MODELACIÓN EN EL AULA DEL CONCEPTO DE DIFERENCIAL

Alberto Camacho Ríos, Bertha Ivonne Sánchez Luján
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez
México
camachoalberto@hotmail.com, ivonne_mx_2000@yahoo.com
Campo de investigación: Modelacón matemática y Socioepistemología; Nivel Educativo: Superior; Metodología: Cualitativa

Resumen

Proponemos una "práctica procedimental" desde la perspectiva de la socioepistemología, para que estudiantes construyan el concepto de diferencial basado en el Modelo Educativo para el Siglo XXI que actualmente se está implantando en el Sistema Tecnológico federal. Se presentan tres tipos de contenidos curriculares de los que sobresalen los procedimentales, cada uno con diferentes procesos de construcción del conocimiento. Tomamos en cuenta estos últimos para el diseño de una situación didáctica, a través de un prototipo que sugiere la noción de diferencial, por medio del cual se establece un modelo de aproximación.
Palabras clave: práctica procedimental, diferencia, diferencial.

Introducción

El Nuevo Modelo Educativo para el Siglo XXI del Sistema Nacional de Educación Tecnológica (SNEST) se implantó a partir de agosto de 2004, con el fin de lograr la formación del ser humano y su aprendizaje, en un marco de construcción del conocimiento y el cultivo de la inteligencia en todas sus formas. El SNEST privilegia el aprendizaje por encima de las formas de enseñanza tradicional; esto es, la construcción de conocimiento significativo y construcción de ambientes propicios para el aprendizaje orientados hacia el desarrollo de habilidades para plantear y solucionar problemas. De esta forma, el aprender es un proceso personal, activo, por descubrimiento, tratando de relacionar los conocimientos anteriores con los nuevos.
Dentro del "nuevo modelo educativo", se presta especial importancia a los tipos de aprendizaje de contenidos curriculares: declarativo, procedimental y actitudinal-valoral, y en el cómo cada uno de ellos conlleva diferentes procesos de construcción del conocimiento. El docente debe tomarlos en cuenta al preparar y evaluar sus clases.
El conocimiento, entonces, no puede ser tratado de la misma forma al resolver un problema matemático, aprender un nuevo idioma, escribir un ensayo, analizar una gráfica, etc. Se involucran una serie de pasos y existen diferencias entre los procesos de construcción del conocimiento. Se tienen tres tipos de contenido curricular (Díaz Barriga, F. & G. Hernández, 2002):

a) Declarativo; Corresponde al saber: hechos, conceptos y principios.
b) Procedimental; Saber hacer: procedimientos, estrategias, técnicas, destrezas, métodos.
c) Actitudinal–Valoral; Saber ser: actitudes, valores, ética personal y profesional.

En el segundo rubro, el contenido curricular sugiere tipos de prácticas que consisten en traducir situaciones, para el caso de las carreras de ingeniería del SNEST las situaciones en el aula son del todo fenómenos de variación entre cantidades, en las que se hace uso de un pequeño número de conceptos o bien una parte "rudimental" de ellos: variables, nociones, objetos, aislados de una disciplina particular, la matemática. Este tipo de prácticas han sido llamadas en Camacho (2005) "prácticas procedimentales". Por su naturaleza, las prácticas procedimentales pueden considerarse a sí mismas el apoyo imprescindible del diseño de situaciones didácticas, donde la matemática no es pensada a través de objetos duros que los estudiantes deban construir sino a través de sus relaciones procedimentales con la modelación y los diferentes significados del conocimiento que aparecen a lo largo de la práctica. El objetivo de revalorar los conocimientos adquiridos, coloca a los estudiantes en el proceso mismo de la construcción del conocimiento. En general, las prácticas procedimentales se caracterizan por la "toma" de cantidades diferenciales, como pueden ser volúmenes, áreas, etc., para con ello pasar a la solución de problemas. Además, vistos como herramienta de uso en problemas de ingeniería, el contexto donde los conceptos se desenvuelven les provee de mayores significados, incluyendo aquellos que el investigador desee reproducir en la situación. Por la condición de la práctica, la parte procedimental es guiada a través de los pasos elementales que conducen a los ingenieros a la modelación y solución de problemas.

