LA DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS EN LOS LIBROS DE TEXTO DE AYER Y DE HOY

Mario Dalcín
Instituto de Profesores Artigas, Uruguay.
filomate@adinet.com.uy

Campo de investigación: Epistemología – Estudios socioculturales – Pensamiento geometrico; Nivel educativo: Básico, Medio y Superior

Resumen

Se presenta un análisis de las definiciones y la clasificación de los cuadriláteros que aparecen en los libros de texto antiguos y contemporáneos más usados del Río de la Plata. Se hace la distinción entre definiciones jerárquicas o particionales (de Villiers, 1994, 1998), así como en minimales o no minimales (Vinner, 1991).

Palabras clave: cuadriláteros, definición.

Introducción

De Villiers (1994, 1998) hace una distinción entre las definiciones, y por tanto entre las clasificaciones de conceptos, en jerárquicas y particionales. La clasificación es jerárquica cuando los conceptos más particulares forman subconjuntos de los conceptos más generales (por ej. cuando los cuadrados son algunos de los rectángulos y estos a su vez son algunos de los paralelogramos). En la clasificación particional de un conjunto de conceptos estos se agrupan en subconjuntos disjuntos (por ej. cuando cuadrados, rectángulos, rombos, paralelogramos no tienen características en común).
Otro aspecto relevante en la definición de un concepto es si esta es minimal o no (por ej. definir rectángulo como cuadrilátero con cuatro lados iguales es no minimal ya que la igualdad del cuarto ángulo podría deducirse de la igualdad de los otros tres). Es importante dejar claro que tanto definiciones jerárquicas como particionales, minimales o como no minimales, son válidas.
Analizamos las distintas definiciones/clasificaciones de cuadriláteros que aparecen en libros de texto -recientes y no tanto- usados en el Río de la Plata. Buscamos discutir sus pros y contras, y basándonos en ello proponer nuevas alternativas para la enseñanza de la definición y clasificación de cuadriláteros.

¿Qué es la definición de un concepto matemático?

"...es un enunciado verbal que predetermina al concepto de una manera no circular (sus elementos deben ser nociones primitivas de la teoría o nociones definidas previa e independientemente) y consistente (no puede involucrar contradicciones lógicas que derivarían en que ningún objeto verifique sus condiciones). En este marco, dos definiciones se consideran equivalentes cuando determinan el mismo conjunto de ejemplos." (Calvo, 2001)

¿Para qué sirven las definiciones?

Como no se puede empezar cada tema a partir de conceptos primitivos y axiomas se suele comenzar con nociones y teoremas bien conocidos y a partir de ellos continuar definiendo nuevos conceptos y demostrando nuevos teoremas. A la hora de usar un concepto cuya descripción requiere de un enunciado relativamente largo, se introduce una sola palabra o frase para sustituir dicho enunciado.

Las definiciones cumplen así una función de abreviar, pero también responden a la necesidad de ir organizando la matemática y facilitar así su desarrollo.

¿Cómo se establece una definición?
Las definiciones son convencionales. Definir en matemática es dar un nombre. La cuestión es qué características tomar en cuenta a la hora de establecer la convención.

¿Qué factores influyen en la elección de una definición?

- Estéticos. "Es deseable que la definiciones sean elegantes. Por ejemplo, algunos matemáticos piensan que la definición de valor absoluto

$$|x| = \sqrt{x^2} \text{ es más elegante que: } |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}\text{"}$$

(Vinner, 1991)

- Operativos. En ocasiones el criterio usado para establecer una determinada definición se explica por las conclusiones que de ella se pueden extraer o por su potencia como instrumento organizador de una prueba o la resolución de un problema.
- Didácticos. El conocimiento se somete a un proceso de Transposición Didáctica que lo prepara para ser comunicado, lo cual requiere que se elijan las definiciones que se presentarán según los conocimientos previos de los alumnos o los objetivos del curso.
- Según Vinner (1991), otra característica que se le exige a las definiciones por parte de los matemáticos y de los textos es que estas deben ser **mínimas**.

