

EL PROCESO DE MODELIZACIÓN EN EL AULA CON DATOS REALES. UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN EL ENTORNO INFORMÁTICO DE LAS TABLETAS¹

The modelling process with real data in the classroom. An exploratory study in the computer environment of tablets

Miriam Ortega, Luis Puig
Universitat de València Estudi General

Resumen

El trabajo que presentamos es un estudio de carácter exploratorio sobre la aplicación de un modelo de enseñanza en un grupo de alumnos de 1º de bachillerato que permite trabajar el proceso de modelización de una situación real a partir de datos reales obtenidos en el aula. La peculiaridad de este estudio es que dichos datos se obtienen a partir de la grabación y análisis de un vídeo del fenómeno estudiado utilizando aplicaciones de iPads®. En particular, el modelo de enseñanza que utilizamos permite trabajar los conceptos de parámetro y familia de funciones y hace énfasis en el análisis cualitativo del fenómeno.

Palabras clave: *proceso de modelización, iPad®, parámetros, familias de funciones, datos reales*

Abstract

This paper is an account of an exploratory study on the application of a teaching model in a grade 11 students group. The teaching model allows us to work the modelling process of a real situation using real data collected in classroom. The peculiarity of this study is that these data are obtained from recording and analysing a video of the studied phenomenon using apps for iPads®. Particularly, the teaching model that we use allows us to work on the concepts of parameter and family of functions and emphasizes the qualitative analysis of the phenomenon.

Keywords: *modelling process, iPad®, parameters, families of functions, real data*

INTRODUCCIÓN

La aparición de nuevas tecnologías está cambiando todo aquello que nos rodea día a día, en particular también la forma en que se concibe la enseñanza y el aprendizaje en las aulas. Por ello, la adaptación a estas nuevas formas de entender la enseñanza es un factor importante en el aprendizaje eficaz por parte de los alumnos.

El trabajo de investigación que presentamos es un estudio exploratorio sobre la enseñanza y el aprendizaje del proceso de modelización de una situación real en un grupo de alumnos de primer curso de bachillerato. Una de las peculiaridades de nuestro estudio es que los datos que se utilizan son datos reales que se obtienen a partir de la grabación de un vídeo del fenómeno representado por los propios alumnos en el aula utilizando iPads®. Además, este dispositivo no sólo sirve para grabar dicha situación en vídeo, sino que también permite, mediante una combinación de aplicaciones, trabajar sobre éste a partir de los datos obtenidos.

El uso de datos reales es importante en el sentido en que éstos tienen un papel destacado en la elaboración de conceptos por parte de los alumnos ya que la situación real que se pretende estudiar

Ortega, M. y Puig, L. (2014). El proceso de modelización en el aula con datos reales. Un estudio exploratorio en el entorno informático de las tabletas. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compañía, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 125-134). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

no se presenta como una mera aplicación de los conceptos aprendidos por los alumnos, sino más bien para introducirlos y desarrollarlos. Así, las situaciones de modelización en la enseñanza resultan ser un lugar óptimo para el aprendizaje de conceptos y procesos matemáticos (Puig, en prensa).

Además, tanto el análisis cualitativo del fenómeno que se estudia como el conocimiento de las características de las familias de funciones y el significado de los parámetros son un elemento crucial en la gestión y el control del proceso de modelización, ya que permiten tomar decisiones sobre el tipo de función que se usará como modelo y controlar su posterior adecuación a lo largo del proceso de modelización (Puig, en prensa). Por este motivo, uno de nuestros objetivos será el de constatar la influencia de dichos factores, en particular, cuando se utiliza un modelo de enseñanza que, por un lado, permite trabajar conceptos como el de familia de funciones y el de parámetro y, por otro, hace énfasis en el análisis cualitativo del fenómeno.

Sin embargo, éste no es el único objetivo que se persigue, sino que, por el carácter exploratorio de nuestro estudio, tendrá también como finalidad explorar todo aquello relacionado con las actuaciones y las concepciones de los alumnos cuando trabajan en el entorno informático de los iPads[®] y con un modelo de enseñanza que presenta estas características.

