ESTRATEGIA PARA LA ENSEÑANZA DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Nélida Priemer – Graciela Lazarte
Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de Jujuy – Argentina
gerenciarvj@arnet.com.ar – grlazarte@arnet.com.ar –

Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado; Nivel educativo: Superior

Resumen

La definición delta–epsilon de límite de una función en general no es comprendida cabalmente por los estudiantes, quienes frecuentemente separan lo conceptual de lo algorítmico, y por ello, en un intento de mejorar su proceso de enseñanza–aprendizaje, es que hemos diseñado una estrategia didáctica para la enseñanza de este tema para los alumnos del primer año de la Facultad de Ingeniería.Presentamos el diseño de la estrategia, las actividades propuestas y el resultado de la experiencia áulica.

Introducción:

En los cursos de Cálculo se requiere una buena comprensión en los temas por su correlatividad en el desarrollo de la asignatura, y uno de los pilares fundamentales es el tema límite de una función, operación generadora de la derivación y la integración. Este tema en general no es comprendido cabalmente por los estudiantes, quienes frecuentemente separan lo conceptual de lo algorítmico, y por ello, en un intento de mejorar su proceso de enseñanza–aprendizaje, es que hemos diseñado una estrategia didáctica para la enseñanza de este tema para los alumnos del primer año de la Facultad de Ingeniería.
En la enseñanza tradicional los temas que se desarrollan dependen de las definiciones matemáticas de los conceptos involucrados y en particular en el tema límite la definición delta–epsilon resulta poco significativa para los estudiantes, de manera que se pierde valor en su aprendizaje cuando se debe realizar las conexiones entre las representaciones gráficas, numéricas y algebraicas debido a que " no entiende".
La presencia de prácticas sociales de la actividad humana como aproximar, buscar tendencias y otras, han permitido construir cierto tipo de conocimiento que conduce a la reconstrucción de significados en el área del Cálculo, significación que tuvimos en cuenta a la hora de diseñar esta estrategia.

Marco teórico

Como marco teórico del proceso de enseñanza–aprendizaje se considera la concepción de Vigotsky y de Piaget, la didáctica de la Matemática de Guy Brousseau, quien considera a las estategias áulicas como mediadoras del proceso de enseñanza–aprendizaje y el juego de marcos de Regine Douady.
La metodología de investigación que se ha utilizado para el diseño de esta estrategia se basa en la Ingeniería Didáctica. Se denomina ingeniería didáctica (Artigue, 1989) a una forma de trabajo didáctico equiparable al trabajo de un ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no puede hacerse cargo. Es importante destacar que el

término ingeniería didáctica se utiliza bajo un doble aspecto: como metodología de investigación y como producción de situaciones de enseñanza aprendizaje. En este último, el término ingeniería didáctica, según Douady (1996) designa un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo por un profesor–ingeniero, con el fin de realizar un proceso de proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos y en función de las selecciones y decisiones del profesor.

Diseño de la secuencia didáctica

En este diseño, enmarcado en el proyecto de investigación que se propone mejorar la enseñanza del Cálculo, se ha tenido en cuenta los siguientes lineamientos generales:

- la actividad del alumno es la base fundamental para el aprendizaje,
- el docente dirige sus esfuerzos hacia la búsqueda de la actividad cognoscitiva del alumno, promoviéndola y orientándola ,
- la organización de actividades grupales de manera que las ayudas mutuas permitan superar las dificultades
- el aprendizaje debe ser significativo y autónomo

Se ha organizado la estrategia empleando los componentes funcionales como la motivación, orientación, ejecución y control y se ha tenido en cuenta las etapas orientadoras material, verbal y mental del proceso de asimilación con sus correspondientes niveles en el plano didáctico: familiarización, reproducción, producción y creación.

