IDENTIFICACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS SEMIÓTICOS EN UNA TAREA DE GEOMETRÍA

Carlos Parodi, Estela Rechimont, Nora Ferreyra
Facultad de Ingeniería, Facultad Ciencias Exactas y Naturales (U.N.L.Pam) Argentina.
parodic@ing.unlpam.edu.ar Rechimont@exactas.unlpam.edu.ar – francis@cpenet.com.ar
Campo de Investigación: Didáctica de la Matemática

Resumen
En el marco de una investigación sobre dificultades en el aprendizaje de temas de matemática, tratamos de identificar los significados semióticos que se ponen en juego en actividades que involucran procesos de demostración. En esta ocasión nuestra investigación recae sobre un tema de geometría desarrollado en el texto "Matemática 9 EGB" (Andrés, 2001). Este análisis es una etapa previa de un análisis ontológico-semiótico que aportará al análisis didáctico-matemático elementos que permitan identificar el sistema de entidades en juego en el estudio de semejanzas de triángulos y que involucra un proceso de demostración. La técnica propia de dicho análisis semiótico permite vislumbrar los significados presentes en la actividad que está siendo analizada y muestra la complejidad que encierra la noción en cuestión.

Introducción

La técnica que involucra el análisis ontológico - semiótico nos permite vislumbrar los significados presentes en la actividad matemática particular que esta siendo analizada. Este análisis es considerado por Godino "microscópico", sin embargo su amplitud no queda reducida a una actividad puntual como es el uso de términos y expresiones, sino que desde una mirada más general, este análisis nos permite "*describir la estructura semiótica de una organización matemática compleja implementada en un proceso de estudio particular*" [Godino, 2004]

En el marco de una investigación sobre las dificultades en el aprendizaje de algunos temas de matemática y en particular en los procesos de argumentación, justificación o fundamentación de conceptos presentes en la solución de algunas situaciones - problemas, hemos querido identificar los significados (Godino 2004) que se ponen en juego en estas actividades matemáticas, principalmente en una actividad que involucre procesos de demostración.

En este proyecto comenzamos por disponer de textos correspondientes a lo que actualmente es el Tercer Ciclo de EGB editados en distintas épocas en nuestro país, en la que sobre algunos contenidos de geometría tratan los procesos argumentativos con herramientas geométricas similares pero dando a la demostración enfoques diferentes. En esta ocasión hicimos el análisis tomando un texto en particular "Matemática 9 EGB" (Andrés, M y otros, 2001), cuya elección correspondió a su mayor implementación en el aula, y en el que se registra la actividad matemática desarrollada que nos interesa, la semejanza de triángulos.

Unidades semióticas y significado institucional

Este análisis consistirá en descomponer la actividad matemática del texto en unidades y subunidades que J. Godino (2004) llama *Unidades semiótica*. Cada una de las unidades están caracterizadas por contener algunos de los seis tipos de funciones semióticas que "atendiendo al plano del contenido (significado)" [Godino, 2004] designa como: *Significado lingüístico*, *significado situacional*, *significado conceptual*, *significado preposicional*, *significado actuativo* y *significado argumentativo*.

Haremos una breve descripción de cada uno de ellos rescatando ejemplos del texto seleccionado y del contenido matemático elegido para hacer el respectivo análisis.

a) *Significado lingüístico*: cuando el objeto final, o contenido de la misma, es un término, expresión, gráfico u otro elemento lingüístico.

Por ejemplo: el símbolo $\overset{\Delta}{abc}$ hace referencia a un triángulo cuyos vértices son nombrados con las letras **a**, **b** y **c**.

b) *Significado situacional*: cuando el objeto final es una situación - problema.
Por ejemplo: la expresión "El triángulo azul está construido *en escala* a partir del amarillo, o sea que tiene igual forma pero diferente tamaño." acompañado de la gráfica correspondiente nos remite a la situación - problema de determinar la semejanza entre los triángulos intervinientes.

c) S*ignificado conceptual*: diremos que una correspondencia semiótica es de tipo conceptual cuando su contenido es un concepto - definición.
Por ejemplo: en la expresión "Dos triángulos son semejantes si tienen: ..." la palabra "triángulo" nos remite a un concepto - definición.

d) *Significado proposicional*: cuando el contenido es una propiedad o atributo de un objeto.
Por ejemplo: las expresiones "sus ángulos respectivamente iguales" y "sus lados correspondientes proporcionales" nos remiten a relacionar diferentes conceptos como ser el de ángulos y ángulos iguales.

e) *Significado actuativo*: diremos que una función semiótica es de tipo actuativo cuando su contenido es una acción u operación.

