UNA APROXIMACIÓN A LA NOCIÓN DE INFINITO A TRAVÉS DE FRACTALES

Lina Mónica Oviedo[1, 2]; Ana María Kanashiro[1]; Mónica Patricia Benzaquen[3]; Mónica Gorrochategui[3]
Facultad de Ingeniería Química- UNL[1]; Escuela de Enseñanza Media N° 442 "Juana del Pino de de Rivadavia" [2]; Escuela de Enseñanza Media Particular Incorporada N° 8106 "Don Bosco" [3]. Santa Fe- República Argentina.
linaoviedo@gigared.com; akanashi@fiqus.unl.edu.ar;
Campo de Investigación: Pensamiento Geométrico; Nivel educativo: Básico y Medio

Resumen

Este trabajo presenta una experiencia realizada con cuatro grupos de alumnos provenientes de dos escuelas locales pertenecientes a noveno año de la EGB y a primer año de la Educación Polimodal. En el mismo se investiga la construcción de la idea de infinito mediante la elaboración del fractal copo de nieve. Se analizan logros y dificultades.
Los fractales permiten un acercamiento entre las estructuras analíticas y las formaciones gráficas que muestran los procesos iterativos que repiten infinitamente procesos finitos. Dichos procesos permiten obtener una figura autosemejante.
La visualización de estos objetos permite la comprensión de los procesos de cambios de acuerdo a la transformación de la misma figura como así también cuestionarse el porqué de dicho cambio y si el mismo es o no controlable.

Introducción

Algunos autores proponen construir la idea del infinito utilizando algunos fractales simples con estudiantes de la escuela media. Fundamentan que se debe partir de un acercamiento geométrico del infinito ya que esto puede dar lugar a situaciones en las que pueden estar presente las características que definen y dan marco a la noción de infinito como un estado.
Los fractales permiten un acercamiento entre las estructuras analíticas y las formaciones gráficas que muestran los procesos iterativos que repiten infinitamente procesos finitos. Dichos procesos permiten obtener una figura autosemejante ya que todas las partes se repiten a distintas escalas.
Es bien sabido que los fractales tienen propiedades matemáticas específicas muy importantes:

1. La construcción de un fractal implica la ejecución de un algoritmo, el cual se debe repetir una y otra vez.
2. Son objetos que se detallan a través de representaciones gráficas y brindan un acercamiento analítico para explicar su comportamiento.

La visualización de estos objetos permite la comprensión de los procesos de cambios de acuerdo a la transformación de la misma figura como así también cuestionarse el porqué de dicho cambio y si el mismo es o no controlable.
La construcción de la curva de Von Koch (copo de nieve) es un ejercicio interesante para aproximarse a la idea de infinito.

La generación de esta curva es un proceso iterativo *ad infinitum* que se construye de la siguiente manera: se parte de un triángulo equilátero de lado de longitud **a**, cada segmento (lado) se divide en tres y el segmento del medio se sustituye por dos segmentos que forman con él un triángulo equilátero. Se repite la misma operación con los segmentos de longitud **a**/3, **a**/9, **a**/27, etc.
Cada segmento se transforma en cuatro segmentos más cortos en cada paso del proceso iterativo y al cabo de n iteraciones la longitud de cada uno de ellos es: **a** . $(4/3)^n$. A medida que el número de iteraciones aumenta, el valor del área encerrada por la curva converge a un valor finito, en cambio el valor del perímetro diverge.
Se parte de un problema geométrico y por lo tanto visualizable. La mayor dificultad es que la figura límite no es conocida ni se puede acceder a ella de una manera fácil.
Se puede trabajar tanto de manera gráfica como numérica con la sucesión generada, de perímetros y / o áreas, por la iteración, el término general puede escribirse como una función de n.
En las primeras generaciones, las figuras son fácilmente realizables por los alumnos. La curva límite no es fácil de describir: un perímetro expresado por una sucesión en la cual la expresión del término general no es tan complicada y que tiene propiedades curiosas que no pueden determinarse más que por pasaje al límite.
Según Bloch (2000) : *"los alumnos no tienen ninguna razón para poner en duda, a su nivel, el hecho que el límite del perímetro es el perímetro de la figura límite"* .
Una aproximación experimental del límite por el cálculo puede permitir conjeturar dos casos, el límite es finito (en este caso el área) o el límite es infinito (en este caso el perímetro) y si bien el alumno del nivel medio no dispone de los conocimientos suficientes para dilucidar este problema, resulta interesante presentarle ambos casos para que ellos puedan construir las nociones y criterios en lo que hace a dos sucesiones diferentes, poder comparar y concluir que no son de la misma naturaleza.