Metodología

La estrategia se puso en marcha recurriendo a un seminario de tres encuentros de 2 horas cada uno, al que se invitaba a participar a los estudiantes que estaban cursando Análisis Matemático de las distintas carreras de la facultad. Participaron 37 alumnos.
En el primer encuentro se ha familiarizado a los estudiantes respecto a la forma de trabajo en el seminario, condiciones de asistencia y aprobación y se han conformado los grupos de trabajo, los que debían mantenerse en los tres encuentros. Se familiarizó a los alumnos en el empleo de: entorno, entorno reducido, intervalo, inecuación o desigualdades, inecuación con valor absoluto y las relaciones de equivalencia entre ellos.
Las actividades propuestas fueron desarrolladas por los distintos grupos en distintas etapas conforme a su grado de dificultad con los correspondientes controles por parte de los docentes y al final se discutieron los resultados, saltaron los aciertos y los errores, y se institucionalizaron las equivalencias pertinentes.
A modo de ejemplo, mostramos una de las actividades desarrolladas en este encuentro. Cabe aclarar que esta actividad es una de las últimas de la secuencia diseñada para el primer encuentro.

Actividad: Complete la siguiente tabla de manera que cada fila contenga expresiones equivalentes:

Como intervalo	Como entorno	Con notación de valor absoluto
	$x \in E(-5, 3)$	

$x \in (-6, 4)$		
		$0 < \mid x - 3 \mid < 1$
	$x \in E^*(3, 0.02)$	
$x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$		
		$\mid f(x) - L \mid < \varepsilon$

En el segundo encuentro se trabajó sobre la definición intuitiva de límite, las actividades propuestas transitaron del marco numérico al gráfico y se procuró que los alumnos pudieran expresar con palabras los resultados observados. También se propició la creación de problemas que involucraran límites y el intercambio de los mismos entre los grupos para su resolución y discusión. La resolución de estos problemas fue evaluada por el mismo grupo que la diseñó.

A cada grupo se entregó una tarjeta con las actividades, hubo 5 tarjetas diferentes, de igual consigna pero diferente función . La actividad siguiente es un ejemplo del trabajo realizado en el marco numérico

Actividad

1.- Dada $g(x) = (6x - 6) / (x^3 - 1)$

a) completar las tablas *(emplee seis cifras decimales)*

Nos aproximamos a 1 con valores de x menores que 1 $(x \to 1^-)$

x	0.2	0.5	0.9	0.99	0.995
g (x)					

Nos aproximamos a 1 con valores de x mayores que 1 $(x \to 1^+)$

x	1.8	1.5	1.1	1.01	1.005
g (x)					

b) Emplee los resultados de la tabla para sacar conclusiones respecto a los valores de la función en las proximidades de 1 .

c) Confeccione tablas para valores de x en las proximidades de 1 diferentes a la dada, una por cada integrante del grupo, y en conjunto elaboren conclusiones respecto a los valores de la función en las proximidades de $x_0 = 1$. Observe si las tablas brindan elementos que confirman o contradicen la conclusión anticipada en el punto anterior

d) Exprese en palabras el resultado del trabajo efectuado en los puntos anteriores y formalice esas palabras mediante la operación límite.

e) ¿Qué puede decir del valor de g en $x_0 = 1$?

En el tercer encuentro se plantearon actividades tendientes a encontrar un δ dado un ε determinado, en las cuales se trabajó gráficamente sobre ejemplos donde pudieron encontrar δ para cualquier ε y otros donde solo pudieron hacerlo para algunos ε . Para la expresión matemática de la aproximación a un punto se utilizaron las notaciones trabajadas en la actividad 1.

A modo de ejemplo, mostramos 2 actividades de la secuencia:

Actividad: Dada la función f(x) = x/2 + 1

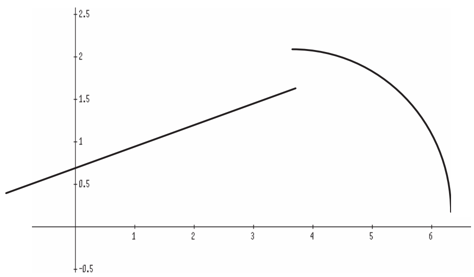
a) Obtener analíticamente el radio δ del entorno reducido de 4 de modo que los valores de f(x) pertenezcan al entorno E (3 , ½)
b) Idem si se quiere que f(x) pertenezca al entorno E (3 , 0.2)
c) Idem si se quiere que f(x) pertenezca al entorno E (3 , ε)
d) Indique con una implicación la relación que se cumple entre el entorno de x obtenido y el entorno de f(x) dado.