Por ejemplo: la expresión "en el triángulo $\overset{\Delta}{xyz}$ trazamos el segmento $\overline{uv}$, (paralelo a $\overline{yz}$), ... " su contenido es una acción que nos remite al trazado de un segmento paralelo a otro.

f) *Significado argumentativo*: cuando el contenido de la función semiótica es una argumentación.
Por ejemplo: la expresión "aplicamos el teorema de Thales" se refiere a una argumentación que en este caso fue previamente trabajado.

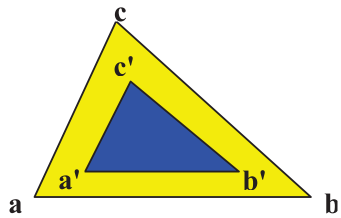
En esta ocasión nuestra investigación recae sobre la exposición de un tema en el libro de texto "Matemática 9 EGB" (Andrés, M y otros, 2001) enfocando nuestro estudio sobre la faceta institucional ya que se ponen en juego objetos institucionales que son utilizados como referencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Haremos una identificación de los significados semióticos, pero no incluiremos una descripción del *significado institucional de referencia* para el objeto considerado. Ya que un análisis ontológico - semiótico de un texto requiere no solo de la descomposición en *unidades*, sino que se deberán identificar las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos (Godino, 2004).
Este análisis es una etapa previa de un análisis ontológico - semiótico y que aportará al análisis didáctico - matemático elementos que permitan identificar el sistema de entidades en juego en el estudio de semejanzas de triángulos y que involucra un proceso de demostración. Si bien este análisis está orientado a describir el *significado*

institucional pretendido no dispondremos del patrón de referencia correspondiente (*significado institucional de referencia)*
Este análisis, que tiene el carácter de un análisis a priori, nos mostrará la complejidad que encierra esta noción y principalmente un proceso de demostración.

Unidades Primarias de Análisis
Se transcriben del texto correspondiente las diferentes Unidades y Subunidades en que han sido clasificadas y fueron identificadas con el símbolo (1). Seguido de lo cual se desarrollan cada una de las unidades semióticas correspondientes identificando los tipos de funciones semióticas involucradas.

Unidad 0
U.0. El título **Triángulos Semejantes** nos introduce a la faceta que identificamos como sistémico (compuesto) al considerarlo compuesto por entidades mas simples con cierta organización, sin embargo puede ser una faceta elemental (unitaria) no solo por ser el primer objeto del capítulo correspondiente a "Semejanzas y trigonometría" sino que acompañan al sistema de prácticas operatorias e incluso discursivas de todo el capítulo.

Unidad 1
1 El triángulo azul está construido *en escala* a partir del amarillo, o sea que tiene igual forma pero diferente tamaño.♦



U1. Si bien la situación planteada no responde a una situación real, en el sentido que los triángulos no parten, por ejemplo, de lo que podría ser una superficie de terreno triangular inscripta en otra de mayor tamaño, constituye un *significado situacional* ya que en el texto presenta una situación en la que se encuentran triángulos inscriptos representados en una gráfica. Observamos que el *significado conceptual* de triángulo se remite a un concepto antes trabajado al igual que cuando hace referencia a la escala.
En esta ocasión habla de "igual forma" como así también de "igual tamaño", conceptos que son mas bien intuitivos a los efectos de describir la gráfica presentada que constituye en este caso el *significado lingüístico* utilizado por los autores.

Unidad 2
1 Los llamamos **triángulos semejantes**, y lo simbolizamos así:

$$\overset{\Delta}{abc} \sim \overset{\Delta}{a'b'c'} \ ♦$$

U2. Evidentemente el *significado lingüístico* utilizado permite hacer corresponder su designación en lengua natural con símbolos que encierran su propio significado. Por un lado $\overset{\Delta}{abc}$ al igual que $\overset{\Delta}{a'b'c'}$ nos describe dos triángulos y su distinción no puede ser dejada de lado al estudiante. Es decir que el hecho de diferenciarlos con las comillas deberían abstraer la idea de distinción (en este caso evidente por la gráfica) pero que encierra la posibilidad de que sus vértices coincidan, en cuyo caso no tan evidentes. Además nos remite a actuar escribiendo $\overset{\Delta}{abc} \sim \overset{\Delta}{a'b'c'}$ en situaciones que los triángulos fuesen semejantes. Éste *significado actuativo* encierra otro de los significados lingüísticos que corresponde al símbolo "**~**".
Unidad 3
1 Dos triángulos son semejantes si tienen:

- Sus ángulos respectivamente iguales: $\hat{a} = \hat{a}'$; $\hat{b} = \hat{b}'$; $\hat{c} = \hat{c}'$
- Sus lados correspondientes proporcionales $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{\overline{a'b'}}} = \dfrac{\overline{bc}}{\overline{\overline{b'c'}}} = \dfrac{\overline{ca}}{\overline{\overline{c'a'}}}$ ♦

U3. En esta ocasión descompondremos en dos subunidades **U3-1** "Sus ángulos respectivamente iguales: $\hat{a} = \hat{a}'$; $\hat{b} = \hat{b}'$; $\hat{c} = \hat{c}'$" y **U3-2** "Sus lados correspondientes proporcionales $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{\overline{a'b'}}} = \dfrac{\overline{bc}}{\overline{\overline{b'c'}}} = \dfrac{\overline{ca}}{\overline{\overline{c'a'}}}$". En ambos casos los *significados actuativos* son evidentes ya que por ejemplo cuando dos ángulos sean iguales al trabajar, sobre triángulos semejantes, deberán expresar $\hat{a} = \hat{a}'$.

U3-1. Cuando nos referimos a "ángulo" está presente el *significado conceptual* al haber trabajado la definición correspondiente, incluso su *significado lingüístico* "â".

U3-2. El *significado conceptual* "lados", "correspondientes" y "proporcionales" involucra también al *significado proposicional* ya que deberán ser relacionados después de haber sido trabajados individualmente.

Unidad 4

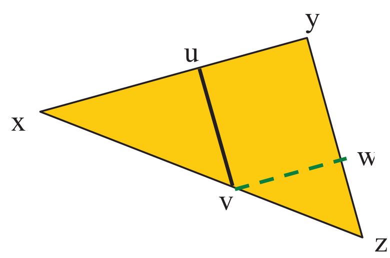
1 Para construir un triángulo semejante a otro, podemos trazar una paralela a uno de los lados que corte a los otros dos, o a sus prolongaciones. ♦

U4. Esta Unidad está cargada de *significados conceptuales* cuando ser refiere a la construcción de triángulos, trazar una paralela a un lado que corte a los otros dos o a sus prolongaciones, sin olvidarnos de los *significados actuativos* que ellas encierran.

Nos remite a una situación en la que se quiere representar unos objetos matemáticos, la construcción no solo del triángulo sino de paralelas y secantes, que nos permite poner en evidencia los *significados situacionales*.

Unidad 5

1 En el triángulo $\overset{\Delta}{xyz}$ trazamos el segmento $\overline{uv}$, (paralelo a $\overline{yz}$), y se forma el nuevo triángulo $\overset{\Delta}{xuv}$. ♦



U5. Si bien los *significados actuativos* están mas evidentes, al requerir una construcción determinada haciendo uso de ciertos objetos matemáticos, aparece la expresión "segmentos" que claramente se enmarca dentro del *significado conceptual* además de poder identificar los triángulos que en la figura se irán construyendo. Es decir parece evidente la identificación de los triángulos pero que encierra una dificultad que no siempre está al alcance del alumno.

Unidad 6

Demostremos que los triángulos obtenidos son semejantes.

Trazamos el segmento auxiliar $\overline{vw}$ (paralelo a $\overline{xy}$).

Aplicamos el teorema de Thales. ♦

U6. Nuevamente los *significados lingüísticos* se presentan, pero principalmente rescatamos por primera vez un *significado argumentativo* al referirse al "Teorema de Thales" que involucra, sin embargo, todos aquellos *significados conceptuales* además de "segmento auxiliar" entre otros.

Unidad 7

1 $\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{las transversales son } \overline{xy}\ \text{ y }\ \overline{xz} \\ \bullet\ \text{las paralelas son } \overline{yz}\ \text{ y }\ \overline{uv}\end{array}\right\} \rightarrow \text{ Entonces}: \dfrac{\overline{xy}}{\overline{\overline{xu}}} = \dfrac{\overline{xz}}{\overline{\overline{xv}}}$ $\boxed{\textbf{I}}$

$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{las transversales son } \overline{xy}\ \text{ y }\ \overline{xz} \\ \bullet\ \text{las paralelas son } \overline{yz}\ \text{ y }\ \overline{uv}\end{array}\right\} \rightarrow \text{ Entonces}: \dfrac{\overline{xy}}{\overline{\overline{xu}}} = \dfrac{\overline{xz}}{\overline{\overline{xv}}}$ $\boxed{\textbf{II}}$