Objetivo de la investigación
Obtener información en forma cualitativa de dos grupos de alumnos, pertenecientes a distintos niveles de la enseñanza acerca del concepto que poseen sobre la noción de infinito.

Descripción de la Experiencia
Este trabajo consistió en la elaboración y posterior puesta en obra de una guía de autoaprendizaje acerca de la construcción de la curva copo de nieve (fractal de Von Koch).
En la misma se hizo hincapié en la construcción geométrica del fractal de Von Koch. Se trabajaron, además, las nociones de perímetro, área, límite finito e infinito.
Con todos los grupos se trató de buscar una expresión analítica para el cálculo del perímetro, analizar la evolución del mismo cuando n crece indefinidamente y ver qué ocurre con el área.

Marco Teórico
Se trabajó dentro de la perspectiva teórica de las construcciones mentales que está basada en el concepto de abstracción reflexiva de Piaget. En la construcción del conocimiento matemático se tienen en cuenta los siguientes parámetros: acciones, procesos, objetos y esquemas y los elementos escogidos, en este trabajo, tienen en cuenta la evolución adaptativa del conocimiento ante una situación.

Descripción de la muestra

Se trabajó con cuatro grupos distintos de alumnos, entre los años 2002 y 2004. A los mismos se les informó, previamente, acerca de las características del trabajo, se les explicó que debían construir una figura geométrica de determinadas características y contestar ciertas preguntas relacionadas a la construcción de la misma. En todos los casos estuvieron de acuerdo en colaborar y mostraron una excelente predisposición para hacerlo.

Los alumnos dispusieron de dos clases de 80 minutos cada una, excepto los alumnos del Grupo 2 que llevaron a cabo la actividad en una sola clase por razones organizativas.

Característica de los grupos:

Grupo 1: 33 alumnos, 15 varones y 18 mujeres correspondientes al noveno año de E.G.B. de la Escuela n° 442.
Grupo 2: 20 alumnos varones correspondientes al noveno año de E.G.B. de la Escuela n° 8106.
Grupo 3: 22 alumnos, 10 mujeres y 12 varones correspondiente al primer año Polimodal de Comunicación, Arte y Diseño de la Escuela n° 442.
Grupo 4: 27 alumnos, 8 varones y 19 mujeres correspondiente al primer año Polimodal de Ciencias Naturales de la Escuela n° 442.

Objetivos del trabajo.

Los objetivos planteados en la hoja de actividades fueron comprobar si el alumno era capaz de:

1. Construir el fractal copo de nieve siguiendo un algoritmo determinado.
2. Analizar la variación del perímetro en cada etapa de la construcción.
3. Generar la sucesión de los perímetros.
4. Encontrar la fórmula de recurrencia para el perímetro.
5. Determinar el comportamiento para n grande, siendo n el número de etapa.
6. Analizar la variación del área.
7. Determinar la convergencia o no de las sucesiones

Descripción de la guía.

En la siguiente tabla se presentan las características principales y el tipo de tarea solicitada en cada uno de los ítems.