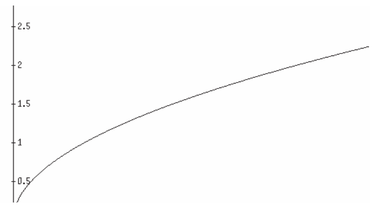
Actividad 4 A: Para el gráfico de cada función f:

a) Obtener gráficamente el radio δ del entorno reducido de x_o de modo que los valores de f(x) correspondientes pertenezcan E (L , ½)
b) Obtener gráficamente δ de modo que se cumpla la implicación:

I) $\forall$ x tal que x $\in$ E* (4, δ) $\Rightarrow$ f(x) $\in$ E (L , 0.2)

II) $\forall$ x tal que $0 < | x - 4 | < \delta$ $\Rightarrow$ $| f(x) - L | < 0.1$





Los estudiantes desarrollaron las actividades trabajando en pequeños grupos (no más de 4 alumnos).

A cada grupo se entregaron en forma secuencial, tarjetas con las actividades diseñadas para el desarrollo de la estrategia didáctica, en un plenario al final de la clase, se produjo el intercambio y discusión de los resultados de cada grupo además de la institucionalización de los conceptos analizados.

Los grupos se conformaron al azar, los estudiantes se agruparon según como estaban ubicados en el aula.

Desarrollo de las actividades. Comentarios.

En el primer encuentro se observó una buena disposición de los alumnos a trabajar sobre el concepto de límite, estos alumnos ya conocían este concepto debido a que el mismo había sido desarrollado en la asignatura de Cálculo que estaban cursando.

En esta jornada hubo dos momentos donde se procedió a la institucionalización de los conceptos y explicitación de los resultados de las actividades: en el primer momento se analizó el trabajo de los primeros problemas donde se transitaba de la notación de entorno a la de intervalo, en el segundo momento se analizó el trabajo de los problemas que agregaban las notaciones de desigualdad y valor absoluto. Las últimas actividades fueron las integradoras de la jornada, y dejaron preparado el camino para formalizar una aproximación en forma simbólica. Cada grupo debía entregar al día siguiente las actividades resueltas.

En el segundo encuentro, a partir de la presentación de la definición intuitiva de límite, se transitó del marco numérico al gráfico. Se discutió lo que pasaba con la función en el valor de análisis ya que las tarjetas contenían casos diferentes.

Además los grupos debían realizar la siguiente actividad:

Actividad: Proponer un enunciado con 4 condiciones en las que intervenga el límite que permita a los integrantes de otro grupo la representación gráfica de una función que las verifique.

Aquí se produjo el intercambio de enunciados. Dado que hubo aciertos y errores tanto en las resoluciones como en los enunciados propuestos, surgió un debate enriquecedor entre los diferentes grupos.
En el tercer encuentro se desarrollaron actividades diseñadas para que los alumnos descubrieran las exigencias o condiciones para la existencia del límite en términos de ε.
Se observó que al momento de formalizar la definición les resultó más simple expresar la proximidad mediante notación de entorno o bien empleando desigualdades sin valor absoluto.

Opinión de los alumnos

Al finalizar el seminario los estudiantes contestaron en forma individual un cuestionario que contenía preguntas de opinión como así también tres preguntas conceptuales relacionadas con la definición de límite. Se les pedía que opinaran sobre los aspectos positivos y negativos del seminario, sobre el trabajo grupal, sobre la claridad de las actividades propuestas, etc.
Sobre los aspectos positivos del seminario se mencionaron en orden de importancia:

- que fue un aporte para entender algo más del tema
- que valorizaron el trabajo en grupo, el buen diseño de las actividades y el mayor contacto con los docentes para aclarar dudas.

