ASPECTOS NUMÉRICOS Y GRÁFICOS DE LA DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR

Ricardo Cantoral Uriza⋆, Mario Sánchez Aguilar⋆ y Juan Gabriel Molina Zavaleta⋆
Cinvestav-IPN⋆, Cicata-IPN⋆. (México)
mosanchez@ipn.mx

Campo de investigación: pensamiento variacional. Nivel educativo: superior
Palabras clave: derivada de orden superior, gráficas, Newton, interpolación, pensamiento y lenguaje variacional

Resumen
En este trabajo se muestran algunos resultados de nuestras indagaciones sobre los significados y representaciones asociados con la derivada de orden superior. Estos resultados se plantean en contextos numéricos y gráficos; y son el resultado del estudio de algunas propiedades matemáticas, y el análisis de fuentes primarias como la producción astronómica de Isaac Newton (Newton, 1687). El trabajo se inscribe en la línea de investigación denominada Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) (Cantoral y Farfán, 1998).

Significados escolares asociados a la derivada de orden superior

Es evidente que en el discurso matemático escolar, existe una ruptura en los significados que se asocian a las derivadas sucesivas, a partir del orden tres: Mientras que en un contexto físico, sólo las derivadas primera y segunda tienen asignados los conceptos de velocidad y aceleración; en un contexto gráfico las relaciones entre las raíces de la derivada de una función y las graficas de sus correspondientes derivadas se limitan a máximos, mínimos y puntos de inflexión (Cantoral, 2005).
Dada esta situación, nos hemos enfocado en localizar significaciones que podrían ser asignadas a este concepto matemático de la derivada. Para tal propósito hemos realizado estudios de corte epistemológico y matemático que nos han generado distintos resultados que a continuación exponemos.

Sobre la obra de Isaac Newton: Aspectos numéricos

Es claro que Isaac Newton nunca trabajó con el concepto de derivada que conocemos hoy en día, pero es innegable que en su trabajo hace uso de objetos matemáticos con una estructura numérica muy similar al de la derivada. Veamos un ejemplo:
En los trabajos astronómicos de Newton (1687) aparece por primera vez un método de interpolación que posteriormente se publica en Newton (1711) bajo el nombre de *Methodus Differentialis*. Este método llama nuestra atención porque la estructura de su funcionamiento está basada en la idea de *diferencia*. Enseguida se hace una breve descripción del método.

En esencia, el Methodus Differentialis es un método aritmético de interpolación. En éste se considera un conjunto finito de puntos en un plano A, B, C, D, E, F, etc., a partir de los cuales se trazan los segmentos de recta AH, BI, CK, DL, EM y FN. Estos segmentos son perpendiculares a otro segmento de recta HN (ver figura 1).

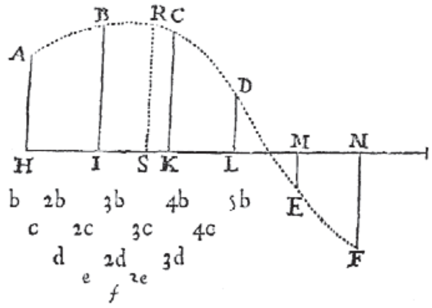

Figura 1. Gráfico que ilustra el Methodus Differentialis tomada de Newton (1687).

El objetivo principal de este método es encontrar la longitud o altura correspondiente a algún punto desconocido, que se encuentre en alguna posición intermedia, entre los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. En la figura 1 esta longitud desconocida se representa con el segmento *SR*. Evidentemente estas longitudes podrían actualmente interpretarse como los valores de las ordenadas correspondientes a los valores H, I, K, L, M y N en el dominio de una función.

Como se verá, el método hace uso de diferencias aritméticas y cocientes de éstas. Estos cocientes de diferencias se encuentran representados en la figura 3 con las expresiones que incluyen las letras minúsculas *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*. Los cocientes se encuentran definidos de la siguiente manera:

$$b = \frac{AH - BI}{HI},\ 2b = \frac{BI - CK}{IK},\ 3b = \frac{CK - DL}{KL},\ 4b = \frac{DL - ME}{LE} \text{ etc.}$$

$$c = \frac{b - 2b}{HK},\ 2c = \frac{2b - 3b}{IL},\ 3c = \frac{3b - 4b}{KM}, \text{ etc.}$$

$$d = \frac{c - 2c}{HL},\ 2d = \frac{2c - 3c}{IM}, \text{ etc.}$$

$$e = \frac{d - 2d}{HM}$$

Para calcular el valor de la ordenada que se desconoce, es necesario calcular los valores de a, p, q, r, s y t. Estos valores se encuentran definidos de la siguiente manera (tómese como referencia la figura 3):

$$\begin{array}{ll} a = AH & r = (q)(SK) \\ p = -HS & s = (r)(SL) \\ q = (p)(-IS) & t = (s)(SM) \end{array}$$