PROBLEMÁTICA Y MARCO TEÓRICO

La problemática en la que se enmarca nuestro estudio es la de la enseñanza de este tipo de situaciones y se engloba dentro de un grupo de trabajos desarrollados por nuestro grupo de investigación (Monzó y Puig, 2007; Monzó y Puig, 2008; Puig y Monzó, 2008; Monzó y Puig, 2010; Monzó y Puig, 2011; Monzó y Puig, 2012; Puig y Monzó, 2013; Puig, en prensa; Juan, 2012; Infante y Puig, 2013; Monzó, Puig y Navarro, en prensa), que tienen una serie de variantes en lo que respecta al contexto educativo en el que se desarrollan, el hardware y software utilizados y el uso o no de datos reales, y en los que lo que se pretende es, por un lado, presentar un modelo de enseñanza que permita estudiar el proceso de modelización, los conceptos de familia de funciones y forma canónica de una familia de funciones y el significado de los parámetros de las formas canónicas respecto a la función y al fenómeno que se modeliza, y, por otro, analizar los resultados después de la aplicación de éste.

El marco teórico y metodológico desde el que abordamos esta problemática es el de los Modelos Teóricos Locales (MTL), cuya elaboración fue iniciada por Eugenio Filloy (Kieran y Filloy, 1989; Filloy, 1990) y cuya exposición más detallada y completa se puede encontrar en Filloy, Puig y Rojano (2008). Desde esta perspectiva, consideramos que las situaciones de enseñanza y aprendizaje en los sistemas escolares pueden concebirse como situaciones de comunicación y de producción de sentido en las cuales están implicados la materia objeto de enseñanza y aprendizaje, la enseñanza, que organiza el profesor, y los alumnos, en cuyas actuaciones se muestra lo que han aprendido.

Además, los MTL permiten tomar en consideración la complejidad de los fenómenos que se producen en todo el proceso de enseñanza y aprendizaje mediante varios componentes teóricos relacionados entre sí que permiten, así mismo, organizar la investigación. En particular, en esta investigación, se aborda el componente de competencia haciendo referencia a trabajos anteriores de esta misma línea (Puig y Monzó, 2013), el de enseñanza cuando se detallan la organización del experimento y se explican los materiales utilizados, el de actuación cuando se analizan las actuaciones de los alumnos tanto durante las sesiones de clase como en las entrevistas y, por último, el de comunicación que se incluye de forma implícita.

No obstante, por motivos de espacio, en esta comunicación nos centraremos sólo en describir los elementos necesarios para poder mostrar los resultados obtenidos, por lo que detallaremos cuál fue

el proceso seguido así como el material utilizado y nos fijaremos en algunas de las actuaciones de los alumnos a lo largo del experimento.

Ahora bien, aunque el marco teórico desde el que abordamos esta problemática sea el de los MTL, integramos también elementos tomados de la Educación Matemática Realista, en concreto, la consideración de que el proceso de matematización tiene dos direcciones, horizontal y vertical. Esa idea que caracteriza lo que en esa escuela se llama “realista”, tiene entre otras consecuencias para el diseño de las situaciones de enseñanza, la de usar contextos y datos reales, proponiendo en esos contextos reales actividades que contengan las dos direcciones de la matematización, lo que hace que los procesos de modelización, como procesos de matematización, sean un elemento importante dentro de la Matemática Realista.

Además, como nosotros consideramos el proceso de modelización como un caso particular de proceso de resolución de problemas (Puig, en prensa), también integramos resultados que provienen de estudios sobre el proceso de resolución de problemas en general, especialmente, la consideración de la importancia de la gestión del proceso (Schoenfeld, 1985; Puig, 1996). En el caso de los problemas de modelización, consideramos que un factor fundamental para que la gestión del proceso sea buena es la realización de análisis cualitativos tanto del fenómeno que hay que estudiar como de las familias de funciones con las que el fenómeno se va a modelizar (Puig y Monzó, 2013).