"Por mínimas queremos decir que las definiciones no deben contener partes que puedan ser inferidas, matemáticamente, de otra parte de la definición."

- De Villiers (1994, 1998) hace una distinción entre las definiciones, y por tanto entre las clasificaciones de conceptos, en jerárquicas y particionales.

La clasificación es **jerárquica** cuando los conceptos más particulares forman subconjuntos de los conceptos más generales. Por ejemplo, cuando los cuadrados son parte de los rectángulos y estos a su vez son parte de los paralelogramos.
En la clasificación **particional** de un conjunto de conceptos estos se agrupan en subconjuntos disjuntos. Por ejemplo, cuando cuadrados, rectángulos, rombos, paralelogramos no tienen características en común.

Si bien los dos tipos de definiciones -y clasificaciones- son válidos, De Villiers se inclina por las jerárquicas basándose en que:

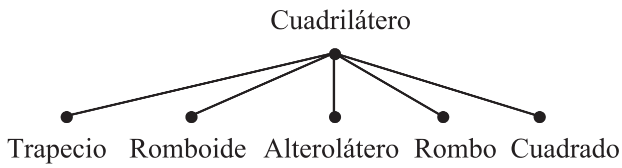
- A la hora de identificar ejemplos de determinada definición es más económico si la definición es jerárquica.
- Permiten disminuir el número de justificaciones.
- Son más generales.
- Son acordes al funcionamiento de los programas de Geometría Dinámica.

Los textos

✓ **Euclides. *Elementos de Geometría*.**

"De entre las figuras cuadriláteras, el cuadrado es la figura equilátera y equiangular; el alterolátero es equiangular, mas no equilátera; el rombo es equilátera, mas no rectangular; el romboide es la que tiene los lados y los ángulos opuestos iguales, sin ser equilátero ni equiangular. Las restantes figuras cuadriláteras llámense trapecios." (Libro I, Definición 22)

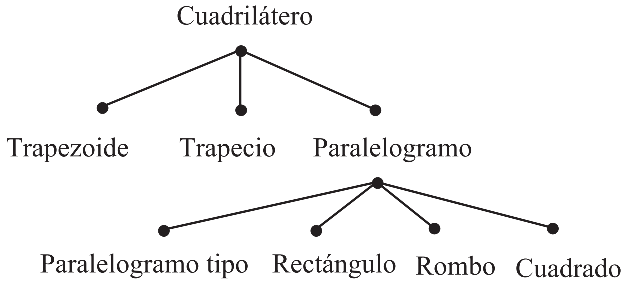
Según las definiciones adoptadas por Euclides, el cuadrado no puede ser considerado como una clase especial de alterolátero (rectángulo) ya que en el primero se exige igualdad de lados y ángulos mientras que en el segundo se exige que los lados no sean todos iguales. En forma análoga el cuadrado no puede considerarse un tipo especial de rombo ya que en este último se exige que los ángulos no sean rectos. Cuadrado, alterolátero y rombo no pueden considerarse como clases especiales de romboide ya que en este último se exige que no sea equilátero ni equiangular. Las definiciones de Euclides implican una clasificación particional de los cuadriláteros.
Las definiciones de cuadrado y alterolátero no son minimales al exigir que sean equiangulares (alcanzaría con tres ángulos iguales); suponemos que la elección de Euclides responde a un factor estético de presentar con igual jerarquía lo equilátero y lo equiangular, aspecto que se mantiene en la definición de romboide que por otra parte tampoco es mínima al exigir igualdad de lados y ángulos opuestos (alcanzaría con una u otra condición).