Finalmente, la longitud que se quiere conocer, representada en la figura 1 como *RS*, se encuentra definida por la siguiente expresión:

$$RS = a + bp + cq + dr + es + ft$$

Más allá de la derivada segunda: Aspectos gráficos

En nuestra disciplina, la matemática educativa, es muy difundido el hecho de que la utilización con propósitos didácticos de representaciones concretas de nociones matemáticas, tales como gráficas o imágenes, suelen tener la propiedad de favorecer entendimientos en los estudiantes. Estos entendimientos pueden ir de acuerdo con el significado que la matemática les asigna o contradecirse en algunas relaciones de ésta, una amplia discusión de estos asuntos se puede consultar en Fischbein (1987). Nuestro interés de explorar representaciones concretas y sus propiedades matemáticas originan este trabajo, en él examinamos las *formas graficas* que se reflejan sobre la grafica de una función polinomial $P(x)$, cuando la derivada de orden superior cumple la condición $P^k(x) > 0$, donde k es el orden de la función derivada. En el taller se tuvo la intención de trabajar con un caso particular de estas funciones, una que fuera representativa de las funciones polinomiales de raíces simples, ello en virtud del orden que elegimos para desarrollar la investigación en curso, dentro de la cual en otro momento exploramos la función seno, al respecto se puede consultar en Sánchez y Molina (2006).

En este documento tratamos una situación matemática interesante, la relación entre las raíces de la familia de polinomios $P(x)$ de raíces simples, con la raíz de la derivada de orden *n-1*. Consideremos un caso particular, la función:

$$P_1(x) = \tfrac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6):$$

En la figura 2 mostramos la representación gráfica de la función $P_1(x)$, la sección resaltada es una región donde la derivada de orden *5* de $P_1(x)$ es mayor que cero, es decir $P_1^5(x) > 0$. La forma que describe tal región es a lo que nos referimos con el término *forma gráfica* de la derivada de orden 5, ahora bien, esta forma gráfica tiene algunas propiedades, nos enfocaremos en una de ellas: En el par ordenado que determina en la gráfica el inicio de la forma, su valor de *x* es equivalente al promedio de las raíces de la función $P_1(x)$.

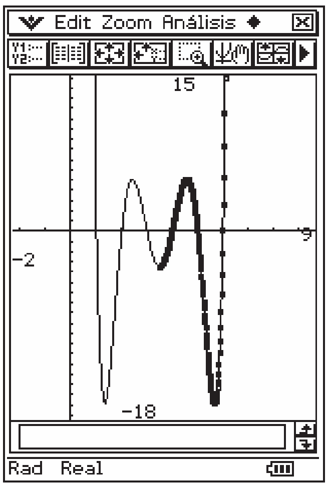

Figura 2

Al calcular el promedio de las raíces de $P_1(x)$ resulta el valor $\frac{7}{2}$, luego al determinar la derivada de orden 5 de $P_1(x)$, tenemos $P_1^5(x) = 720x - 2520$, la cual tiene como raíz el valor $\frac{7}{2}$. Esta es una propiedad sencilla pero interesante, una explicación es la siguiente:

Consideremos el polinomio $P(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots + A_0$. Es sencillo mostrar que si se tiene una función $f(x) = ax^n$, que va de $\Re$ en $\Re$, con $n \in N$, la derivada de orden k de $f(x)$ está determinada por:

$$f^k(x) = {}_nP_k a x^{n-k}, \text{ para } k \leq n$$

Ecuación 1. La expresión ${}_nP_k$ se lee "n permutaciones de tamaño k"

Con ayuda de la ecuación 1 se calcula la derivada de orden n-1 de $P(x)$, para llegar a la expresión: $P^{n-1}(x) = {}_nP_{n-1}A_n x + {}_{n-1}P_{n-1}A_{n-1}$

La cual es una ecuación de primer grado, ésta se iguala a cero y se despeja x para encontrar su raíz:

$P^{n-1}(x) = 0$ ${}_nP_{n-1}A_n x + {}_{n-1}P_{n-1}A_{n-1} = 0$ $A_n x = \frac{-{}_{n-1}P_{n-1}A_{n-1}}{{}_nP_{n-1}}$ $x = \frac{-(n-1)!\,A_{n-1}}{A_n n!}$ $x = \frac{-A_{n-1}}{A_n n}$ *Ecuación 2*. El valor de la raíz de la derivada de orden n-1 del polinomio $P(x)$.	Por otra parte, dada una función polinomial de grado n: $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n)$, donde $n \in N \wedge r_n \in \Re$

