# "LA INTEGRACIÓN MONTE CARLO: UNA APLICACIÓN EN LA INGENIERÍA FORESTAL"

MsC. María del Carmen Acuña Salcedo ; Dr. Ignacio Estévez Valdés ; Dr. Pedro Fernández de Córdoba Castellá.
Universidad de Pinar del Río, Cuba.
msalcedo@mat.upr.edu.cu
Campo de Investigación: Modelación Matemática; Nivel Educativo: Superior

## RESUMEN

La aplicación de las diferentes técnicas y métodos matemáticos en la búsqueda de soluciones a diversos problemas prácticos se ha incrementado en los últimos años debido al gran progreso alcanzado en el procesamiento electrónico de datos y a la capacidad de cálculo de los potentes ordenadores actuales.
El presente trabajo tiene su origen en el cálculo de cotas mediante Modelos Digitales del Terreno (MDT), para su posterior aplicación en el campo de la Ingeniería Forestal. En el mismo se ofrece una metodología para estimar el volumen de madera de un área forestal, perteneciente a un bosque artificial con especies de elevado coeficiente mórfico, a partir del empleo de un MDT y de las técnicas de integración numérica Monte Carlo Crudo y Monte Carlo Acierto – Rechazo.

## INTRODUCCIÓN

- Acerca del Modelo Digital del Terreno (MDT).

El término de MDT tuvo su origen en la década del 50, en el Laboratorio de Fotogrametría del Instituto de Tecnología de Massachussets. En 1958, trabajos realizados por Miller y Laflamme establecieron los primeros principios para el uso de los modelos digitales en el tratamiento de problemas tecnológicos, científicos y militares.
Jiménez (Cuba,1988) lo define como una masa de puntos representativos de una porción del terreno, expresados mediante sus coordenadas (x, y, z) almacenadas de forma adecuada para su procesamiento mediante la computadora.
Existen muchas otras definiciones de este término pero no difieren sustancialmente de la anterior.
En Cuba se han llevado a cabo varias investigaciones relacionadas con los MDT y sus aplicaciones, destacándose el ISPJAE y la UPR como los centros protagonistas de las mismas.

- Acerca de las técnicas de integración numérica Monte Carlo.

El término Monte Carlo fue introducido por von Neumann y Ulam, que lo utilizaron como contraseña para su trabajo secreto sobre la difusión de neutrones en los Alamos (EEUU) dentro del Proyecto Manhatan para la fabricación de la primera bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial.
Las técnicas Monte Carlo comenzaron a ser conocidas por la comunidad científica internacional a partir del año 1960 y bajo este nombre se agrupan un conjunto de técnicas y procedimientos matemáticos que poseen un elemento común: el empleo de números aleatorios. Estos permiten el cálculo de magnitudes difíciles de evaluar por otros métodos y pueden aplicarse tanto a problemas donde el azar desempeña un papel fundamental, como a fenómenos completamente deterministas que pueden admitir una reformulación apropiada en términos estadísticos.

## DESARROLLO

La estimación del volumen de madera es uno de los objetivos del inventario forestal y se realiza normalmente en $m^3$.

Entre los métodos para la determinación del volumen de madera están los procedimientos que permiten estimarlo mediante el conocimiento de su relación con variables de más fácil medición como lo son el diámetro y la altura. En este caso el diámetro que se emplea es el llamado diámetro normal (d) del árbol y se mide a una altura de 1,30 m sobre el nivel del suelo.

También es necesario conocer el factor de forma o coeficiente mórfico (f); que se expresa como:

$$f = \frac{V_r}{V_c}$$ donde

$V_r$ : Volumen real del árbol.

$V_c$ : Volumen del cilindro calculado en función del diámetro normal y de la longitud del árbol.

Conocidos los elementos anteriores, comúnmente es empleada la expresión:

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 . h . f$$ para estimar el volumen de un árbol en pie.

a) Estimación del volumen de madera aplicando Monte Carlo Crudo en un área forestal con especies de elevado coeficiente mórfico.

Mediante el MDT se puede disponer de las ecuaciones que modelan la superficie terrestre $S_1(x,y)$, que es continua sobre la región plana R que está representada por el nivel del mar y definida por:

$$R = \{(x, y) \in R^2 : x_0 \le x \le x_n \ , \ y_0 \le y \le y_m\}$$

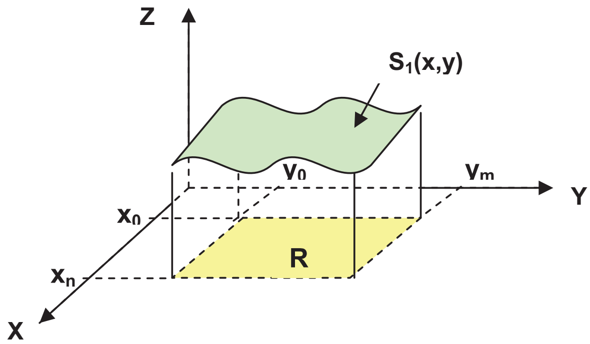


Fig 1: Representación gráfica de la superficie $S_1$ (x,y) sobre el nivel del mar R.

