

LA EMERGENCIA DE LOS LOGARITMOS COMO HERRAMIENTA PARA FACILITAR CÁLCULOS

Marisol Hernández Sánchez, Marcela Ferrari Escolá
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. (México)

mhs021084@yahoo.com.mx, marcela_fe@yahoo.com.mx

Campo de investigación: socioepistemología. Nivel escolar: medio

Palabras clave: Progresiones, Propiedades logarítmicas

Resumen

En la presente investigación, adherida a la aproximación socioepistemológica y donde se toma como metodología la ingeniería didáctica, se propone una secuencia matemática para la introducción al tema de los logaritmos, en particular dos de sus propiedades (logaritmo del producto y del cociente).

Para realizar el diseño de la secuencia y en general, la investigación, se adoptó como marco referencial el trabajo de Ferrari (2001); en él enuncia tres momentos en el desarrollo de los logaritmos. Particularmente abordamos el primer momento denominado *logaritmos como transformación numérica*, época en la cual (siglo XVI y XVII), personajes como, Stifel, Napier y Briggs relacionaban progresiones geométricas con aritméticas, aún sin hablar formalmente de logaritmos, en el caso de Stifel.

Introducción

La investigación tiene como marco referencial la investigación titulada “Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo”, realizada por Ferrari (2001), la cual atiende el problema de la ausencia de significado al estudiar los logaritmos, dado que, primero se les presenta como una herramienta facilitadora de cálculos, para después ser definida como una integral. Entonces enuncia, tres momentos en la vida de los logaritmos como una breve síntesis de su evolución:

- **Logaritmos como transformación:** *en el que están definidos y enmarcados en el registro numérico en el cual, pese a que no habían sido formalmente definidos, se explora la relación, entre progresión geométrica y aritmética, en busca de extender el rango de los números y de facilitar los cálculos que por la magnitud de las cifras involucradas demandaban tediosas y complicadas operaciones.* (Ferrari, 2001)
- **Logaritmos como modelizadores:** *momento de definición de la noción de extensión y caracterización de la misma en otros registros y contextos en donde la relación entre las progresiones se torna fundamental.* (Ferrari, 2001)
- **Logaritmos como un objeto teórico:** *se les dota de una definición formal, lejana a la publicada por Napier. Se les incorpora en el cuerpo teórico matemático como la inversa de la función exponencial, y como aquella función que convierte un producto en suma. Se conserva la esencia de los logaritmos, no así su relación explícita con las progresiones y otras características que han desaparecido del léxico escolar* (Ferrari, 2001).

Nuestra investigación tiene como marco teórico la socioepistemología, la cual *considera necesario dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza* (Cantoral y Farfán, 2003).

A partir del análisis socioepistemológico reportado en Ferrari (2001), se pretende profundizar en el primer momento y reflexionar sobre su acercamiento al discurso matemático escolar actual, utilizando para ello la Ingeniería Didáctica. Justamente, en su primera etapa, análisis preliminar, presentamos algunas ideas de trabajos hechos por Stifel (siglo XVI), Napier y Briggs (siglo XVII), los cuales trabajaban relacionando progresiones geométricas con aritméticas y su acercamiento a los logaritmos. También se realizó una revisión de los libros de texto de primaria, secundaria y bachillerato, para ver con qué elementos se juega en la primaria y secundaria, y cómo se aborda el tema de los logaritmos en bachillerato.