Sobre el trabajo en grupo, 34 de los 37 estudiantes opinaron que fue una buena experiencia para aprender.
Sobre los aspectos negativos los alumnos opinaron que debía haber tenido más duración el seminario, el 30% opinó que no tenía aspectos negativos para destacar. Algunos alumnos expresaron que esperaban que el seminario tratara sobre el cálculo algebraico de límite.
Transcribimos algunas opiniones interesantes vertidas en los cuestionarios mencionados:

. . . aprender de una forma más divertida, me ayudó a comprender más el tema y darme cuenta que tenía un conocimiento superficial a pesar que si me daban un límite, yo lo calculaba, ahora comprendo, no es solamente calcularlo con estrategias algebraicas sino que es más complejo e interesante…

. . . creo que lo bueno de este seminario es que uno puede llegar a profundizar en el significado de los conceptos, en este caso de límite, además no se basa en conceptos teóricos para explicar el mismo, sino con ejercicios que nos permiten ver con más claridad que significa o como se maneja un concepto que parece ser más complicado de lo que es, además tenemos la oportunidad de sacarnos las dudas a medida que avanzábamos y no dejar pasarlas. . .

. . . aporte lo que pensaba y me di cuenta que en algunos casos estaba equivocada. . .

. . . fue muy interesante ya que aprendí lo que no pensaba que iba a entender, que es teoría, como también a analizar los ejercicios antes de resolverlos. . .

Conclusiones

- Se observó que una vez conformados los grupos, hubo una rápida adaptación positiva a esa manera de trabajar en clase.
- En general los estudiantes captaron el sentido de la frase "suficientemente próximo" a un valor dado *(se dieron cuenta que no tenia demasiado sentido analizar la situación en valores medianamente alejados del punto de análisis)*
- Se desarrollaron actividades para que los alumnos descubrieran las exigencias o condiciones para la existencia del límite en términos de ε , en algunos grupos se logró el objetivo: *.. no para cualquier* ε *se cumple…* dijeron algunos estudiantes, *…no puedo encontrar* δ *…* dijeron otros.
- Se observó que al momento de formalizar la definición les resultó más simple expresar la proximidad mediante notación de entorno o bien empleando desigualdades sin valor absoluto.
- Las preguntas conceptuales referidas al tema límite del cuestionario fueron respondidas satisfactoriamente por el 86% de los alumnos.

En cuanto a la experiencia de construcción de la definición de límite se emplearon los marcos numérico, gráfico y algebraico. En este caso los marcos numérico y gráfico proporcionan una visión del concepto que debe complementarse con el marco algebraico para formalizar la definición.

Resultados

Por la situación en que actualmente ingresan los estudiantes a la Facultad de Ingeniería consideramos oportuno investigar para mejorar el proceso de enseñanza–aprendizaje del Cálculo.
Durante el desarrollo de las actividades se observó que la estrategia diseñada despierta mayor motivación e interés en el tema en los alumnos, trabajan con más entusiasmo posiblemente porque están compartiendo ideas con sus compañeros, y tienen más confianza en expresar sus opiniones o para pedir explicaciones cuando no entienden, lo que lleva que aprendan a su propio ritmo.
Así el trabajo en grupo para resolver la secuencia didáctica y el plenario final de cada encuentro permite que los alumnos logren una mayor comprensión y resignificación de los conceptos, lo que se observó en las preguntas que formulaban sobre los temas.
El empleo del juego de marcos en esta estrategia favoreció el aprendizaje significativo de los conceptos involucrados a partir de la intuición geométrica o numérica.

Bibliografía

Artigue, M. Douady, R. *et. al.(*1995*) Ingeniería didáctica en educación matemática*. México. Grupo Editorial Iberoamericana .

Bixio, C. (2001) . *Enseñar a Aprender*. Rosario. Argentina . Homo Sapiens Ediciones

Stewart, J. (1999) *Cálculo. Conceptos y Contextos*. Mexico. International Thomson Editores.

Zill, D. (1987) *Cálculo con Geometría Analítica*. México. Grupo Editorial Iberoamericana.

Edwards, C. y Penney, D. (1996) *Cálculo con Geometría Analítica*. México. Editorial Prentice Hall