Aproximaciones lineales y diferenciales

"Una curva está muy cerca de su tangente en la vecindad del punto de tangencia, si realizamos una aproximación hacia un punto en la gráfica, este se parece cada vez más a su tangente" (Stewart, 2001). Usamos la recta tangente en un punto como una aproximación a la curva $y=f(x)$ cuando x está cerca de ese punto. La ecuación de la recta tangente es: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Esta última se denomina aproximación lineal a $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ o aproximación de la recta tangente. Si cambiamos $f(x)$ por $L(x)$ tenemos una linealización en a.

Estas ideas, algunas veces se formulan en terminología y notación de diferenciales. Si $y=f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la diferencial dx es una variable independiente que puede tomar cualquier valor real. La diferencial dy se define en términos de dx por la ecuación: $dy = f'(x)dx$ El proceso descrito, se presenta en la mayoría de los libros de cálculo por medio de su significado geométrico, únicamente, donde se muestra que el cambio correspondiente en y es: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. La pendiente de la recta tangente es la derivada $f'(x)$. Por tanto $f'(x)dx = dy$. Entonces dy representa la cantidad que se eleva o que desciende la recta tangente (el cambio en la linealización) mientras que Δy representa la cantidad en que la curva $y=f(x)$ se eleva o disminuye cuando x cambia en una cantidad dx.

Diseño de la Situación Didáctica

Nuestra propuesta es presentar el concepto de diferencial mediante una práctica que incluya un prototipo con el cual se trabaje la función desde el punto de vista:

a) Verbal: Descripciones con palabras.
b) Numérica: Por ejemplo, llenar tablas de valores.
c) Visual-geométrico: Uso de gráficas.
d) Algebraica: Concluir con una fórmula explícita.

Los contenidos en juego, a partir de los rubros ya mencionados, son los siguientes:

Contenidos conceptuales	**Contenidos Procedimentales**	**Contenidos Actitudinal-Valoral**
1. Concepto de diferencial, 2. Derivada, 3. Variable. 4. Incremento	1. Bosquejar gráficas. 2. Formular propiedades, 3. Resolver operaciones con binomios, 4. Medir.	1. Aprendizaje colaborativo 2. Discusión de los resultados para emitir opiniones.

5. Recta tangente	5. Hacer uso de formularios. 6. Procesos de aproximación. 7. Construir conocimiento.	3. Actitud y disposición y respeto a sus compañeros. 4. Participación. 5. Incorporar la técnica de organización y resumen

La situación didáctica contempla las siguientes actividades:

1. Trabajar con un prototipo que sugiera la noción de diferencial
2. Identificar geométricamente el prototipo
3. Búsqueda de relaciones entre elementos que integran el prototipo, centrando el objetivo en el diferencial.
4. Establecer la relación de cantidad *f*(*x*): fórmula de volumen, área, etc., contenida en el prototipo, según se trate del problema.
5. Incrementar la relación de cantidad *f*(*x*) en Δx. Por ejemplo:
6. $f(x+\Delta x) = f(x) + df\Delta x + B(\Delta x)^2 + \ldots$ (1)
7. Llamando a esta última "nueva cantidad": nuevo volumen, nueva área, etc.

De aquí se siguen dos acciones:

8. Primero: Establecer un modelo de aproximación que permita determinar la "diferencia" de cantidades, entre la nueva cantidad y la cantidad inicial; es decir:
$$f(x+\Delta x) - f(x) = df\Delta x + B(\Delta x)^2 + \ldots \quad (2)$$
Segundo: Precisar, a través de un caso concreto, que $f(x+\Delta x) - f(x) = df\Delta x$ (3) determina una "aproximación" de la nueva cantidad, la cual será llamada "diferencial", a partir de despreciar los valores de $B(\Delta x)^2 + \ldots$ en adelante.