Definiciones similares se encuentran en Mahler (1927): *"Cuadrado: paralelogramo equilátero y equiángulo. Rectángulo: paralelogramo equiángulo y no equilátero. Rombo: paralelogramo equilátero y no equiángulo. Romboide: paralelogramo no equilátero y no equiángulo."*
Las definiciones de cuadrado, rectángulo, rombo no son minimales (se dice que son paralelogramos).
Acotamos que la clasificación de triángulos de los *Elementos* también es particional: *"Definición 20. De entre las figuras triláteras, es triángulo equilátero la que tenga tres lados iguales; isósceles, la que tenga solamente dos lados iguales; escaleno, la que tenga los tres lados desiguales."*

✓ **Texto único 4º (1979).**
Usado durante años en Enseñanza Primaria, trae las siguientes definiciones:
"Clasificación de los cuadriláteros. Se pueden combinar cuatro líneas de muchos modos: pueden ser dos paralelas cortadas por otras dos paralelas; dos paralelas cortadas por dos no paralelas; dos no paralelas cortadas por otras dos no paralelas.
En el primer caso, el cuadrilátero formado por las paralelas es un paralelogramo; en el segundo caso, es un trapecio, y en el tercer un trapezoide.
Por consiguiente hay tres clases de cuadriláteros: paralelogramos, trapecios y trapezoides.
El paralelogramo es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos.
Los paralelogramos son cuatro:
El paralelogramo tipo está formado por cuatro lados iguales dos a dos, dos ángulos agudos y dos obtusos, respectivamente iguales.
El rectángulo está formado por cuatro lados iguales dos a dos y cuatro ángulos rectos.
El rombo está formado por cuatro lados iguales, dos ángulos obtusos y dos agudos, respectivamente iguales.
El cuadrado tienen cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos."

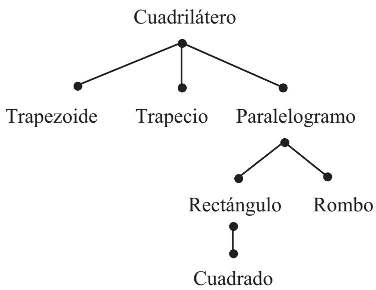
Las definiciones adoptadas son particionales y habilitarían la siguiente clasificación:



✓ **Thompson (1991).** ***Geometría.***

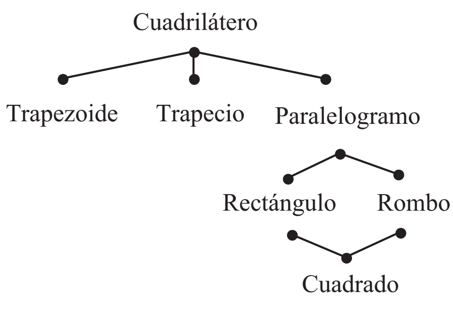
*"Un cuadrilátero que no tenga ningún par de lados paralelos, se llama trapezoide...
Un cuadrilátero que tenga solamente dos lados paralelos, se llama trapecio...
Un cuadrilátero que tenga sus lados opuestos dos a dos se llama paralelogramo...
Un paralelogramo cuyos ángulos sean todos rectos, se llama rectángulo.
Un rectángulo cuyos lados sean todos iguales, recibe el nombre de cuadrado...
Si el paralelogramo tiene sus lados iguales pero sus ángulos no son rectos, se llama rombo."*

Se usan tanto definiciones particionales (trapezoide, trapecio, paralelogramo) como jerárquicas (cuadrado como caso particular de rectángulo y este como caso particular de paralelogramo). Llama la atención que se adopte una definición particional para el rombo. Algunas definiciones son minimales (paralelogramo) y otras no (rectángulo: tanto por ser paralelogramo como por tener todos los ángulos rectos).



✓ **Repetto, Linskens, Fesquet (1991).** ***Geometría 2.***

*"Trapezoide es el cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos.
Trapecio es el cuadrilátero que tiene únicamente dos lados opuestos paralelos.
Paralelogramo es el cuadrilátero que tiene los dos pares de lados opuestos paralelos.
Se llama rectángulo al paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos.
Se llama rombo al paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales.
Se llama cuadrado al paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos y sus cuatro lados iguales."*



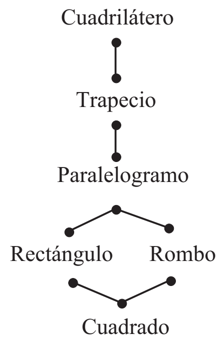
En las definiciones y clasificación anterior se combinan definiciones particionales (trapezoide, trapecio, paralelogramo) con jerárquicas para el caso de cuadrado, rombo, rectángulo y paralelogramo. Algunas definiciones son minimales (paralelogramo) y otras no (rectángulo, rombo).

