

## ARGUMENTOS DE ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR EN EL IPN SOBRE FUNCIONES QUE INVOLUCRAN RAÍCES CUADRADAS

María Patricia Colín Uribe, Celia Araceli Islas Salomón y Fernando Morales Téllez

CECYT NB, Instituto Politécnico Nacional

México

patricia\_c\_u@hotmail.com, pcolin@ipn.mx

**Resumen.** Este trabajo presenta el desarrollo y resultados de una secuencia didáctica aplicada a estudiantes de Nivel Medio Superior en el Instituto Politécnico Nacional sobre el trazo de expresiones que involucran raíces cuadradas. El objetivo es mostrar el tipo de explicaciones que dan los estudiantes cuando se les pide graficar funciones que involucran raíces cuadradas, así como las consideraciones que diversos libros de texto que usualmente se utilizan en los cursos de Cálculo avanzado y Geometría Analítica hacen cuando se trazan funciones o ecuaciones que involucran raíces cuadradas. Por último, trataremos de establecer una relación entre lo que argumentan los estudiantes y lo que consideran los libros de texto en cuanto a la graficación de expresiones de este tipo.

**Palabras clave:** raíz cuadrada, función, expresión algebraica, gráfica, concepción

**Abstract.** This paper presents the development and results of a didactic sequence applied to upper middle level students at the Instituto Politécnico Nacional on the stroke of expressions involving square roots. The objective is to show the type of explanations that students give when you are asked graphing functions involving square roots. Also, we will show the findings about the considerations that different textbooks usually used in courses in advanced calculus and analytic geometry when functions or equations that involve square roots are plotted. Finally, we will try to establish a relationship between what students argue and what they see as textbooks for the graphing of expressions of this type.

**Key words:** square root, function, algebraic expresion, graphic, conception

### Introducción

Esta investigación se inscribe en el campo de la Matemática Educativa. En particular, nos interesa entender los procesos de construcción de conocimiento matemático en situación escolar presentes en el Nivel Medio Superior (NMS) del Instituto Politécnico Nacional (IPN).

Este tema de investigación surge de las respuestas que estudiantes de cuarto semestre del NMS en un CECyT del IPN, dan a las siguientes preguntas:

- ❖ ¿Cuál es la gráfica de la función  $y^2 = x$ ?
- ❖ ¿Cuál es la gráfica de la función  $y = \sqrt{x}$ ?
- ❖ ¿Cuál es la gráfica de la función  $y = -\sqrt{x}$ ?
- ❖ ¿Cuál es la gráfica de la función  $y = \sqrt{-x}$ ?,

las cuales, como se documenta en Colín, 2006, evidencian la presencia de la “*costumbre escolar*” de considerar a las operaciones de radicación y potenciación como inversas.

Así, el objetivo fundamental de este trabajo es describir el tipo de explicaciones que dan los estudiantes cuando se les pide graficar funciones que involucran raíces cuadradas, así como

también mostrar cómo es que este tipo de gráficos es tratado en los libros de texto que se utilizan como referentes para impartir las materias de Cálculo y Geometría Analítica en las escuelas de NMS del IPN.

Además, en estos mismos textos buscaremos cómo es que el concepto matemático función es abordado y si es posible, detectar que tipo de explicaciones dan cuando tratan con funciones que involucran raíces cuadradas.

Finalmente, aplicaremos un cuestionario cuyas preguntas tengan que ver con el trazo de expresiones que involucren raíces cuadradas, e interpretaremos las respuestas que dan los estudiantes. Así, nos daremos a la tarea de contestar las siguientes preguntas de investigación:

- ❖ ¿Cómo grafican los estudiantes la función  $y^2 = x$ , la función  $y = \sqrt{-x}$  y la función  $y = -\sqrt{x}$ ?
- ❖ ¿Qué dificultades generan en el estudiante los gráficos de estas funciones?
- ❖ ¿Qué argumentos dan para justificar el trazo de este tipo de funciones?

### Marco Teórico

Nuestro marco teórico es la Teoría de Situaciones Didácticas, pues ésta propone el estudio, control y determinación de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos matemáticos e implica que el investigador debe participar en la producción (o diseño) de las situaciones didácticas que analiza. (Cantoral y Farfán, 2000).