Actividades del estudiante

1. Solicitar con anticipación los materiales: una toronja por equipo, regla graduada, compás, lápiz, goma de borrar, hojas blancas, cuchillo, tijeras.
2. Antes de iniciar las sesiones de trabajo formar equipos de 3 o 4 alumnos.
3. Activar las preconcepciones de los estudiantes en los siguientes rubros:
   a. Gráfica de funciones algebraicas de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
   b. Desarrollos algebraicos de binomios de la forma:
   $$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2} + \ldots$$
   c. Conocimiento de las fórmulas del área del círculo $V(r) = \pi r^2$ y del volumen de una esfera $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Secuencia de trabajo 1

<u>Del lado de los estudiantes</u>

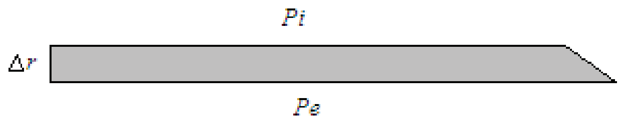
Objetivo: Determinar el área y volumen de la cáscara de la toronja.

1. Cortar la toronja por la mitad
2. Medir con la regla los radios interior y exterior de la toronja. Determinar la diferencia entre radios, llamarle $\Delta r = r_{ext} - r_{int}$
3. Hacer un gráfico del corte hecho a la toronja, a escala 1:1 cm., subrayando el área de la cáscara.

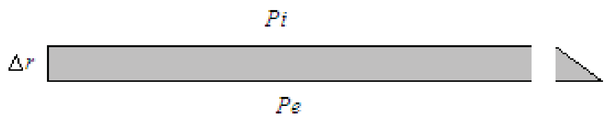
4. Calcular el perímetro del círculo interior y el perímetro del círculo exterior con la expresión $p = 2\pi r$; llamarlos p_i y p_e, respectivamente.
5. Dibujar en línea recta, a escala 1: 1 cm., los perímetros p_i y p_e, y el Δr.
6. Calcular el área de la figura resultante determinando por separado las áreas del rectángulo y el pequeño triángulo que se forman (es decir el área de la cáscara de la toronja).
7. Verificar lo anterior haciendo uso de la expresión $A(r) = \pi r^2$, incrementando el radio como sigue: $A(r + \Delta r) = \pi(r + \Delta r)$ y haciendo la "diferencia" $A(r + \Delta r) - A(r)$ (habrá que sustituir los valores medidos en la toronja de r e Δr, el valor numérico en ambos casos debe ser el mismo).
8. En la expresión algebraica que resulta de $A(r + \Delta r) - A(r)$, despreciar los términos que contengan $(\Delta x)^2$ en adelante. A la expresión final de esta operación, hay que llamarle "diferencial" y denotarle como dA, lo cual significa "diferencial de área".

Del lado del profesor

1. Lee las instrucciones y verifica que los estudiantes les sigan adecuadamente.
2. En el momento de dibujar los perímetros, sugiere una figura semejante a la siguiente en el pizarrón, la cual obedece a la diferencia $A(r + \Delta r) - A(r) = 2\pi r\Delta r + \pi(\Delta r)$

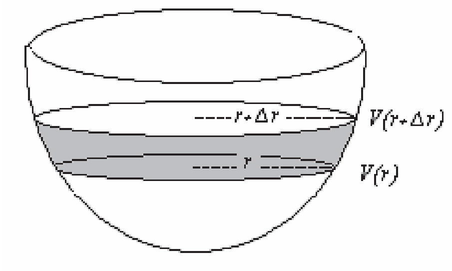


3. El profesor deberá enfatizar en el cálculo del área de la figura haciendo partición de la misma como se sugiere enseguida:



4. El profesor hará ver que el área del rectángulo está dada por la parte de la expresión $A(r + \Delta r) - A(r) = 2\pi r\Delta r$. En tanto que el área del pequeño triángulo resulta ser $\pi(\Delta r)^2$.
5. Esto último permitirá al profesor definir el área del rectángulo como una "aproximación" del área representada por la diferencia de la cual se "desprecia" el área del pequeño triángulo. Esta aproximación será llamada "diferencial".
6. El profesor deberá preguntar a los estudiantes por la discrepancia que hay entre las áreas determinadas de la "diferencia" $A(r + \Delta r) - A(r)$ y el "diferencial" $dA = 2\pi r\Delta r$, precisando en que estas diferencias se encuentran algebraicamente al despreciar en las ecuaciones los valores de $(\Delta x)^2$ en adelante.
7. Hacer un consenso con los equipos y el grupo, de manera que las nociones de diferencia y diferencial de área sean homogéneas en ellos.

Secuencia de trabajo 2
Del lado de los estudiantes



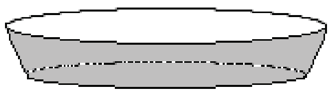
El volumen de una semiesfera (mitad de la esfera) que se le carga con líquido, está dado por la función $V(r) = \frac{2}{3}\pi r^3$. Suponga Δr de manera que $r+\Delta r$ sea el nuevo radio y $V(r+\Delta r) = \frac{2}{3}\pi(r+\Delta r)^3$ el nuevo volumen, un tiempo después de que se cargue con líquido. Una gráfica de esa situación es la que aparece enseguida:
Con esa información realice las siguientes actividades:

1. Desarrolle el binomio asociado a la expresión $V(r+\Delta r)$.
2. ¿Cuál es el volumen asociado a $V(r+\Delta r) - V(r)$? Dibuje este último, aislándolo de la gráfica anterior y registre los datos.
3. De acuerdo al ejemplo de la secuencia anterior, determine la diferencia: $V(r+\Delta r) - V(r)$ y dé un significado de esta. Anote la fórmula y los resultados correspondientes.
4. De acuerdo al ejemplo de la secuencia anterior ¿qué significado se le puede dar al diferencial dV? Anote la fórmula y los resultados correspondientes.
5. A partir de la expresión a la que se llegó, concentre la información que se pide en la siguiente tabla, tomando valores del radio desde 50 cm., hasta 60 cm., con incrementos Δr=0.1:

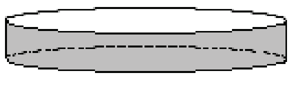
r	Δr	$V(r)$	$V(r+\Delta r) - V(r)$	dV

Del lado del profesor:

1. El profesor ayuda a los equipos para homogenizar las gráficas de la "diferencia" y "diferencial" tomándoles de la figura de la esfera, como se muestra enseguida:



Diferencia: V(r+Δr)-V(r)



Diferencial: dV

2. Verifica que los equipos hayan concluido con la expresión:
$$V(r+\Delta r) = \frac{2}{3}\pi r^3 + 3\pi r^2\Delta r + 3\pi r(\Delta r)^2 + 3\pi(\Delta r)^3$$
3. Después de que los estudiantes lleguen a la expresión $V(r+\Delta r) - V(r) = 3\pi r^2\Delta r + 3\pi r(\Delta r)^2 + 3\pi(\Delta r)^3$ el profesor les induce a considerarle como la "diferencia" de volumen o "volumen acumulado".
4. El profesor sugiere a los estudiantes eliminar los valores $3\pi r(\Delta r)^2 + 3\pi(\Delta r)^3$ de la expresión para la diferencia, y establecer así la que corresponde al diferencial como $dV = 3\pi r^2\Delta r$, considerando que Δr se puede escribir como dr.
4. A partir de los resultados de la tabla, el profesor cuestiona a los equipos por los valores numéricos de la diferencia $V(r+\Delta r) - V(r)$, el diferencial dV, así como la cantidad $3\pi r(\Delta r)^2 + 3\pi(\Delta r)^3$ que les hace independientes, asociándoles con las figuras

que resultan. La tabla, en esta parte de la experiencia, servirá para reafirmar las definiciones dadas a las nociones de diferencia y diferencial en la primera secuencia.