Observen que $\overline{yw} = \overline{uv} : \dfrac{\overline{xz}}{\overline{\overline{xv}}} = \dfrac{\overline{yz}}{\overline{\overline{uv}}}$ ♦

U7. Los *significados conceptuales* como "transversales", "paralelas" se encuentran inmersos en una serie de símbolos que encierran sus *significados lingüísticos*, no sólo al referirnos a los segmentos, igualdad entre segmentos sino que la proporcionalidad está muy presente. No es de descartar la influencia que las llaves pueden en esta ocasión representar para los alumnos a la hora de comprender el desarrollo descripto.

Unidad 8

1 De $\boxed{\textbf{I}}$ y $\boxed{\textbf{II}}$ concluimos que los lados correspondientes son proporcionales:

$\dfrac{\overline{xy}}{\overline{\overline{xu}}} = \dfrac{\overline{xz}}{\overline{\overline{xv}}} = \dfrac{\overline{yz}}{\overline{\overline{uv}}}$ ♦

U8. Dentro de *significado preposicional* en que se puede insertar esta expresión observamos que tanto los *significados conceptuales* como "correspondientes" y "proporcionales" se vinculan los correspondientes *significados lingüísticos* que en ella aparecen.

Unidad 9

1 Además, los ángulos son respectivamente iguales: $\hat{x}$, por ser ángulo común, y los otros por ser correspondientes entre paralelas. ♦

U9. Si bien se repiten los *significados conceptuales* antes utilizados, en esta ocasión nos remite a los que llaman "ángulo común" y "correspondientes entre paralelas", en el primer caso no encontramos una descripción que se le corresponda, por lo que se puede desprender que de la observación el alumno pueda vislumbrar esta idea de "ángulo común", algo que creemos no es del todo evidente, y para el segundo caso ("correspondiente entre paralelas") fue trabajado con anterioridad.

Unidad 10

1 Por lo tanto, los triángulos $\overset{\Delta}{xyz}$ y $\overset{\Delta}{xuv}$ son semejantes, como queríamos demostrar. ♦

U10. Esta unidad involucra una serie de *significados* (*conceptual*, *lingüísticos*) pero rescatamos principalmente el *significado proposicional* ya que deberá relacionar lo descripto en la Unidad 9 para los triángulos involucrados, con la definición de triángulos semejantes.

Comentarios Finales

Con éste análisis se evidencia la complejidad de los significados presentes a que se enfrentan las personas involucradas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esta diversidad semiótica puede agudizar las dificultades potenciales de los alumnos en el proceso de estudio y crear obstáculos a la hora de querer demostrar e incluso validar su propia conjetura.
Incorporar un análisis de las respuestas de los alumnos nos permitirá comprobar la complejidad no sólo semiótica sino ontológica de una actividad matemática tan poco elemental como el proceso de demostración a la que no se está acostumbrado a trabajar.
De esta manera los procesos de abstracción y razonamiento en estas actividades quedan expuestos a revisiones en lo referente al lenguaje, a los procesos de interpretación y la variedad de objetos en juego en la enseñanza y aprendizaje de las demostraciones.
Hemos descripto los tipos de funciones semióticas propuestas por Godino, que nos permitió proponer una interpretación del conocimiento y comprensión de la demostración de semejanza de triángulo por parte del sujeto (institución) en términos de las funciones semióticas descriptas que el sujeto puedo establecer.
J. Godino (2003) apoya la idea de que "la semiótica tiene el potencial de ofrecer la base para una teoría unificada de la educación matemática" y considera que una semiótica apropiada y complementada con otras herramientas teóricas que considere una diversidad de objetos en juego en toda actividad matemática, desempeña un papel esencial en las investigaciones en didáctica de las matemáticas. Su incorporación a nuestras investigaciones sobre los procesos de justificación, esperamos que aporten explicaciones de las dificultades y limitaciones de su aprendizaje basados en la naturaleza y complejidad de los objetos matemáticos en juego.

Bibliografía

Andrés, M., Kaczor, P., Latorre, M. y Piñeiro, G. (2001). Matemática 9 E.G.B. Editorial Santillana.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significados Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 14 n|3, pp. 325-355.*

Godino, J. (2003). Teoría De Las Funciones Semióticas: Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. Servicio de reprografía de la Facultad de Ciencias. Universidad de Granada. Granado.

Godino, J. Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperable en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/.