Para responder a nuestras preguntas de investigación, utilizaremos la siguiente

### Metodología

#### Análisis didáctico

Revisaremos libros de Cálculo, Geometría Analítica y Álgebra con el objeto de mirar cómo es enseñado el tema de graficación de ecuaciones. Los libros que utilizamos serán aquellos que son propuestos por diferentes carreras para el estudio de estas materias. También, revisaremos en estos mismos textos, en el tratamiento de la definición de función y su graficación, así como mirar los ejercicios que involucran expresiones de la forma  $y = \sqrt{x+a}$  (en caso de que realmente la traten)

#### Aplicación de secuencia y análisis de resultados

Aquí mostraremos las preguntas que se les hicieron a los estudiantes en un cuestionario, así como sus respuestas e interpretación de ellas.

### Análisis didáctico

Para realizar nuestro análisis didáctico revisamos los libros sugeridos por el Plan y Programa de Estudios de las Unidades de Aprendizaje GEOMETRIA ANALITICA y CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL del IPN.

En primera instancia, revisamos los siguientes libros para documentar cómo es introducido el concepto de *graficación de expresiones algebraicas*.

Nuestro análisis didáctico nos muestra lo siguiente:

a) Lehmann (2000) utiliza el plano cartesiano para la representación gráfica y hace una descripción de las partes que lo forman. No trabaja en el texto con gráficas del tipo  $\sqrt{x+a}$ . El método que utiliza para la graficación es el de tabulación. (p.5-7,32-34)

b) Granville (2001) utiliza el método de tabulación para la gráfica de ecuaciones. Además, utiliza el cálculo diferencial como otro método de graficación. No utiliza ejemplos que involucren expresiones del tipo  $\sqrt{x+a}$  (p. 12, 13,98)

c) Leithold (1987) utiliza el método de tabulación para el gráfico de expresiones matemáticas. Hace uso de ejemplos con expresiones que involucran raíces cuadradas, por ejemplo, al graficar la expresión  $y^2 - x - 2 = 0$ , la expresa de la forma  $y = \pm\sqrt{x+2}$  y el gráfico lo realiza, considerando “por partes” a la expresión, de manera que primero traza la parte correspondiente a  $y = +\sqrt{x+2}$  y después, en el mismo plano, la correspondiente a  $y = -\sqrt{x+2}$  (p. 18-20)

d) Swokowski (1989) utiliza también el método de tabulación para el gráfico de expresiones matemáticas. Usa ejemplos con expresiones que involucran raíces cuadradas, por ejemplo, el trazo de la expresión  $y^2 = x$ , el cual realiza por el criterio de simetría, considerando que es una función cuadrática que es simétrica con respecto al eje X, primero traza la parte positiva y después, “refleja” la parte restante. (p. 11,12, 15,16,17)

En segunda instancia, revisamos los siguientes textos con el fin de documentar cómo es introducido el concepto de función y su trazo en el plano cartesiano.

a) Leithold (1987) define a la función como al conjunto de pares ordenados tales que la primera entrada no se repita con un valor diferente en la segunda entrada. En cuanto a la graficación, se utiliza el método de tabulación y en el tratamiento de funciones del tipo  $y = \sqrt{x+a}$ , sólo se trata un ejemplo en donde se determina el dominio de la función, es decir, para que valores de  $x$ ,  $y = \sqrt{x+a}$  es una función. (p. 50-53)

b) Swokowski (1989) define la función como una regla de correspondencia en donde a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo un elemento del contradominio. El método utilizado para la graficación es la tabulación, y no se encontraron ejemplos de graficación de funciones del tipo  $y = \sqrt{x+a}$  (p. 29,33,34)

c) Granville (2001) define a una función de la siguiente manera, “Cuando *dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda*”. NO se encontraron métodos para graficar funciones ni ejemplos de graficación de funciones del tipo  $y = \sqrt{x+a}$  (p. 98)