Finalmente, prestamos una atención específica al hecho, observado en investigaciones de didáctica del álgebra, de que los alumnos suelen tomar las transformaciones algebraicas como reglas mecanizadas que ejecutan sin sentido, y, en consecuencia, incorporamos a nuestra enseñanza el dar sentido a las transformaciones algebraicas, dándole un papel importante a las formas canónicas de las familias de funciones y el significado de los parámetros en ellas.

EL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

En este apartado recogemos todo aquello relacionado con el experimento que se llevó a cabo, es decir, cuál fue la situación que se pretendía estudiar, la descripción del procedimiento seguido, las características de la población estudiada y el diseño del material utilizado y su finalidad.

El estudio que realizamos consistió en analizar una situación de enseñanza en la que un grupo de alumnos, organizados por parejas, tenían que estudiar matemáticamente un fenómeno de la vida cotidiana, es decir, con la intención de matematizarlo. En particular, el fenómeno estudiado fue la relación entre el tiempo y la altura de una pelota dejada caer desde una posición elevada pero sólo desde el momento en el que ésta toca el suelo por primera vez hasta que lo vuelve a tocar.



Figura 2. Imagen del fenómeno que los alumnos tenían que estudiar

Cabe destacar que el hecho de escoger este fenómeno como objeto de estudio se debe a que se intentó buscar un fenómeno cuya representación gráfica no coincidiera con la trayectoria del objeto de estudio (en este caso, la pelota) para evitar lo que, según Janvier (1978), hacen muchos alumnos que, “incapaces de tratar las gráficas como representaciones abstractas de relaciones, parecen interpretarlas como si fueran meros dibujos de las situaciones que sirven de base”.

Población y contexto

La población que participó en nuestro experimento de enseñanza fue la formada por un grupo de alumnos de 1º de bachillerato, entre 16 y 17 años, de la especialidad de Ciencias de la Salud de un centro de la Comunidad Valenciana. El grupo estaba formado por un total de dieciséis alumnos, de los cuales seis eran chicos y diez chicas.

Los alumnos se agruparon por parejas libremente con el fin de favorecer la verbalización entre ellos de lo que están haciendo, pensando o quieren hacer (Shoenfeld, 1985; Puig, 1996). Además, según Balacheff y Laborde (1985), el trabajo en parejas no sólo es una fuente de explicaciones, sino también una fuente de enfrentamientos con los demás, cosa que aporta dinamismo a la tarea a estudiar y que es positivo ya que fomenta la aparición de contradicciones que, probablemente, no se percibirían si los alumnos trabajaran en solitario.

Con respecto al contexto en el que se encontraban los alumnos en el momento en el que tuvo lugar el experimento, cabe destacar que aún no tenían conocimientos sobre modelización, aunque sí que habían estudiado diferentes familias de funciones en cursos anteriores y habían trabajado con estas usando como forma canónica $y=a \cdot f((x-c)/b)+d$ y como soporte calculadoras gráficas. En particular, según el currículum en vigor en la Comunidad Valenciana (Generalitat Valenciana, 2007), ya habían recibido enseñanza sobre funciones lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa y exponenciales en cursos anteriores.

Descripción del material utilizado y del procedimiento seguido

El experimento se efectuó en un total de tres sesiones de cincuenta minutos, divididas en dos partes, una primera en la que tuvo lugar la enseñanza, que ocupó dos de las sesiones, y otra en la que se efectuaron las entrevistas, que tuvieron lugar durante la sesión restante.

En primer lugar, en la primera sesión los alumnos realizaron una ficha que contenía unas preguntas previas a la realización y grabación del experimento. Estas preguntas se propusieron con la finalidad de indagar sobre las ideas previas de los alumnos y de servir de guía en el proceso de modelización. En particular, había una primera pregunta donde se les pedía a los alumnos que realizaran un análisis cualitativo del fenómeno que había que estudiar (es decir, que realizaran un esbozo de la curva que pensaban que lo modelizaba) y otras dos preguntas donde se pretendía que escogieran una familia de funciones de las de una lista dada y dieran una justificación.

