta $R(x_0, y_0): y = m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}$ es una recta de la clase $T(f)$ en el punto $(x_0, y_0)$ para $y = f(x)$ si y sólo si la función adicional $y = F(x)$, $F(x) = f(x) - [m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}]$ tiene su punto mínimo ó punto máximo en $x_o$.

Si en el punto $x_o$, hay un mínimo para $y = F(x)$, entonces se cumple la desigualdad
(*) $F(x) \geq F(x_0)$ ó $f(x) - [m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}] \geq f(x_0) - [m_{x_0} \cdot x_0 + p_{x_0}]$.

Una recta $R(x_0, y_0): y = m_{x_0} \cdot x + b_{x_0}$ es de clase $T(f)$ en el punto $(x_0, y_0)$ para $y = f(x)$ si y sólo si la desigualdad (*) se cumple en una vecindad de $x_o$.
Si en el punto $x_o$, hay un máximo para $y = F(x)$, entonces se cumple la desigualdad
(**) $F(x) \leq F(x_0)$ ó $f(x) - [m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}] \leq f(x_0) - [m_{x_0} \cdot x_0 + p_{x_0}]$.
Una recta $R(x_0, y_0): y = m_{x_0} \cdot x + b_{x_0}$ es de clase $T(f)$ en el punto $(x_0, y_0)$ para $y = f(x)$ si y sólo si la desigualdad (**) se cumple en una vecindad de $x_o$.
Las gráficas que ilustran ambos casos son:




Para construir $R(x_0, y_0): y = m_{x_0} \cdot x + b_{x_0}$ es necesario hallar $m_{x_0}$ de (*) ó de (**) y calcular $p_{x_0}$ por la fórmula $p_{x_0} = f(x_0) - m_{x_0} x_0$ . Si $m_{x_0}$ es un número tal que las desigualdades (*) ó (**) se cumplen en una vecindad de $x_0$, entonces, hay un mínimo ó máximo para $y = F(x)$ en $x_o$ y $m_{x_0}$ es la pendiente de la recta $R(x_0, y_0)$ .

Usando esta conexión entre los puntos mínimos y máximos se propone hallar la recta tangente de las graficas de algunas funciones simples sin derivar. En trabajos anteriores se presentaron las construcciones respectivas de las ecuaciones de rectas tangentes para polinomios, funciones raíces y funciones trigonométricas. Ahora la investigación sobre funciones elementales se complementa presentando la construcción de la recta tangente para funciones exponenciales y logarítmicas. Se obtienen las ecuaciones de las rectas tangentes para tales funciones, a través de operaciones aritméticas entre ellas.

**Recta tangente para la función exponencial sin derivar**

Hallar la ecuación de la recta tangente $R(x_0, y_0) = m_{x_0} x + p_{x_0}$ que pasa por el punto $(x_0, y_0)$, de la gráfica de la función exponencial $y = e^x$, donde $y_0 = e^{x_0}$. Sea $x_0 > 0$, la función adicional se estructura nuevamente, $F(x) = e^x - [m_{x_0} x + p_{x_0}] = e^x - m_{x_0} x - p_{x_0}$.
Según la Afirmación 1, esta función tiene su extremo local en el punto $x_o$.
Por definición del punto extremo local, dependiendo si $x_0$ es un mínimo ó un máximo, se cumple sólo una desigualdad $F(x) \geq F(x_0)$ ó $F(x) \leq F(x_0)$ en una vecindad del punto $x_0$.

Considerando la desigualdad $F(x) \geq F(x_0)$,

$$e^x - m_{x_0} x - p_{x_0} \geq e^{x_0} - m_{x_0} x_0 - p_{x_0}, \qquad e^x - e^{x_0} - m_{x_0}(x - x_0) \geq 0 .$$

Si se supone $m_{x_0} = e^{x_0}$, es posible demostrar que en este caso la desigualdad $e^x - e^{x_0} - e^{x_0}(x - x_0) \geq 0$, se cumple en una vecindad de $x_0$, ó respecto a la nueva variable $z = x - x_0$, la desigualdad $e^{z+x_0} - e^{x_0} - e^{x_0} z \geq 0$ se cumple en una vecindad de $z = 0$.

Al tener en cuenta $e^{z+x_0} = e^{x_0} e^z$ y $e^{x_0} > 0$, se cumplen las desigualdades siguientes,
$e^{x_0}\left(e^z - 1 - z\right) \geq 0$ , $\left(e^z - 1 - z\right) \geq 0$ y $e^z \geq 1 + z$.
La última desigualdad se satisface en una vecindad de $z = 0$.
Esto significa que $m_{x_0} = e^{x_0}$, es la pendiente de la recta tangente.