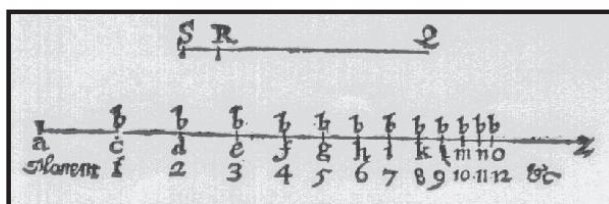
Contando ya, con elementos del análisis preliminar, se sigue con el diseño de una secuencia matemática y su análisis *a priori*. En esta etapa se trata de retomar elementos que le han dado vida a los logaritmos como facilitadores de cálculos, momento que se desea abordar. El diseño, influenciado por el acercamiento socioepistemológico de referencia, se articula en tres fases: manejo de patrones, utilización de las propiedades, uso de patrones y propiedades; mediante las cuales se desea observar aquellos argumentos, discusiones y consensos que pudieran generarse desde esta óptica. Se aprovecharon también ciertos elementos de nuestro análisis preliminar, para reflexionar sobre las ideas puestas en juego en el diseño, observando los argumentos que se espera que surjan y decidir las acciones a realizar en la puesta en escena.

Finalmente se presentan, la gestión del diseño y el *análisis a posteriori*, así como reflexiones sobre lo sucedido.

Análisis Preliminar

En este apartado se reportan los trabajos realizados por Stifel, Napier y Briggs, para ver los elementos que le dieron vida a los logaritmos como una herramienta facilitadora de cálculos. Además, de la revisión de los libros de texto de primaria, secundaria y bachillerato.

Es Napier (1550-1617), matemático escocés, quien da el nombre *logaritmos*, refiriéndose a ellos *como la relación espacio-velocidad de dos puntos moviéndose con velocidad constante uno y decreciente en progresión geométrica el otro* (Ferrari, 2001).



Napier trabajaba a los logaritmos por medio de senos que en esa época (siglo XVII) eran magnitudes de segmentos. Varios son los eruditos de la época que estudian su obra, y de ellos surge Briggs (1556-1631), matemático inglés, que viaja a Escocia para discutir con el autor la primera tabla de logaritmos; se establece ahí una estrecha relación entre estos dos personajes. Así, trabajan sobre una primera tabla en la cual ya no se utilizan magnitudes de segmentos, sino se introducen en el ámbito de los números, tomando además al 10 como base para facilitar los cálculos.

Una de las contribuciones de Briggs fue proponer el par (1,0), ya que toda relación entre una progresión geométrica y una aritmética, permitía hablar de un sistema logarítmico, según Napier, sin embargo, este sistema no facilitaría cálculos, lo cual sería resuelto con la introducción del par (1,0) en dicho sistema (Figura 1).

Figura 1

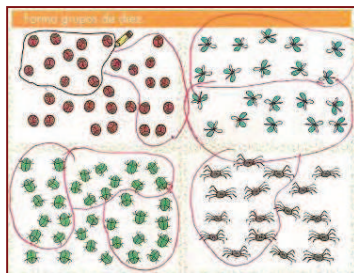
	A	B	C	A	B	C	A	B	C
	1	0	0000	1	0	000000	1	0	00000000
	10	1	1000	3	1	047712	2	1	03010299
	100	2	+ 0	9	2	095424	4	2	06020599
x	1000	3	= 0	27	3	143136	8	3	09030899
=	10000	4	= 0	81	4	190848	16	4	12041199
	100000	5	5000	243	5	238561	32	5	15051499
	1000000	6	6000	729	6	286272	64	6	18061799

Sin embargo, antes de que Napier enunciara propiamente a los logaritmos, hubo un personaje M. Stifel (siglo XVI) quien observaba la relación entre progresiones aritméticas con geométricas, particularmente se interesó por lo que ahora se conoce como la propiedad del logaritmo del producto. (Figura 2)

Figura 2

...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
...	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	...

Por otro lado, buscando algunos elementos que definen a los logaritmos como herramientas facilitadoras de cálculos, (completar patrones o relacionar progresiones y precisamente facilitar cálculos), se revisaron los seis libros de texto de matemáticas de nivel básico y algunos libros de primer año de nivel medio superior. Esto con el fin de saber si estos elementos efectivamente se trabajan desde la primaria hasta llegar a bachillerato, donde se definen formalmente las propiedades de los logaritmos, en búsqueda de cierto paralelismo entre la construcción socio-cultural e histórica y la escolar.