Después de rellenar la ficha por parejas, los alumnos realizaron el experimento de forma que mientras uno de ellos dejaba caer la pelota desde lo alto de una silla, su compañero lo grababa utilizando un iPad®. Para la grabación, se utilizó la aplicación Video Physics® de Vernier®, aplicación que no sólo permitió grabar el fenómeno en vídeo, sino también obtener una nube de puntos después de realizar una serie de operaciones sobre éste. En concreto, después de grabar el vídeo, los alumnos tenían que fijar unos ejes de coordenadas en un fotograma cualquiera de la grabación, tomar una medida de referencia en la realidad e introducirla a la aplicación para que ésta usara ese dato como referencia para calcular cualquier otra medida y, finalmente, marcar sobre la pelota una serie de puntos en distintos fotogramas del vídeo indicando la trayectoria que seguía en cada instante. La aplicación produce entonces una gráfica de puntos que muestra la relación entre el tiempo y la altura.

Respecto a la segunda sesión, estaba previsto que los alumnos rellenaran una segunda ficha con los datos obtenidos del experimento que habían realizado en la sesión anterior. Sin embargo, por problemas externos, finalmente no pudieron utilizar estos datos y les tuvimos que proporcionar los de otro experimento. En particular, lo que sucedió fue que para responder los ítems de esta ficha, era necesario pasar las coordenadas de los puntos obtenidos en la aplicación Video Physics[®] a otra aplicación, Data Analysis[®], para lo que se requería conexión a internet, con la que tuvimos problemas en el centro.

En cuanto a la segunda ficha, cabe destacar que estaba pensada para que los alumnos comprobaran la adecuación de la función escogida y que estudiaran el fenómeno con mayor profundidad. Para eso, se les proponía una primera pregunta donde estos, utilizando la aplicación Data Analysis[®], tenían que elegir la función de regresión que mejor ajustara a la nube de puntos obtenida. Después, se les proponía una pregunta para que se dieran cuenta de que la función de regresión (que en este caso era la parábola) no representa a la función que modeliza el fenómeno en todo su dominio, sino solamente en el intervalo en el que se está estudiando y para el que se ha definido (es decir, desde que toca el suelo la pelota por primera vez hasta que lo vuelve a tocar). Y, finalmente, se les propuso una última pregunta para ver si eran capaces de interpretar los datos obtenidos en el experimento con relación al fenómeno.

Por último, en la tercera sesión tuvieron lugar las entrevistas, que se realizaron a dos de las parejas, no sólo con la intención de analizar el origen de sus respuestas y conocer cuáles eran sus concepciones con mayor profundidad, sino también con la intención de guiarlos para que fueran capaces de reflexionar y modificar algunas de las ideas erróneas que presentaban.

RESULTADOS MÁS DESTACADOS

En cuanto a los datos obtenidos de los alumnos, cabe destacar que provienen de tres fuentes distintas: de las fichas, de los iPads[®] y de las entrevistas. Ahora bien, por un lado, se analizaron las respuestas de los alumnos a las fichas y la información disponible en los iPads[®] (los vídeos, la representación de las diferentes funciones de regresión...) haciendo una reconstrucción racional de los hechos transcurridos durante las sesiones primera y segunda pareja por pareja y posteriormente un resumen de los resultados obtenidos (relativos a las concepciones de los alumnos, la influencia del conocimiento que estos tenían de los parámetros y las familias de funciones a lo largo del experimento, etc.). Por otro lado, se analizaron las entrevistas realizadas, primero transcribiéndolas (incluyendo no sólo sus intervenciones, sino también comentarios sobre gestos, comportamientos y reacciones con la finalidad de contribuir a la comprensión de la situación y a entender a qué se hacía referencia en cada momento) y, luego, haciendo una reconstrucción racional de los hechos, analizándola y agrupando los resultados obtenidos.

A continuación, presentamos algunos de los resultados más destacados de los que pudimos observar a partir tanto del análisis de las fichas y los iPads[®] como de las entrevistas a algunas de las parejas estudiadas con mayor profundidad, relativos a las actuaciones y las concepciones de éstos a lo largo de todo el experimento de enseñanza.

Las concepciones del concepto de altura

En primer lugar, pudimos observar algunas concepciones que presentan los alumnos por lo que respecta al concepto de altura.