Ahora se calcula el término independiente por la fórmula
$b = f(x_0) - mx_0 = e^{x_0} - e^{x_0} x_0$,
de donde la ecuación de la recta tangente es, $y = e^{x_0} \cdot x + e^{x_0}(1 - x_0)$.

**Recta tangente para la función logaritmo sin derivar**

Hallar la ecuación de la recta tangente $R(x_0, y_0) = m_{x_0} x + p_{x_0}$ que pasa por el punto $(x_0, y_0)$, de la gráfica de la función logaritmo $y = \ln x$, donde $y_0 = \ln x_0$.
Sea $x_0 > 0$ y $x_0 \neq 1$
Se tiene ahora como función adicional, $F(x) = \ln x - [m_{x_0} x + p_{x_0}] = \ln x - m_{x_0} x - p_{x_0}$.
Según Afirmación 1 esta función tiene su extremo local en el punto $x_0$
Por definición del punto extremo local en $p_{\max} = x_0$ de la función $y = \ln x$ debe cumplirse la desigualdad $F(x) \geq F(x_0)$ ó $F(x) \leq F(x_0)$ en una vecindad del punto $x_0$.

Se considera la desigualdad

$$\ln x - m_{x_0} x - p_{x_0} \leq \ln x_0 - m_{x_0} x_0 - p_{x_0},$$

$$\ln x - \ln x_0 - m_{x_0}(x - x_0) \leq 0, \quad \ln \frac{x}{x_0} - m_{x_0}(x - x_0) \leq 0.$$

Supóngase que $m_{x_0} = \dfrac{1}{x_0}$, se demostrará que en este caso la desigualdad

$\ln \dfrac{x}{x_0} - \dfrac{1}{x_0}(x - x_0) \leq 0$ ó $\ln \dfrac{x}{x_0} - \dfrac{x}{x_0} + 1 \leq 0$ , se cumple en una vecindad de $x_0$.

Realizando el cambio de variable $u = \dfrac{x}{x_0}$, se obtiene la desigualdad, $\ln u - u + 1 \leq 0$,
de donde, $\ln u \leq u - 1$, la cual se cumple para $u > 0$.
Esto significa que $m_{x_0} = \dfrac{1}{x_0}$, es la pendiente de la recta tangente.

Se puede calcular el término independiente por la fórmula $b = f(x_0) - mx_0 = \ln x_0 - \frac{1}{x_0} x_0 = \ln x_0 - 1$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es, $y = \frac{1}{x_0} \cdot x + \ln x_0 - 1$.

**Fórmulas para operaciones lineales**

Resulta interesante mostrar algunas propiedades de la recta tangente de la suma de dos funciones $f + g$, y de la multiplicación de una constante por una función $\lambda f$, referidas como operaciones lineales.

Es posible definir a las funciones $y = f(x)$ de clase $C$, como aquellas cuya gráfica está por arriba (por abajo) con respecto de la recta tangente de clase $T(f)$, las cuales forman un conjunto $C_{ar}$ ($C_{ab}$), y donde evidentemente $C = C_{ar} \cup C_{ab}$.

Sean $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = f(x) + g(x)$ son funciones de la clase $C$, la recta tangente de la clase $T(f)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$, tiene por ecuación $y = m_f x + b_f$; la recta tangente de la clase $T(g)$ que pasa por el punto $(x_0, g(x_0))$ tiene por ecuación $y = m_g x + b_g$. Entonces la recta tangente de la clase $T(f+g)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0) + g(x_0))$ tiene por ecuación $y = m_{f+g} x + b_{f+g}$, donde $m_{f+g} = m_f + m_g$, $b_{f+g} = b_f + b_g$.

Demostración: Se considera el caso en que ambas gráficas de $f$ y $g$, están por arriba de su recta tangente en una vecindad de $x_0$, es decir, $f(x) \in C_{ar}$ y $g(x) \in C_{ar}$. Los otros casos son análogos. Según Afirmación 1, las funciones adicionales, $F(x) = f(x) - [m_f x + b_f]$ y $G(x) = g(x) - [m_g x + b_g]$, tienen un mínimo local en el punto $x_0$, entonces, $F(x) \geq F(x_0)$, $G(x \geq G(x_0))$ y son iguales a cero en este punto, $f(x) - [m_f x + b_f] \geq 0$, $g(x) - [m_g x + b_g] \geq 0$.