Nivel Básico

Una actividad propuesta en primer año de primaria, como ejemplo de actividades que denominamos *facilitar cálculos*, es la que aparece en la imagen, donde se les pide agrupar de diez para decir de qué clase de insectos hay más. De este tipo de actividades sólo se encontraron en los primeros cuatro años.

Completa las siguientes tablas:

x7	1	2	4	6	8	12	14	16	18	20
	14	28	56	84	112					
x5	3	6	9	12	17	25	27	30		
	45	75	105							

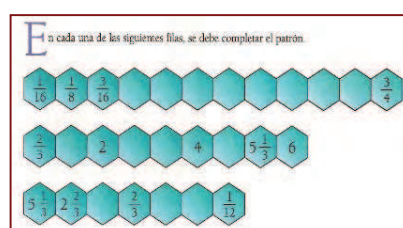
En los seis años de primaria, se encontraron actividades que denominamos *manejo de patrones*. En la imagen se muestra una actividad en donde se les pide que completen dos tablas, multiplicando por un determinado número los elementos de la columna superior para encontrar los de la inferior.

superior para encontrar los de la inferior.

A manera de conclusión de la revisión de textos de nivel básico se dice que, en los primeros dos años, se les da un primer acercamiento a lo que sería facilitar cálculos, ya que se les pide agrupar, en vez de contar elemento por elemento de determinados conjuntos. En cuanto al manejo de patrones, todas las tablas (de los seis grados) muestran solamente progresiones aritméticas, sin embargo, estas se van relacionando, cada tabla, con diferentes incrementos. Tanto los incrementos como los elementos cada vez son mayores y esto hace que tengan un mayor grado de dificultad.

Nivel medio

Se revisaron tres libros de matemáticas que la S.E.P. otorga a estudiantes de secundaria, con los mismos propósitos que los de nivel básico. En ellos, sólo se encontraron actividades que denominamos *manejo de patrones*, un ejemplo de ellas nos lo muestra la figura, en la cual sólo se les pide completar los patrones de las filas mostradas, los cuales involucran progresiones aritméticas y geométricas.



Nivel medio superior

Se revisaron tres libros, los que se consideraron relevantes, para observar cómo se trabajan los logaritmos, los cuales son, Caballero et al (1971), Lehman (2001) y Colectivo de Autores U.A.G. (2001) y lo que se encontró fue que los tres libros son muy similares, ya que definen a los logaritmos como “el exponente al que hay que elevar un número llamado base para encontrar dicho número”, y muestran las propiedades de estos, por medio de las leyes de los exponentes; además dan un cúmulo de ejercicios para aplicar la definición y las propiedades de los logaritmos. El único que se diferencia de los tres, es el Caballero et al (1971), ya que empieza a dar un poco de historia del surgimiento de los logaritmos, sin embargo, no retoma nada de esa parte para el tratado de este tema.

Diseño de la secuencia matemática

Como ya se mencionó en esta investigación se propone una secuencia matemática la cual se diseñó tomando en cuenta los datos encontrados en el análisis preliminar, y en la que se pretende rescatar los elementos que le dieron vida a los logaritmos como herramientas facilitadoras de cálculos, ya que estos aunque son manejados en el nivel básico al llegar al bachillerato se dejan a un lado y se recurre a los exponentes y sus leyes para definir a los logaritmos.

Dentro de la secuencia se consideran tres etapas o fases, las cuales son: manejo de patrones, utilización de las propiedades, uso de patrones y propiedades. El objetivo de la primera fase es observar y usar los patrones que contienen las fichas, es decir, la progresión aritmética y geométrica. En la segunda fase se observan las propiedades del logaritmo del producto y del

cociente, sin embargo también se hace uso de ellas. Para la tercera fase, se conjuntan las dos primeras, es decir, en ésta, observan nuevas progresiones pero que tienen las mismas características, hacen uso de ellas y de las propiedades que ya pudieron observar y trabajar.

Se espera que por el paso de las cinco actividades de la secuencia, los estudiantes se apropien de elementos importantes para la construcción de ideas logarítmicas.