En particular, observamos dos concepciones: que los alumnos consideran que la altura por encima del nivel del suelo es positiva siempre y que es cero exactamente en el suelo, cosa que podría ser consecuencia de que habitualmente se toma éste como referencia, pero que no tiene por qué ser así. En realidad, lo que observamos fue que, cuando se les da libertad para que elijan qué referencia tomar (cosa que sucede en la ficha 1 y cuando trabajan en el video que ellos mismos graban), todos los alumnos eligen el suelo pero, cuando ya hay una referencia tomada (como cuando realizan la

segunda ficha, ya que, se utilizan otros datos que nosotros les proporcionamos), continúan considerando el suelo como referencia a pesar de no serlo y de tener información suficiente para comprobar cuál es. Veamos algunos ejemplos que ponen de manifiesto lo que acabamos de mencionar.

En primer lugar, vemos que, efectivamente, cuando no hay una referencia tomada, los alumnos eligen el suelo. Esto se puede observar en el ítem 1 de la primera ficha, cuando les hacemos preguntas antes del experimento para averiguar sus concepciones ya que, como podemos ver en el ejemplo de respuesta de la figura 2, los alumnos consideran que el eje de las x es el suelo ya que es la altura a la que rebota la pelota.

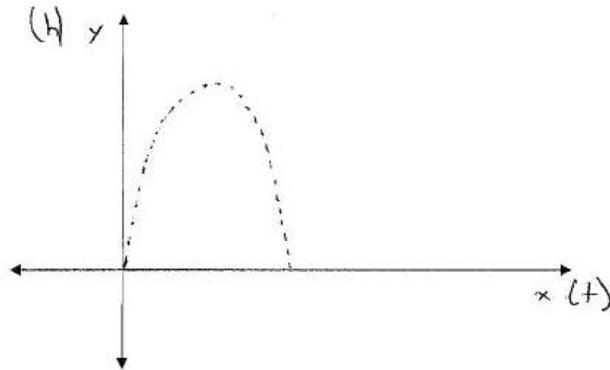


Figura 3. Respuesta de la pareja 1 al ítem 1

Además, como hemos dicho, este hecho no sólo se puede observar en las respuestas de los alumnos al ítem 1, sino también cuando trabajan sobre el vídeo que ellos mismos graban y, en particular, a la hora de fijar los ejes de coordenadas, ya que la mayoría de ellos (excepto una única pareja) fijan el eje OX en la base de la pelota para que el suelo coincida con éste y, por tanto, la altura en el suelo valga cero, tal como se puede observar en la figura 3.

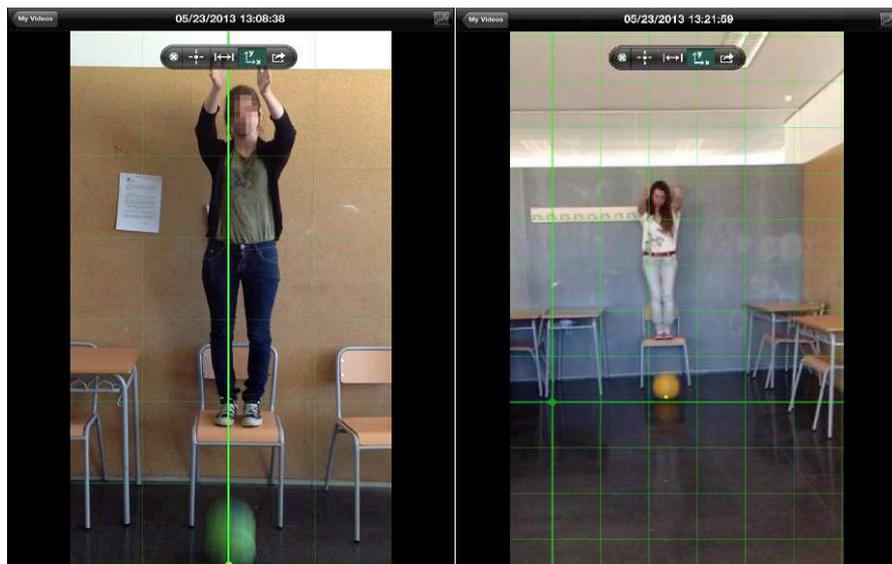


Figura 4. Posición de los ejes de coordenadas (parejas 6 y 8)

Sin embargo, en la segunda ficha vemos, como ya habíamos comentado, que, a pesar de que la altura del suelo en los nuevos datos no es exactamente cero, los alumnos continúan considerando éste como referencia.