Ítem	Tarea solicitada	Técnica empleada	Dispositivo	Gesto
a	Construir la curva copo de nieve hasta la etapa 3.	Geométrica	Hoja de papel cuadriculada. Lápiz. Regla.	Trazar segmentos iguales.
b	Determinar el n° de segmentos en cada etapa. Determinar la fórmula de recurrencia para la etapa n.	Geométrica. Numérica	Gráfica construida en el ítem a. Tabla de valores .	Contar segmentos en cada etapas y registrarlos en una tabla. Inferir el número de segmentos para las etapas posteriores.

c	Determinar la constante multiplicativa de una etapa otra.	Numérica	Tabla de valores	Analizar los valores registrados en la tabla . Calcular la constante.
d	Analizar la variación de la figura cuando el proceso se repite indefinidamente.	Geométrica. Numérica.	Gráfica. Tabla de valores.	Analizar como evoluciona la sucesión generada en el ítem b y registrada en la tabla de valores.
e	Determinar el valor del perímetro hasta la quinta etapa y generalizar para la etapa n.	Geométrico Numérico	Gráfica. Tabla de valores.	Calcular el valor del perímetro. Registrar los valores obtenidos en una tabla.
f	Determinar la constante multiplicativa de una etapa otra.	Numérico	Tabla de valores	Analizar los valores registrados en la tabla . Calcular la constante.
g	Determinar a que valor tiende el perímetro del fractal copo de nieve.	Geométrico Numérico	Gráfica. Tabla de valores.	Determinar la tendencia del valor del perímetro cuando el n° de etapas aumenta indefinidamente.
h	Analizar, de manera intuitiva, qué ocurre con el área.	Geométrico	Gráfica	Determinar la tendencia del valor del área cuando el n° de etapas aumenta indefinidamente.

Análisis de las respuestas

I- <u>Alumnos de EGB:</u>

- No tuvieron dificultades para construir la figura. El grupo 1 realizó la construcción de la misma hasta la etapa 3, en cambio el grupo 2 desarrolló sólo dos etapas, por una cuestión de falta de tiempo.
- Encontraron los términos de la sucesión generada por los números de segmentos en cada etapa.
- Encontraron el término general (enésimo) de dicha sucesión.
- Determinaron la constante multiplicativa para pasar de una etapa a otra en la determinación del número de segmentos.
- Generaron la sucesión de los valores de los perímetros hasta la etapa enésima. No pudieron encontrar la expresión general por sí solos y hubo que orientarlos.
- Hallaron, sin dificultad, la constante multiplicativa para el cálculo del perímetro de una etapa a la otra.
- Determinaron la tendencia del valor del perímetro cuando n aumenta indefinidamente.
- No pudieron determinar, en la gran mayoría de los casos, qué ocurre con el área.

Consideraciones generales acerca de las respuestas

Al ser interrogados sobre la tendencia del perímetro cuando n aumenta indefinidamente, la gran mayoría de los alumnos manifestó que el mismo crece y crece sin llegar a un valor determinado, en el grupo 1 algunos alumnos expresaron que el perímetro no tendrá fin y otros que tendía a infinito. Cuando se los interrogó acerca de lo que esto significaba manifestaron que era algo "muy pero muy grande" o lo asociaron a algún fenómeno físico, por ejemplo: " el espacio es infinito".
Casi todos los alumnos de los dos grupos no pudieron explicar que sucedía con el valor del área. Salvo dos o tres alumnos de ambos grupos manifestaron que el valor del área era finito. En el trabajo con el grupo 1 se les propuso encerrar la figura generada en la iteración 3 dentro de un cuadrado y se les pidió que observaran y analizaran como evolucionaba la figura interior, se los interrogó si en algún momento la figura saldría fuera del cuadrado y ver si podían sacar conclusiones. La mayoría no lo pudo hacer.