Idéntico tratamiento se encuentra en Severi (1946), Rey Pastor y Pereyra (1956), Coppetti (1970), Bruño (1981), Coppetti y Coppetti (1983). También en Paz (1963), donde al clasificar los paralelogramos se dice que es *"romboide si sus cuatro lados son desiguales entre sí, así como sus ángulos. Nótese que el romboide es el paralelogramo en general."*

✓ **Petracca, Varela y Foncuberta (1984). *Matemática 2.***

"Si un cuadrilátero convexo tienen un par de lados opuestos paralelos, se llama trapecio.
Si tiene los dos pares de lados opuestos paralelos, se llama paralelogramo...
Si en un paralelogramo uno de los ángulos es recto, la figura se denomina rectángulo...
Si en un paralelogramo dos lados consecutivos son congruentes, la figura se llama rombo...
Si un rectángulo es rombo se denomina cuadrado."

Las definiciones adoptadas son todas jerárquicas y minimales.



Idéntico planteo se encuentra en Tapia (1986).

Conclusiones

¿Cuál es la definición correcta de rectángulo (o cualquier otro cuadrilátero)? Pretendemos haber dado respuesta a esta pregunta -frecuente entre estudiantes y profesores tando de enseñanza primaria como media-: pueden haber muchas formas matemáticamente correctas de definir rectángulo (o cualquiero otro cuadrilátero). Queda planteada la tarea de indagar acerca de la conveniencia de usar una u otra definición teniendo en cuenta el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Referencias

Bruño, G. (1981). *Geometría. Curso Superior*. España: Bruño.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre las definiciones y las demostraciones en un curso preuniversitario de Cálculo Diferencias e Integral*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Coppetti, M. (1970). *Geometría racional para Segundo año*. Uruguay: Barreiro y Ramos.

Coppetti, M. y Coppetti, E. (1983). *Geometría y nociones sobre conjuntos*. Uruguay: Barreiro y Ramos.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, *26*, 15-30.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics, 14 (1)*, 11-18.

De Villiers, M. (1997). The role of proof in investigative, computer-based geometry: Some personal reflections. En J. King and D. Schattschneider (Eds.), *Geometry Turned On:Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research* (pp. 15-24). U.S.A. : MAA.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Oliver y K. Newstead (Eds.) *PME 22 Proceedings*. South Africa: Stellenbosch University.

De Villiers, M. (1999). The van Hiele Theory - Defining and Proving within a Sketchpad Context. En *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad* (pp. 11-20). U.S.A.: Key Curriculum Press.

Euclides (1992). *Elementos de Geometría I-II*. México: UNAM.

Mahler, G. (1927). *Geometría del plano*. España: Labor.

Paz, A. (1963). *Geometría I*. U.S.A.: Minerva Books.

Petracca, M.; Varela, L. y Foncuberta, J. (1984). *Matemática II*. Argentina: Magisterio del Río de la Plata.

Repetto, C.; Linskens, M. y Fesquet, H. (1991). *Geometría 2*. Argentina: Kapelusz.

Rey Pastor, J. y Pereyra, M. (1956). *Geometría IV*. Uruguay: Monteverde.

Severi, F. (1946). *Elementos de Geometría. Tomo I*. España: Labor.

Tapia, C.; Tapia, A.; Vázquez, N. (1986). *Matemática 2*. Argentina: Estrada.

Thompson, J. (1991). *Geometría*. México: Uteha.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learnig of mathematics. En D. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

VV.AA. (1979). *Texto único 4º*. Uruguay: Barreiro y Ramos.