Entonces los coeficientes $P(x)$ están determinados por las fórmulas de Viète[§§§§], si $P(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots + A_0$ de allí se tiene que los coeficientes de $P(x)$ expresados en notación sumatoria corresponden con los siguientes:

[§§§§] Ver Kurosch (1994). En esta fuente las fórmulas de Vieté no se expresan en notación sumatoria, fue elección nuestra este formato porque se utilizó para facilitar otros cálculos.

$$A_n = 1$$
$$A_{n-1} = -\sum_{k_1=1}^{n} r_{k_1}$$
$$A_{n-2} = \sum_{k_1=1}^{n-1} r_{k_1} \sum_{k_2=k_1+1}^{n} r_{k_2}$$
$$A_{n-3} = -\sum_{k_1=1}^{n-2} r_{k_1} \sum_{k_2=k_1+1}^{n-1} r_{k_2} \sum_{k_3=k_2+1}^{n} r_{k_3}$$
$$A_{n-4} = \sum_{k_1=1}^{n-3} r_{k_1} \sum_{k_2=k_1+1}^{n-2} r_{k_2} \sum_{k_3=k_2+1}^{n-1} r_{k_3} \sum_{k_4=k_3+1}^{n} r_{k_4}$$
$$\vdots$$
$$A_0 = (-1)^n \sum_{k_1=1}^{1} r_{k_1} \sum_{k_2=k_1+1}^{2} r_{k_2} \sum_{k_3=k_2+1}^{3} r_{k_3} \cdots \sum_{k_n=k_{n-1}+1}^{n} r_{k_n}$$

Ahora bien, si tomamos los coeficientes de Viète: A_n y A_{n-1} y los sustituimos en la ecuación 2, tendremos que:

$$x = \frac{-(-\sum_{k_1=1}^{n} r_{k_1})}{1(n)}$$

$$x = \frac{\sum_{k_1=1}^{n} r_{k_1}}{n}$$

Es decir, el valor de la raíz de la derivada de orden n-1 del polinomio $P(x)$ es igual al promedio de las raíces del polinomio *P(x)*.

Comentarios finales

En el methodus differentialis, y en particular en los cocientes de diferencias representados por b, $2b$, $3b$, $\ldots d$, $2d$ y e; es posible identificar *versiones primitivas* de la derivada de orden superior. Esto se afirma con base en el comportamiento y propiedades que estos objetos matemáticos presentan. En los textos de Análisis Numérico puede verificarse que estos cocientes de diferencias poseen propiedades equivalentes a aquellas de la derivada de orden superior; por ejemplo la posibilidad de proveer información acerca del comportamiento gráfico de una función, como los intervalos en que ésta crece o decrece, o los intervalos donde es concava hacia arriba o hacia abajo (véase por ejemplo el tema de *diferencias divididas*, en Maron y López, 1995). Nuestra investigación continuará indagando acerca de los *usos* prácticos que Newton daba a este método en particular con la finalidad de encontrar más significaciones que posiblemente se pudieran asignar, en un contexto escolar a la derivada de orden superior.

Por otro lado, el escrito también centra su atención en las relaciones matemáticas que se pueden reflejar en las gráficas de funciones polinomiales, en relación con derivadas de orden superior. Nos referimos a las formas gráficas, pues son representaciones concretas que podrían desempeñarse como mediadoras para favorecer nuevos entendimientos en el estudiante. Por esta razón consideramos importante entenderlas y evaluar utilidad en la escuela, con el ambicioso propósito de extender el estudio de la derivada en la clase de Cálculo, y llegar más allá de la derivada segunda. Otras relaciones matemáticas se han encontrado entorno a estas formas gráficas, sin embargo por motivos de espacio no es posible comentarlas en este texto.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2005). Sobre las derivadas de orden superior. [eActivity], México: Casio Computer Co. Ltd, Disponible en: http://classpad.net/members/download/eactivities/calculus_es.html

Cantoral, R. y Farfán, R.M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon 42*, 353 – 369.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*.

Holanda: Reidel.

Kurosh (1994). *Curso de Álgebra Superior*. Limusa: México.

Maron, M.J. y López, R.J. (1995). *Análisis numérico. Un enfoque práctico*. México: CECSA.

Newton, I. (1687). *Philosophia Naturalis Principia Mathematica*. Jussu Soc; Regiæ ac Typis J. Strater, Londini.

Sánchez, M. y Molina, J.G. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: Una aplicación al estudio de la derivada. En G. Martínez-Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 19, pp. 739-744). CLAME: México.