Este hecho se puede observar, por ejemplo, en la respuesta de la pareja 5 al ítem 7, donde les pedimos a los alumnos que calculen para qué valores del tiempo la pelota golpea el suelo, a lo que responden igualando y a cero, suponiendo que la altura a la que se encuentra éste continúa siendo nula.

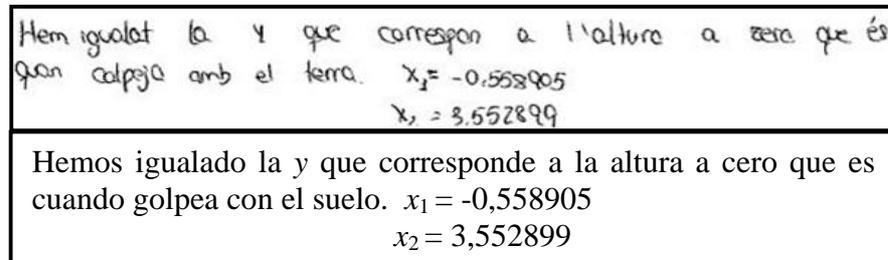


Figura 5. Respuesta de la pareja 5 al ítem 7

Además, este tipo de respuesta se da exactamente en todas y cada una de las parejas analizadas, sin considerar aquellas que dejan en blanco la pregunta, cosa que nos da una idea de cómo de fuerte es esta concepción.

Los factores que influyeron en la elección de la función de modelización

Por otro lado, pudimos observar la influencia de diferentes factores a la hora de escoger un modelo de entre todos los que se proponen en una lista.

En primer lugar, de forma similar a lo que se expone en Puig (en prensa), pudimos constatar que tanto el análisis cualitativo del fenómeno a estudiar como el conocimiento de las características de las diferentes familias de funciones son elementos cruciales en la gestión y el control del proceso de modelización y, en particular, a la hora de tomar decisiones sobre el tipo de función que se usa como modelo y de controlar su adecuación a lo largo del proceso de modelización. Este hecho se puede observar en diferentes momentos del experimento como, por ejemplo, durante la realización de la entrevista a los alumnos de la pareja 2, como vemos a continuación.

- I: En la pregunta 2, ¿por qué escogisteis la opción c? [$f(x) = ax^2 + bx$]
 A: Al final encontramos que ésa era la más... la más coherente.
 I: ¿Y en qué os basasteis para responder?
 A: Pues... como el dibujo era una parábola... sabíamos que x llevaba un cuadrado.

Como podemos observar, al preguntarle a uno de los alumnos por qué escogieron la función cuadrática de la opción c) en el ítem 2, que es la función $f(x) = ax^2 + bx$, nos responde que fue porque sabían que la gráfica de la función era una parábola y que, por tanto, la x tendría que tener como exponente un 2, utilizando sus conocimientos sobre las propiedades cualitativas de las funciones para responder.

Por otro lado, otro factor que también influye claramente en las respuestas de los alumnos a la hora de tomar decisiones sobre la elección de la función que modeliza el fenómeno, es el significado que los alumnos le atribuyen a los parámetros, aunque no siempre sea el correcto, como veremos a continuación en un ejemplo. Esto se puede observar en la respuesta al ítem 3 de los alumnos de la pareja 3 donde, al preguntarles por qué eligen la familia de funciones $y = ax^2 + bx$, responden que lo hacen porque los parámetros a y b son el eje de las y y de las x respectivamente, y que el parámetro c de la función $y = ax^2 + bx + c$ vale cero porque la gráfica que éstos dibujan en el ítem anterior

pasa por el origen de coordenadas. Es decir, aunque no interpreten correctamente todos los parámetros, el significado que éstos les atribuyen hacen que los alumnos elijan como modelo la función cuadrática que pasa por el origen de coordenadas,