Sumando estas dos últimas desigualdades, se obtiene,

$f(x) + g(x) - [(m_f + m_g)x + b_f + b_g] \geq 0$.

Ahora bien, por el punto $(x_0, f(x_0) + g(x_0))$ pasa la gráfica de la función $y = f(x) + g(x)$, que está por arriba de la recta tangente $R$, $y = (m_f + m_g)x + b_f + b_g$.

Sea $y = f(x)$ una función de $C$, la recta tangente de la clase $T(f)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene por ecuación $y = m_f x + b_f$. Entonces el producto $y = \lambda \cdot f(x)$, donde $\lambda$ es un numero real diferente de cero, pertenece a la clase $C$ y la recta tangente de la clase $T(\lambda \cdot f)$ que pasa por el punto $(x_0, \lambda \cdot f(x_0))$ tiene por ecuación $y = m_{\lambda \cdot f} x + \lambda \cdot b_{\lambda \cdot f}$, donde $m_{\lambda \cdot f} = \lambda \cdot m_f$, $b_{\lambda \cdot f} = \lambda \cdot b_f$.

Demostración: Se considera nuevamente el caso en que $f(x) \in C_{ar}$, los otros casos son análogos. Según Afirmación 1, función adicional, $F(x) = f(x) - [m_f x + b_f]$ tiene un

mínimo local en el punto .$x_0$, : $F(x) \geq F(x_0)$ y $F(x_0) = 0$. Se cumple la desigualdad $f(x) - [m_f x + b_f] \geq 0$.
Multiplicando la función por el número $\lambda$, se obtienen las desigualdades,

$$\lambda \cdot f(x) - [\lambda \cdot m_f x + \lambda \cdot b_f] \geq 0 \text{, si } \lambda \geq 0;\ \lambda \cdot f(x) - [\lambda \cdot m_f x + \lambda \cdot b_f] \leq 0 \text{, si } \lambda \leq 0.$$

Por el punto $(x_0, \lambda \cdot f(x_0))$, pasa la gráfica de la función $y = \lambda \cdot f(x)$ y su recta tangente $R$ en $x_0$: $y = (\lambda \cdot m_f)x + \lambda \cdot b_f$, está por abajo de la curva cuando $\lambda > 0$, y está por arriba de la misma cuando $\lambda < 0$. Se obtienen las fórmulas $m_{\lambda \cdot f} = \lambda \cdot m_f$, $b_{\lambda \cdot f} = \lambda \cdot b_f$
Adicionalmente se puede mostrar que la función $\lambda \cdot f(x) \in C$, tiene una única recta tangente, es decir se puede demostrar la unicidad de la recta $R$. Sea $f(x) \in C_{ar}$, $\lambda > 0$. Otros casos se demuestran del mismo modo. Se aplicará el método de la reducción al absurdo. Supóngase que existe otra recta $\widetilde{R}$: $y = \widetilde{m}x - \widetilde{b}$ con $\widetilde{m} \neq m_{\lambda \cdot f} = \lambda \cdot m_f$ ó $\widetilde{b} \neq b_{\lambda \cdot f} = \lambda \cdot b_f$, que pasa por el punto $(x_0, \lambda \cdot f(x_0))$, $\lambda \cdot f(x_0) = \widetilde{m}x_0 + \widetilde{b}$ tal que la grafica de la función $y = \lambda \cdot f(x)$ está por arriba de la recta $\widetilde{R}$. En este caso se cumple $\lambda \cdot f(x) - [\widetilde{m}x + \widetilde{b}] \geq 0$ en una vecindad del punto $x_0$. Al dividir por $\lambda$ se tiene $f(x) - [\frac{\widetilde{m}}{\lambda} x + \frac{\widetilde{b}}{\lambda}] \geq 0$ donde $\frac{\widetilde{m}}{\lambda} \neq m_f$ ó $\frac{\widetilde{b}}{\lambda} \neq b_f$ que es una contradicción con el hecho de que la gráfica de *f* está por arriba de R, $f(x) \in C_{ar}$.