d) Spivak (1992) da dos definiciones de lo que es una función; a) como pares ordenados y b) una regla de correspondencia entre elementos del conjunto de los reales. En cuanto a la gráfica de una función, se menciona que debe hacerse por tabulación a través de la localización en el plano de los pares ordenados. No se encontraron ejemplos de graficación de funciones del tipo  $y = \sqrt{x+a}$  (p. 49-69)

e) Lehmann (2003) define a una función como “Si dos variables  $x$  y  $y$  están *relacionadas de tal modo que para cada valor admisible de  $x$  (dentro de su dominio), le corresponden uno o mas valores de  $y$ , se dice que  $y$  es una función de  $x$* ”. Se hace una distinción entre lo que es una función uniforme (del tipo  $y = 2x + 3$ ) y una función multiforme (del tipo  $y = \pm\sqrt{x+a}$ ). En cuanto a la representación gráfica de las funciones, define a la gráfica de una función como el lugar geométrico formado por todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen la función  $y = f(x)$ . No encontramos ejemplos de trazo de gráficas del tipo  $y = \sqrt{x+a}$  (p. 68-69,75-79)

### Aplicación de cuestionario y análisis de resultados

En esta parte de nuestra investigación, en base a lo que encontramos en los libros de texto, elaboramos un cuestionario formado por 9 preguntas. Se aplicó a un total de 27 alumnos de cuarto semestre de nivel medio superior del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos Narciso Bassols del IPN. En este nivel de estudios los estudiantes ya han cursado las unidades de aprendizaje Algebra, Geometría y Trigonometría, Geometría analítica y actualmente cursan Calculo Diferencial. Se esperaban ciertos resultados de cada una de las preguntas aplicadas. Las más representativas de nuestro trabajo son las siguientes:

1) ¿Cuáles son los métodos que conoces para la graficación de funciones?

2) ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan una función? (figura 1)

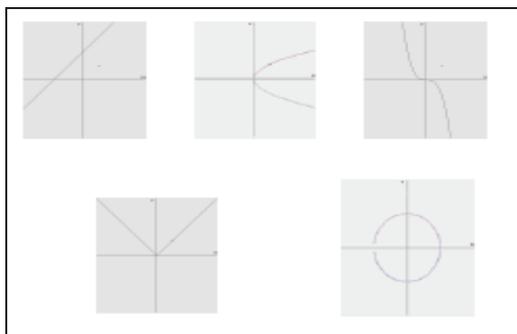


Figura 1

3) ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan a la función  $y = \sqrt{-x}$ ? (figura 2)

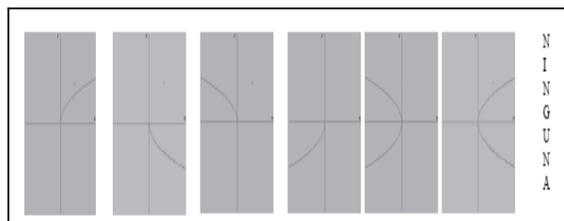


Figura 2

4) ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan a la función  $y = -\sqrt{x}$ ? (figura 3)

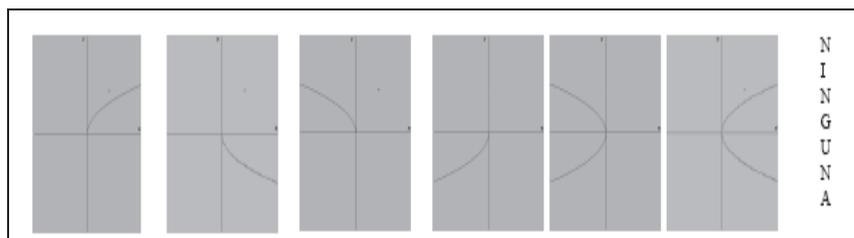


Figura 3

5) ¿Cuál de las siguientes gráficas representa la función  $y^2 = x$ ? (figura 4)