Aplicación de la práctica.

Se aplicó a un grupo de estudiantes de la materia de Matemáticas I Cálculo Diferencial del Instituto Tecnológico de Chihuahua II. Estuvieron presentes el docente y un auxiliar para realizar anotaciones y video-grabar la sesión.

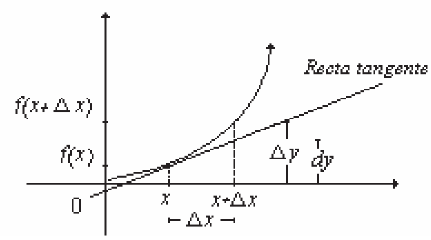
Antes de la aplicación de las secuencias, se verificaron los contenidos previos necesarios para llevarla a cabo: gráfica de funciones algebraicas, desarrollo algebraico de binomios, conocimiento del volumen de una esfera y área del círculo.

Se privilegió el trabajo colaborativo, dividimos el grupo en equipos de tres estudiantes, cada uno de los cuales contaba con una toronja, regla graduada, compás, lápiz, goma de borrar, hojas en blanco, cuchillo, tijeras. Se les proporcionaron las secuencias por escrito y se les pidió que siguieran las instrucciones. El docente estuvo dispuesto en todo momento para dudas y comentarios. Al final de la primera parte se concluyó por equipos y posteriormente con el grupo, sobre las preguntas que se consignan.

Para la segunda parte del trabajo se les pidió dibujar la diferencia de volúmenes y llenar una tabla con los valores obtenidos de sus observaciones, después de lo cual llegaron al un "volumen acumulado".

Conclusiones

1. Un resultado de la experimentación, que no se describe por falta de espacio, es que las nociones de diferencia $V(r+\Delta r)-V(r)=3\pi r^2\Delta r+3\pi r(\Delta r)^2+3\pi(\Delta r)^3$ (en este caso de volumen) y diferencial $dV=3\pi r^2 dr$, nos permitieron fácilmente establecer y definir la derivada del volumen como $\frac{dV}{dr}=3\pi r$. La cual fue reflexionada por los estudiantes como "el cambio que se produce en V cuando cambia r".
2. La experimentación transitó por tres significados muy cercanos uno del otro como fueron "diferencia", "diferencial" y "derivada"; en los cuales la determinación del diferencial es consecuencia de la diferencia, toda vez que la derivada lo es del diferencial.
3. La utilidad de la *noción de cantidad*: área, volumen, etc., asociada a las definiciones de las nociones en juego, les proveyó de mayores significados que dieron para un mejor entendimiento por parte de los estudiantes.
4. Otras nociones con las que se interactuó, sobretodo al llegar a establecer las definiciones de derivada y diferencial, fueron las de límite, ecuación diferencial, así como el uso de la gráfica que se sugiere.



Bibliografía

Camacho, A. (2005). *Sistemas Sintéticos: Lo Inteligible en los Manuales para la Enseñanza. Cinta de Moebio* No 22. Facultad de Ciencias Sociales. Universidad de Chile, http://moebio.uchile.cl/22frames02.htm

Camacho (2005). Socioepistemología y prácticas sociales. Artículo aceptado para su publicación en la revista *EDUCACIÓN MATEMÁTICA*. Santillana XXI Editores.

Cantoral, R. & R. Farfán. (2003). "*Matematics Education: A Vision of its Evolution. Educational Studies in Mathematics"*. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Díaz Barriga, F. y G. Hernández, (2002). *El Aprendizaje de Diversos Contenidos Curriculares.* En: Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo. Una Interpretación Constuctivista. Mc Graw-Hill. México.

Stewart, J., (2001). *"Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas"*. Thompson Learning. México, 4ª edición.