**Fórmula para el producto**

Finalmente es posible mostrar la propiedad de la recta tangente del producto $f.g$ dos funciones *f* y $g$. Sean $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$, la recta tangente de la clase $T(f)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene por ecuación $y = m_f x + b_f$; la recta tangente de la clase $T(g)$ que pasa por el punto $(x_0, g(x_0))$ tiene por ecuación $y = m_g x + b_g$. Entonces la recta tangente de la clase $T(f.g)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0) \cdot g(x_0))$ tiene por ecuación $y = m_{f \cdot g} x + b_{f \cdot g}$, donde
$m_{f \cdot g} = m_f g(x_0) + m_g f(x_0)$, $b_{f \cdot g} = f(x_0) g(x_0) - m_{f \cdot g} x_0$.
Demostración: Sólo se trata el caso $f(x) \in C_{ar}$ y $g(x) \in C_{ar}$, por lo tanto se cumplen las desigualdades, $[m_f x + b_f] \geq 0$, $[m_g x + b_g] \geq 0$ ; y en el punto $x_0$, las pendientes son positivas $m_f > 0, m_g > 0$. Los otros casos son análogos. De Afirmación 1, las funciones adicionales son, $F(x) = f(x) - [m_f x + b_f]$ y $G(x) = g(x) - [m_g x + b_g]$, las cuales tienen un mínimo local en el punto $x_0$, es decir, $F(x) \geq F(x_0)$, $G(x \geq G(x_0))$. Entonces, por definición se cumplen en una vecindad del punto $x_0$ las desigualdades
$f(x) - [m_f x + b_f] \geq 0$ ó $f(x) \geq [m_f x + b_f]$; $g(x) - [m_g x + b_g] \geq 0$ ó $g(x) \geq [m_g x + b_g]$.
Multiplicando las dos últimas desigualdades, se obtiene $f(x)g(x) \geq [m_f x + b_f][m_g x + b_g]$, realizando operaciones elementales y simplificando se tiene que,

$$f(x)g(x)-\left[\left(m_f g(x_0)+m_g f(x_0)\right)x+f(x_0)g(x_0)-\left(m_f g(x_0)+m_g f(x_0)\right)x_0\right]\geq m_f m_g (x-x_0)^2$$

Por el punto $(x_0, f(x_0)\cdot g(x_0))$ pasa la gráfica de la función $y=f(x)\cdot g(x)$ y la recta $R: y=\left(m_f g(x_0)+m_g f(x_0)\right)x+f(x_0)g(x_0)-\left(m_f g(x_0)+m_g f(x_0)\right)x_0$, la gráfica de $y=f(x)+g(x)$ está por arriba de $R$. Finalmente se obtienen las fórmulas $m_{f\cdot g}=m_f g(x_0)+m_g f(x_0)$ , $b_{f\cdot g}=f(x_0)g(x_0)-m_{f\cdot g}x_0$. Obsérvese que la pendiente del producto de dos funciones $m_{f.g}$, tiene una forma similar a la derivada del producto de dos funciones.

## Conclusiones

Este tipo de resultados son un tanto sorprendentes para la mayoría de los estudiantes, no esperan poder calcular la pendiente de la recta tangente (que según la interpretación geométrica es la derivada) sin el uso de la derivada. La sorpresa genera interés y el mismo posibilita llevar a los estudiantes a las matemáticas.

Con este trabajo se concluye una primera parte de un método alternativo para abordar algunas de las nociones básicas del cálculo, en el que esencialmente se presentan las construcciones respectivas de las ecuaciones de rectas tangentes para polinomios, funciones raíces, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Adicionalmente a la investigación sobre funciones elementales, se incorpora una generalización de la construcción de la recta tangente para funciones que a su vez se obtienen a través de operaciones aritméticas entre ellas.

El tratamiento aquí presentado posibilita el tránsito entre el precálculo y el cálculo, a través de una propuesta didáctica en la que se busca articular a los saberes matemáticos de la recta tangente a una función, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y la resolución de desigualdades.

## BIBLIOGRAFIA

Rondero, C., Karelin, O., & Tarasenko A. (2004). *Métodos alternativos en la búsqueda de los puntos críticos y derivadas de algunas funciones.* En Díaz Moreno L. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 17, pp. 821-827). Tuxtla Gutiérrez, México: CLAME.

Boyer, C., & Merzbach, U. (1989). *A History of Mathematics*. Nueva York. EE.UU: John Wiley.

Edwards, C.H. (1979).*The Historical development of the Calculus*. Nueva York. EE.UU: Springer-Verlag.

Kline, M., . (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nueva York. EE.UU: Oxford University Press.

Stewart, J. (1999). *Cálculo, Conceptos y Contextos*, México: International Thomson Editores.