Algunos resultados

Se realizó una puesta en escena con tres alumnos de primer semestre de bachillerato, la cual fue de una sola sesión que tardó aproximadamente hora y media.

Algunos resultados que se obtuvieron de dichas puesta, fueron, en la primera fase si pasó lo que se esperaba, es decir, que se observara y entendiera el patrón de ambas progresiones y que hicieran uso de dichos patrones para poder encontrar las fichas que se les pedían.

2 4 8 16 32 64
1 2 3 4 5 6

Porque los números que se dan son el doble del anterior.

Para la segunda fase, en donde se trabaja con las propiedades del logaritmo del producto y del cociente, al menos de manera intuitiva se dieron cuenta de lo que ocurría con los números inferiores, es decir que se sumaban y se restaban (respectivamente), sin embargo, no le dieron mucha importancia y no hicieron uso de esto para resolver la actividad y ahorrarse los cálculos, que era lo que se esperaba que hicieran. Sin embargo, al concluir esta actividad hicieron una reflexión verbal, de que si en los números superiores se multiplicaba abajo se sumaba y si por el contrario arriba se dividía, abajo se restaba; lo cual, es una primera idea de las propiedades del logaritmo del producto y del cociente, respectivamente

Para la tercera fase, en la que se conjuntan las dos primeras, se hicieron varias intervenciones, ya que a pesar de que en la fase anterior, habían observado de manera intuitiva las propiedades aquí trabajadas, no las usaron para resolver esta última fase, es por eso, que se les recordó lo que habían hecho en las otras dos fases y así empezaron a utilizar las propiedades y no a multiplicar reiteradamente.

De manera general se puede decir que, la puesta en escena fue muy fructífera, ya que arrojó datos interesantes para pensar en un rediseño de la secuencia. Esto porque a pesar de que se cumplieron los objetivos de las tres fases de la secuencia, no se cumplió que relacionaran las dos progresiones, ya que en realidad siempre las vieron por separado.

Conclusiones

Al revisar los elementos que se reportaron en el análisis preliminar, se observó que aún cuando existen elementos importantes en el nivel básico y medio, como las actividades de *facilitar cálculos*, es decir, de propiciar la idea de agrupar en vez de contar elemento por

elemento, o lo que es lo mismo, multiplicar en vez de sumar, o las actividades de *manejo de patrones*, éstos no son retomados para el tratado de los logaritmos en el bachillerato.

Históricamente, la construcción de los logaritmos, ha sido sustentada y alentada por su vinculación a las necesidades de facilitar cálculos, respuesta que surge al explicitar la relación entre dos tipos de crecimientos diferentes: aquel que responde a una razón geométrica y aquel que lo hace a una razón aritmética.

Es por eso que se diseñó una actividad que propiciara la aparición de los logaritmos, particularmente, como herramienta facilitadora de cálculos, en la cual se tratan ciertos elementos que conlleva relacionar progresiones.

El diseño contempla tres fases (manejo de patrones, utilización de las propiedades y uso de patrones y propiedades), el cual genera cierto acercamiento a lo logarítmico, mediante discusiones y consensos de distinta índole.

Referencias Bibliográficas

- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.
- Ávila, A., Balbuena, H., Bollás, P. (1997). *Matemáticas. Cuarto grado*. Comisión Nacional de Libros Gratuitos. México, D.F.
- Block, D. et al. (2000). *Matemáticas. Primer grado*. Complejo Editorial Mexicano. México, D.F.
- Caballero, A., Martínez, L. y Bernardez, J. (1971). *Matemáticas tercer curso*. Esfinge. México, pp. 356-389.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa*. 6(1), 27-40.
- Colectivo de autores U.A.G. (2001). *Matemáticas, aritmética y álgebra*. México. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría sin publicar. AES. DME Cinvestav-IPN.
- Lehman, C. (2001). *Álgebra*. Limusa. México, D.F., pp. 375-398.