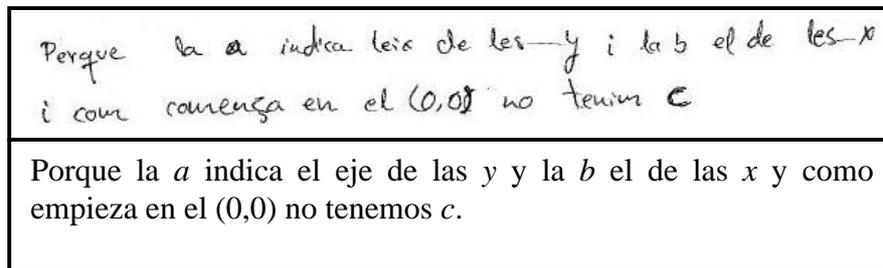


Figura 6. Respuesta de la pareja 3 al ítem 3

Por último, cabe destacar que otro de los factores que pudimos observar que influyó claramente en la elección de la función, y que se repitió en siete de las ocho parejas analizadas, fue la concepción que los alumnos tenían del tiempo. En particular, pudimos ver lo que denominamos una concepción absoluta del tiempo, esto es, el hecho de considerar que el tiempo vale cero justo en el momento en que se empieza a estudiar el fenómeno, es decir, en el momento en el que la pelota toca el suelo por primera vez, obviando que éste se presenta descrito y englobado en un contexto más general que es desde que se suelta la pelota hasta que se para.

Por tanto, los alumnos, al considerar el suelo como referencia y que el valor del tiempo cuando se empieza a estudiar el fenómeno es cero, dibujan las gráficas en el ítem 1 de forma que pasan por el origen de coordenadas. Esto se puede observar en diferentes respuestas, como, por ejemplo, en las de las parejas 1 y 2 que, a pesar de ser distintas, todas ellas tienen la característica de que cuando el tiempo vale cero, la altura de la pelota es cero también.

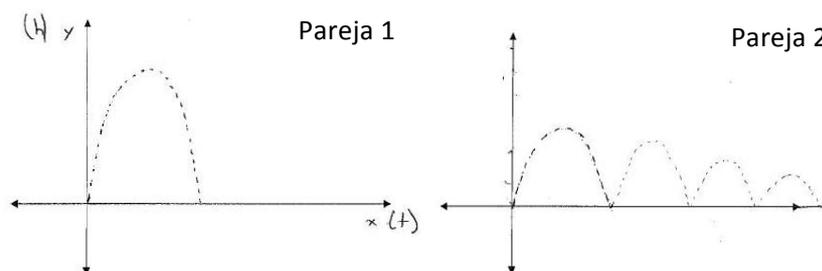


Figura 7. Respuestas de las parejas 1 y 2 al ítem 2

Además, este hecho no sólo se puede observar en la realización de las fichas, sino también durante las entrevistas, como podemos ver en las transcripciones de las intervenciones de la pareja 1, donde uno de los alumnos afirma que para ellos la gráfica pasa por el origen de coordenadas porque en el enunciado se describe que el fenómeno que hay que estudiar empieza cuando la pelota toca el suelo por primera vez, y no antes.

- I: [...] ¿Por qué dibujasteis la gráfica de forma que empezara desde $(0,0)$ y no desde otro lugar?
- A: [...] porque consideramos el tiempo inicial cero y que la altura en el primer salto era cero también.
- I: Pero, ¿por qué? [...]

- A: Porque aquí [refiriéndose al enunciado donde se describe el fenómeno que hay que estudiar] pone que es desde que [la pelota] toca el suelo por primera vez.

CONCLUSIONES

El estilo que caracteriza nuestro trabajo condiciona el tipo de conclusiones que extraemos de éste, ya que el objetivo no es la investigación experimental de una hipótesis, sino la realización de una exploración del proceso de modelización de una situación real determinada. Por este motivo, las conclusiones que extraemos son una recopilación de los resultados obtenidos y presentados ampliamente en el apartado anterior.