Bajo las condiciones anteriores se puede determinar el volumen de tierra $V_1$ a través del cálculo de la integral doble:

$$V_1 = \int_{y_0}^{y_m} \int_{x_0}^{x_n} S_1(x, y)\, dx\ dy$$

Mediante MC Crudo este cálculo se reduce a interpretar la integral anterior como el valor promedio de la función $S_1(x,y)$ en el recinto R multiplicado por el área de R, o sea:

$$V_1 = \left(\overline{S_1}\right)_R \cdot \iint_R dx\ dy \qquad (1)$$

Pero como que el área $A_R$ de la región R es:

$$A_R = (x_n - x_0)(y_m - y_0) = a \cdot b$$

Finalmente sustituyendo en (1) se tiene que:

$$V_1 = \left(\overline{S_1}\right)_R \cdot A_R = a \cdot b \left(\overline{S_1}\right)_R$$

Y en esta expresión se aplica el MC Crudo del modo siguiente:

Para calcular $\left(\overline{S_1}\right)_R$, se comienza por generar dos números aleatorios $r_1$ y $r_2$ distribuidos uniformemente en el intervalo [0,1] y se trasladan al recinto R, para obtener el par aleatorio (x, y) mediante las expresiones:

$x = x_0 + r_1 (x_n - x_0)$

$y = y_0 + r_2 (y_m - y_0)$

de este modo $x \in [x_0, x_n]$ y $y \in [y_0, y_m]$ y por tanto, el par aleatorio $(x, y) \in R$.

Se repite este procedimiento, obteniéndose N pares aleatorios $(x_i, y_i)$ que también pertenecen a R, y se determina $\left(\overline{S_1}\right)_R$ mediante la expresión:

$$\left(\overline{S_1}\right)_R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} S_1(x_i, y_i)$$

hasta que ella converja a un valor determinado con la precisión requerida.

Por lo que el volumen $V_1$ es:

$$V_1 = \frac{a \cdot b}{N} \sum_{i=1}^{N} S_1(x_i, y_i)$$

De la misma manera se puede obtener una función $S_2(x, y)$ que modele la superficie que contiene la copa de los árboles, esto consiste en la posibilidad de poder disponer mediante la fotografía aérea de un área forestal (R) de las cotas de las copas de los árboles a través del empleo del estereorrestituidor fotogramétrico.

Ahora se estima el volumen $V_2$ mediante:

$$V_2 = \frac{a \cdot b}{N} \sum_{i=1}^{N} S_2(x_i, y_i)$$

Este volumen se encuentra bajo la superficie $S_2$ y contiene completamente al $V_1$.

La diferencia $V_2 - V_1 = V_T$ representa el volumen limitado inferiormente por la superficie que modela el terreno ($S_1$) y superiormente por la superficie que modela la copa de los árboles ($S_2$). Luego el volumen $V_T$ incluye aire, follaje, madera de interés industrial, etc.

Es de interés estimar el volumen de madera (V) contenido dentro de $V_T$ y para hacerlo se puede proceder de la forma siguiente:

Se selecciona la muestra mediante una técnica apropiada, por ejemplo: el Muestreo Sistemático a n parcelas rectangulares de 1000 $m^2$ (50m x 20m) de superficie cada una.

De manera independiente, en cada parcela se determina:

(a) La cantidad de árboles (k) que existen en los 1000 $m^2$ de terreno.

(b) Los diámetros normales (a 1,30 m del suelo) de esos k árboles.

(c) Se estima el volumen de madera que existe en 1300 $m^3$ (1000 $m^2$ x 1,3 m) mediante:

$$v = \frac{\pi}{4}\left(d_1^2 + d_2^2 + K + d_k^2\right) \cdot h \cdot f \quad \text{con} \quad h = 1{,}30 \text{ m}$$

u otra expresión acorde a las características propias de la especie que contiene cada parcela.

Posteriormente, se determina la densidad volumétrica total en las n parcelas muestreadas empleando:

$$\rho_v = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i}{1300 \ . \ n} = \frac{V_E}{1300 \ . \ n}$$

Y finalmente a través de la proporción: $1300 \ . \ n \ ....... \ V_E$
$V_T \ ....... \ V(?)$

se estima el volumen de madera (V) que interesa mediante la expresión:

$$V = \frac{V_T \ . \ V_E}{1300 \ . \ n} = V_T \ . \ \rho_v$$

b) Estimación del volumen de madera aplicando Monte Acierto – Rechazo.
Como se dispone de la superficie $S_1(x, y)$ que modela el terreno y se desea estimar el volumen de tierra $V_1$, que está limitado por $S_1(x, y)$ y por la proyección de ésta sobre el plano XY (denotada por R y representada por el nivel del mar) o sea:

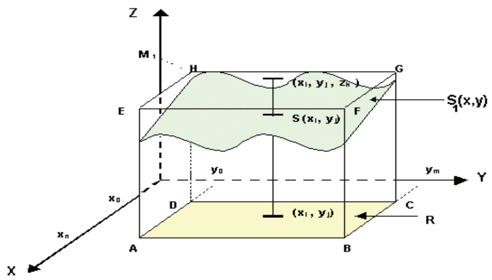


Fig. 2: Representación de la superficie $S_1$ y su proyección R sobre el plano XY