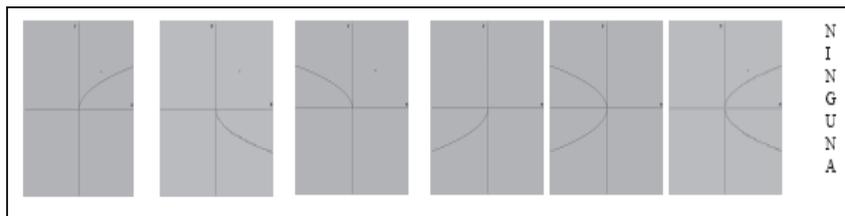


Figura 4

6) ¿Cuál de las siguiente graficas representa la función  $y = \sqrt{x}$ ? (figura 5)

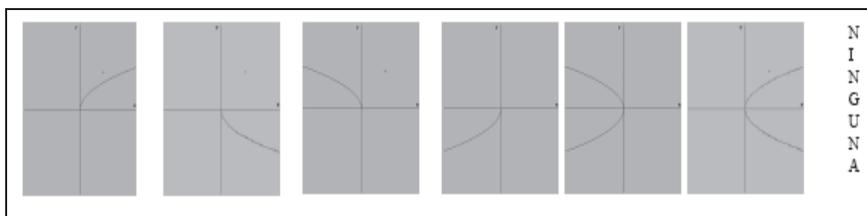


Figura 5

Cada una de nuestras preguntas tiene un objetivo, entre los cuales resaltamos los siguientes

- a) Comprobar que el método más utilizado por los estudiantes para la graficación de funciones es el de tabulación.
- b) Determinar si únicamente con mirar la gráfica, los estudiantes pueden identificar si representa o no una función.
- c) Determinar si pueden identificar de manera visual el dominio y contradominio de la función.
- d) Determinar si los estudiantes son capaces de distinguir entre las gráficas de las funciones  $y = \sqrt{x}$  y  $y^2 = x$  para determinar que no se trata de la misma expresión, por lo que sus gráficas no deben ser las mismas.

Una vez aplicado el cuestionario a los estudiantes, los resultados que obtuvimos fueron los siguientes:

Pregunta 1: El 96 % de los estudiantes respondió que el método de tabulación es el que utiliza como método para graficar funciones. Eso se debe a que es el más utilizado por los libros de texto. (Acuña, 2001)

Pregunta 2: El 90% de los estudiantes identifican por lo menos a una de las gráficas como una función, aplicando la definición de regla de correspondencia. Suponemos que eso se debe también a la definición de función que manejan los libros de texto.

Pregunta 3: El 75% de los estudiantes declaran que NINGUNA es la gráfica de la función, ya que ésta estaría graficada en el plan complejo, pues la raíz que queda siempre será negativa.

Pregunta 4: El 83% de los estudiantes responden que la gráfica es la que se muestra en la figura 6. Probablemente no tuvieron problemas para graficar, pues el signo “menos” se encontraba fuera del radical.

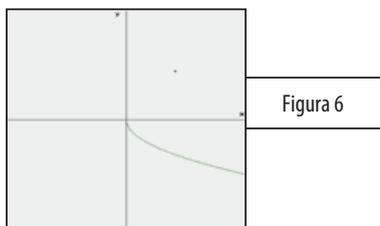


Figura 6

**Pregunta 5:** El 60% de los estudiantes identifican a la gráfica de la figura 7 como respuesta.

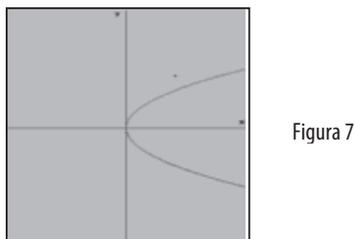


Figura 7

**Pregunta 6:** El 81% de los estudiantes respondieron que la grafica de la figura 8 como respuesta. Suponemos que esto se debe a que no existe un signo negativo fuera del radical y alumno se dedico a darle valores a “x” para después ubicar la gráfica.

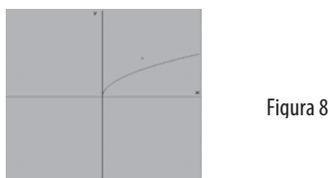


Figura 8

## Conclusiones

Nuestras conclusiones son en base a dos aspectos.