En primer lugar, hemos podido observar que tanto el análisis cualitativo del fenómeno como el conocimiento de las propiedades cualitativas de las familias de funciones y el significado de los parámetros son elementos cruciales en la gestión y el control del proceso de modelización, ya que los alumnos se basan en éstos tanto para tomar decisiones como para justificar sus respuestas.

Además, también hemos podido observar una concepción absoluta del tiempo al considerar el fenómeno estudiado independientemente del contexto en el que se presenta.

Pero, sobre todo, hemos podido observar en los alumnos una muy arraigada concepción de que la altura cuando se trabaja por encima del nivel del suelo es positiva y exactamente cero en el suelo ya que, incluso cuando no es así, los alumnos consideran éste como referencia.

Por tanto, las implicaciones que tiene este estudio en la elaboración de trabajos futuros es el hecho de que se prestará especial atención a las cuestiones observadas en nuestro experimento, especialmente a las relativas al tiempo y a la altura, para que los alumnos sean capaces de superarlas.

Referencias

- Balacheff, N., & Laborde, C (1985). Social interactions for experimental studies of pupils conceptions: its relevance for research in didactics of mathematics. *First Conference on the Theory of Mathematics Education*. Bielefeld: I.D.M.-T.M.E.
- Filloy, E. (1990). PME Algebra Research. A working perspective. En G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education* (1, PII 1-PII 33). Oaxtepec, Morelos, México.
- Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York: Springer.
- Generalitat Valenciana (2007). *Decreto 112/2007, de 24 de julio, del Gobierno Valenciano, por el que se establece el currículum de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana*. DOGV, 5562, 30402- 30587.
- Infante, F., y Puig, L. (2013). Modelos emergentes en un primer curso de economía y administración. *Modelling in science education and learning*, 6 (2), 235-248.
- Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations. Studies and teaching experiments*. Tesis Doctoral. Universidad de Nottingham.
- Juan, M. A. (2012). *Modelo plausible vs. Modelo esperable. Un estudio exploratorio de aspectos del proceso de modelización*. Trabajo de fin de máster del Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Valencia: Universitat de València. Disponible en roderic.uv.es.
- Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7, 230-240.
- Monzó, O. y Puig, L. (2007). Modelización con la ClassPad 300, 1ª parte. *Veintidós Séptimos*, 24, 26-29.

- Monzó, O. y Puig, L. (2008). Modelización con calculadoras gráficas. *Actas de las XIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (CD3, T05-01). Badajoz: Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
- Monzó, O., y Puig, L. (2010). Modelización con la ClassPad 300, 2ª parte. *Veintidós Séptimos*, 26, 4-6.
- Monzó, O., y Puig, L. (2011). Materials per a l'estudi de famílies de funcions. En M. Contreras, O. Monzó y L. Puig (Eds.). *Actas de las IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana* (I, 167-185). València: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī".
- Monzó, O., y Puig, L. (2012). Familias de funciones. En M. Torralbo y A. Carrillo (Eds.) *Matemáticas con calculadora gráfica. Unidades didácticas* (103-133). Sevilla: SAEM Thales y División didáctica CASIO-Flamagas.
- Monzó, O., Puig, L., y Navarro, M. T. (en prensa). Un estudio sobre el proceso de modelización, en el entorno informático de las tabletas. *Actas de las XVI JAEM*. Palma: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.
- Puig, L. (en prensa). Modelización con datos reales. *Actas de las XVI JAEM*. Palma: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
- Puig, L., y Monzó, O. (2008). Competencias algebraicas en el proceso de modelización. En F. Gracia, A. Monedero, J. Palomo y Mª J. Peris, (Eds.), *El discret encant de les matemàtiques. Actes de les VIII Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana* (pp. 142-158). Castelló: SEMCV.
- Puig, L., y Monzó, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.), *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (pp. 9-35). México: Trillas.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.

¹ Esta investigación ha sido realizada en el contexto del Proyecto de Investigación EDU2012-35638 subvencionado por el Ministerio de Economía y Competitividad.