II- Alumnos de Polimodal:

- No tuvieron dificultades para construir la figura hasta la tercer etapa.
- Encontraron los términos de la sucesión generada por los números de segmentos en cada etapa.
- Encontraron, sin dificultad, el término general (enésimo) de dicha sucesión.
- Determinaron la constante multiplicativa para pasar de una etapa a otra en la determinación del número de segmentos.
- La mayoría de los alumnos de ambos grupos generó, sin dificultad, la sucesión de los valores de los perímetros hasta la etapa enésima. A algunos hubo que orientarlos para encontrar la fórmula de recurrencia.
- Hallaron, sin dificultad, la constante multiplicativa para el cálculo del perímetro de una etapa a la otra.
- Determinaron la tendencia del valor del perímetro cuando n aumenta indefinidamente.
- Determinaron, con dificultades, que ocurre con el área encerrada en la figura.

Consideraciones generales acerca de las respuestas
En cuanto a la tendencia del perímetro cuando n crece indefinidamente manifestaron que el mismo tiende a infinito y al ser interrogados acerca de qué significa infinito, en la mayoría de los casos lo asociaron a un fenómeno físico (infinito potencial).
Pudieron establecer que el área posee un valor límite finito, algunos trataron de encontrar la serie de los perímetros pero desistieron después de varios intentos.

Conclusiones
A partir de este trabajo se observa que, en los alumnos de EGB y Educación Polimodal, la noción de infinito no está visiblemente delineada y existe una predisposición a corresponder la misma a fenómenos físicos (infinito potencial). En consecuencia existe dificultad en la concepción de dicha noción, lo que requiere un tratamiento especial. La noción de infinito, la idea de algo que crece o decrece sin límite (infinito actual) no está clara para los alumnos.
El trabajo con el fractal copo de nieve es un buen principio para trabajar la noción de infinito asociado con el infinito actual y no sólo con el potencial. La generación de la

sucesión infinita asociada al perímetro de la figura aproxima a la noción de divergencia de la misma. Si los alumnos fueran capaces de generar la sucesión asociada al cálculo de las áreas, podrían comparar dos sucesiones diferentes con tendencias distintas lo que les permitiría concluir que no son de la misma naturaleza.
Consideramos que con este trabajo hemos dado un paso importante para acercar a los alumnos a la siempre conflictiva noción de infinito. Reconocemos que mucho queda por hacer y en esa dirección estamos trabajando en estos momentos.

BIBLIOGRAFÍA

Albert, J.; Cázares, M. y Castañeda, A. (1999). Construcción del infinito a través de fractales en estudiantes de secundaria. - Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. V12, (1) Pág. 1-6. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C. V.- México

Bloch, I. (2000). L'enseignement de L'analyse á la Charniere Lycée/ Université. Savoirs, Connaissances et Conditions Relatives á la Validation. These de la Universite Bordeaux 1- France.

Chevallard, Y. (1992). Concepts Fondamentaux de la Didactique: Perspectives Aportes par une Approche Anthropologique- Recherches en Didactique des Mathématiques- La Pensée Sauvage - Vol 12/1, pág. 73- 112. Francia.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). Estudiar Matemáticas- El Eslabón Perdido entre la Enseñanza y el Aprendizaje. Ice- Horsori- Universitat de Barcelona- Barcelona- España

Devaney, R. (1990). Chaos, Fractals, and Dynamics- Computer Experiments in Mathematics- Addison- Wesley Publishing Company Inc.- U.S.A.

Oviedo, L. (2003). La enseñanza de los sistemas dinámicos discretos como medio para analizar dificultades cognitivas en cuanto a las nociones de función y número real en la transición escuela media- universidad- Tesis de Maestría.. UNRC.

Oviedo; Kanashiro; Colombini, (2005). Fractales. Un universo poco frecuentado- Editorial Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe. Argentina.

Peitgens; Heinz O.; Jürgens; Hartmut; Saupe; Dietmar *et al* (1992). Fractals For The Clasroom- Strategic Activities- Vol. 1- Vol. 2- Editorial Springer- Verlag-New York- U.S.A.

Santaló, L. (1992). Conjuntos Fractales- Elementos de Matemática- Vol. VI- N° 23. Pág. 5-26 -Publicación Didáctico Científica de la Universidad CAECE.

Stewart, I. (2001). ¿Juega Dios A Los Dados? – Editorial Crítica– Barcelona – España