Se determina el punto $M_1$ que representa el valor máximo de la superficie $S_1$ sobre la región R ya definida.
Ahora se puede calcular el volumen $V_P$ del paralelepípedo ABCDEFGH, el cual contiene completamente al volumen $V_1$, y también está definido sobre la misma región R pero con una altura $M_1$, mediante la expresión:

$$V_P = \int_0^{M_1}\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} dx\,dy\,dz = (x_n - x_0)(y_m - y_0)\,M_1$$

Se conoce que:

$$V_1 = \int_{x_0}^{x_n}\int_{y_0}^{y_m} S_1(x,y)\,dy\,dx = \int_{x_0}^{x_n}\int_{y_0}^{y_m}\int_0^{S_1(x,y)} dz\,dy\,dx$$

Y por supuesto se sabe que $V_P > V_1$ sobre la región R.
Para estimar éste último se generan tres números aleatorios $r_1$, $r_2$ y $r_3$ distribuidos uniformemente en el intervalo [0, 1] y se trasladan al paralelepípedo mediante las ecuaciones:

$$x = x_0 + r_1 (x_n - x_0)$$
$$y = y_0 + r_2 (y_m - y_0)$$
$$z = r_3 M_1$$

de modo que $x \in [x_0, x_n]$ ; $y \in [y_0, y_m]$ y $z \in [0, M_1]$.
Se repite el procedimiento N veces; obteniendo N-ternas aleatorias $(x_i, y_i, z_i)$.

Si cada terna generada se encuentra dentro de $V_1$, se cuenta un acierto y si está fuera de $V_1$ se cuenta un error. Teniendo en presente que:
(a) Si $z_i > S(x_i, y_i)$ entonces está fuera de $V_1$ y se cuenta error (fallo).
(b) Si $z_i \leq S(x_i, y_i)$ entonces está dentro de $V_1$ y se cuenta acierto.
Se denota por NA la cantidad de aciertos y por NE la cantidad de errores o fallos, de modo que NA + NE = N.
Por lo que resulta:

$$V_1 = V_P \cdot \frac{NA}{N} = (x_n - x_0)(y_m - y_0) M_1 \cdot \frac{NA}{N}$$

De igual forma se procede a calcular el volumen $V_2$ que viene determinado sobre la región R por la superficie $S_2$ (x, y) obtenida como se explicó con anterioridad. De manera que:

$$V_2 = V_P \cdot \frac{NA}{N} = (x_n - x_0)(y_m - y_0) M_2 \cdot \frac{NA}{N}$$

Siendo $M_2$ el valor máximo de la superficie $S_2$ sobre la región R.
La diferencia $V_2 - V_1 = V_T$ representa, de la misma forma que en MC Crudo, el volumen que ocupado por el aire, el follaje, la madera, etc.
A partir de este momento se procederá como fue explicado anteriormente al valorar el método MC Crudo.

## CONCLUSIONES

- Se describe una metodología para estimar el volumen de madera de un área forestal perteneciente a un bosque artificial, que posee especies de elevado coeficiente mórfico, mediante las técnicas de integración numérica Monte Carlo Crudo y Monte Carlo Acierto – Rechazo a partir del conocimiento del Modelo Digital del Terreno.
- La metodología expuesta solamente debe ser aplicada en bosques artificiales (plantados por el hombre) por las características homogéneas que sus plantaciones poseen y para especies de baja conicidad.

## BIBLIOGRAFÍA

Abraham, S.; Fernández, P., Giménez, F. y Monreal, L. (2002). *Técnicas Monte Carlo aplicadas a la Integración Numérica y a la Resolución de Ecuaciones Diferenciales*. Valencia, España: Editorial UPV, SPUPV – 2002.2430.

Acuña, M. (2002). *Desarrollo y aplicaciones en Ingeniería Forestal de Modelos Digitales del Terreno*. Tesis por el título de Master en Matemática Avanzada aplicada a la Ingeniería, Facultad de Ingeniería Industrial (ISJAE), Ciudad de la Habana, Cuba.

Álvarez, M. y otros. (1998). *Matemática Numérica*. Ciudad de la Habana, Cuba: Editorial Félix Varela, ISBN 959 – 258 – 016 – 2.

Coffi, A. (1986). *El modelo digital del terreno y sus aplicaciones forestales*. Tesis para por el título de Ingeniero Forestal, Facultad de Agroforestal, Pinar del Río, Cuba.

Estévez, I. (1998). *Una Aplicación de Métodos Numéricos en la Ingeniería Civil*. Tesis por el título de Master en Matemática Avanzada aplicada a la Ingeniería. Facultad de Ingeniería Industrial (ISJAE), Ciudad de la Habana, Cuba.

Fernández, P. (1998). *Optimización en Ingeniería*. Valencia, España: Editorial UPV, SPUPV – 98.2152.