**En cuanto a los libros de texto:**

- ❖ En su mayoría, utilizan el método de tabulación para la graficación de ecuaciones y funciones.
- ❖ Sólo manejan la definición de función uniforme, pues es la que se utiliza en la mayoría de los libros revisados.
- ❖ Los autores de los libros texto saben que hay problemas para graficar expresiones del tipo  $ay^2 + bx + c = 0$ , pues se trata de una expresión que involucra dos valores ( $\pm$ ). El tratamiento para este tipo de gráficos es distinto en por lo menos 2 de ellos:
  - a) Leithold (1987) reafirma que se trata de una expresión que involucra dos valores ( $\pm$ ). Primero grafica a la expresión con los dos valores y luego la grafica por separado tanto para el valor positivo, como para el valor negativo. (p. 50-53)

b) Swokowski (1989) sólo grafica una parte de la parábola (positiva) y utiliza la simetría para reflejar la otra parte (negativa). Esto lo hace para indicar que esta expresión adquiere dos valores. (p. 29,33,34)

#### En cuanto a las concepciones de los estudiantes:

- ❖ Sólo reconocen una definición de función (función uniforme), pues es la mas utilizada por los libros de texto.
- ❖ Grafican por el método de tabulación, y esto se debe a que es el más utilizado por los libros de texto, tal u como Acuña (2001) afirma que el método de tabulación ha sido el único método con el ha contado el profesor y el estudiante para graficar
- ❖ Utilizan el método del trazo de verticales para determinar si una gráfica representa una función.
- ❖ Los gráficos de expresiones del tipo  $y = -\sqrt{x}$  sólo se pueden realizar en el plano complejo. Esto se debe al signo (-) aparece en la expresión.
- ❖ La gráfica de la expresión  $y = -\sqrt{x}$  está determinada para todo valor de  $x$
- ❖ La gráfica de la expresión  $y^2 = x$  es una parábola horizontal que abre hacia la derecha. Además, esa gráfica no representa la gráfica de una función.
- ❖ La gráfica de la función  $y^2 = x$  es la misma que la gráfica de la función  $y = \sqrt{x}$  porque representan la misma función pero están expresadas de manera distinta.

#### Respecto a nuestras preguntas iniciales:

- ❖ Los estudiantes grafican a la función  $y^2 = x$  como una parábola que abre hacia la derecha; a la función  $y = \sqrt{-x}$  no se le puede graficar y la función  $y = -\sqrt{x}$  tampoco puede graficarse puesto que involucra un signo de menos (aunque este se encuentre fuera de la raíz)
- ❖ Las dificultades que se generan son
  - Los gráficos de expresiones del tipo  $y = -\sqrt{x}$  sólo se pueden realizar en el plano complejo. Esto se debe al signo (-) aparece en la expresión
  - La gráfica de la función  $y^2 = x$  es la misma que la gráfica de la función  $y = \sqrt{x}$  porque representan la misma función pero están expresadas de manera distinta
- ❖ Los argumentos de los estudiantes son:

- La gráfica de la función  $y^2 = x$  es la misma que la gráfica de la función  $y = \sqrt{x}$  porque representan la misma función pero están expresadas de manera distinta
- Los gráficos de expresiones del tipo  $y = -\sqrt{x}$  sólo se pueden realizar en el plano complejo.

### Referencias bibliográficas

Acuña, C. (2001) Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(3), 203-217

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2000). Teoría de Situaciones Didácticas. En R. Cantoral, R.M. Farfan, F. Cordero, J.A. Alanis, R.A. Rodríguez y A. Garza, *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (p.p. 41-44), México: Trillas.

Granville, W. (2001). *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa

Lehmann, C. (2000). *Geometría Analítica*. México: Limusa.

Lehmann, C. (2003). *Álgebra*. México: Limusa- Noriega

Leithold, L. (1987). *El Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

Spivak, M. (1992). *Cálculo Infinitesimal*. México: Reverte.

Swokowski, W. E.(1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Este trabajo fue realizado en el marco del proyecto:

“Diseño de una secuencia de aprendizaje de la trigonometría en el Nivel Medio Superior”. Registro asignado por la SIP del IPN: 20131797.