EQUIVALENCIA FENOMENOLÓGICA ENTRE FENÓMENOS Y EQUIVALENCIA FENOMENOLÓGICA ENTRE DEFINICIONES

Phenomelogical equivalence between phenomena and phenomelogical equivalence between definitions

Francisco Javier Claros Mellado[a], María Teresa Sánchez Compaña[b], Moisés Coriat Benarroch[c]

[a] Universidad Complutense de Madrid, [b] Universidad de Málaga, [c] Universidad de Granada

Resumen

Presentamos resultados relativos a la equivalencia matemática y fenomenológica de la definición de límite finito de una sucesión y la definición de sucesión de Cauchy. Para ello enunciamos dos criterios que permiten determinar cuando dos fenómenos son equivalentes y cuando lo son dos definiciones, desde un punto de vista fenomenológico. A continuación y usando estos resultados realizamos avances significativos para demostrar en un futuro próximo que la definición de límite finito de una función en el infinito y la condición de Bolzano-Cauchy, además de ser equivalentes matemáticamente también lo son fenomenológicamente. Para ello enunciamos los fenómenos organizados por la definición de Bolzano-Cauchy que convenimos en llamarla definición de función de Cauchy.

Palabras clave: *equivalencia, fenomenología, límite, sucesión, función.*

Abstract

We present results about the mathematical and phenomenological definition of equivalence of finite limit of a sequence and the definition of Cauchy sequence. For this, we state two criteria to determine when two phenomena are equivalent and when two definitions are equivalent too, from a phenomenological point of view. Furthermore we use these results to make significant progress in the near future to show that the definition of finite limit of a function at infinity and the Bolzano-Cauchy condition are mathematically and also phenomenologically equivalent. For this we state phenomena organized by the Bolzano-Cauchy definition that we agree to call function Cauchy definition.

Keywords: *equivalence, phenomenology, limit, sequence, function.*

DEFINICIONES SELECCIONADAS

En Claros (2010) se eligió la definición que denominamos ε-N después de realizar una consulta a expertos en la que se presentaron siete definiciones extraídas de manuales universitarios. Esta definición convenimos en llamarla definición S y por su analogía formal elegimos la definición LFFP denominada límite finito de una función f en un punto. Junto a estas dos definiciones enunciamos la definición de sucesión de Cauchy para sucesiones (SC), la caracterización por sucesiones del límite funcional (CPS) y el criterio general de convergencia de Bolzano-Cauchy que convenimos en denominarlo definición de función de Cauchy (FC).

> Definición S: Sea x_n una sucesión en R, decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos lim x_n= x) si para cada $\varepsilon>0$, existe un número natural N tal que si $n > N$ se cumple que $|x_n-x| <\varepsilon$ (Spivak, 1991, p. 615.)

Claros, F.J., Sánchez-Compaña, M. T., y Coriat, M. (2014). Equivalencia fenomelógica entre fenómenos y equivalencia fenomenológica entre definiciones. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 37-44). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Definición SC: *Una sucesión* $\{a_n\}$ *es una sucesión de Cauchy si para* $\varepsilon.>0$ *existe un número natural N tal que, para todo m y n, si m,n>N, entonces* $|a_n-a_m| < \varepsilon$. *(Esta condición se escribe generalmente* $\lim_{m,n\to\infty} |a_n - a_m|=0$*).* (Spivak, 1991, p. 624.)

Definición LFFP: *La función f tiende hacia el límite L en a significa: para todo* $\varepsilon > 0$ *existe algún* $\delta > 0$ *tal que, para todo x, si* $0 < |x-a| < \delta$, *entonces* $|f(x)-L| < \varepsilon$. (Spivak, 1991, p. 118. Notación adaptada.)

Definición CPS: *Sea f una función con valores reales definida en D y sea a un punto de acumulación de D. Diremos que el límite de f(x), cuando x tiende a a es L, si para cada sucesión* $\{x_n\}\to a$, $x_n\neq a$, *se cumple que* $f(x_n) \to L$. (Ortega, 1993, p.68)

Definición FC. Cualquiera que sea la naturaleza del límite, bien para $x\to x_0$ *o* $x\to\infty$, *asi como que sea a la derecha o izquierda de* x_0, *se puede enunciar el siguiente criterio general de convergencia de Bolzano-Cauchy: La condición necesaria y suficiente para que una función f(x), definida sobre un conjunto* $I \subset R$, *tienda hacia un límite finito l, cuando* $x\to x_0$, *punto de acumulación de I, es que para todo* $\mathcal{E}>0$ *exista un entorno* δx_0, *tal que cualesquiera que sean* x' *y* x'' ϵ $\delta x_0 \cap I$ *se tenga* $|f(x')-f(x'')|< \mathcal{E}$ (Losada-Rodríguez, 1978)

Esta definición (Def FC) vamos a dividirla en dos partes por un lado tendremos cuando $x\to x_0$ y por otro lado cuando $x\to\infty$. Nosotros nos ocuparemos del primer caso y convenimos en llamarla definición de función de Cauchy.

Una vez presentadas las cinco definiciones con las que se va a trabajar vamos a establecer la equivalencia fenomenológica entre la definición de límite finito de una sucesión (Def S) y la definición de sucesión de Cauchy (Def SC). A continuación caracterizaremos los fenómenos organizados por la definición de función de Cauchy (Def FC) como un paso previo a un trabajo que está aún por hacer: demostrar la equivalencia fenomenológica entre la definición de límite finito de una función en un punto y la definición de función de Cauchy y entre esta y la caracterización por sucesiones del límite finito de una función en un punto.

CRITERIO DE EQUIVALENCIA FENOMENOLÓGICA ENTRE DEFINICIONES

En Claros, Sánchez y Coriat (2009) y Claros (2010) se presentaron los fenómenos organizados por la definición de límite finito de una sucesión y la definición de sucesión de Cauchy. En el caso de la definición de límite finito de una sucesión estos fenómenos se denominaron aproximación simple intuitiva (a.s.i) y retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s). Por otro lado en el caso de la definición de sucesión de Cauchy estos fenómenos se denominaron aproximación simple intuitiva de Cauchy y retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones de Cauchy. En Claros, Sánchez y Coriat (2013) se dieron avances significativos respecto a estos nuevos fenómenos que habíamos observados, que llevaron a enunciar dos criterios que permiten decidir cuando dos fenómenos son equivalentes fenomenológicamente y cuando dos definiciones son equivalente fenomenológicamente. Los criterios fueron los siguientes:

- Criterio 1. *Dos fenómenos son equivalentes fenomenológicamente si corresponden al mismo enfoque (o intuitivo o formal) y la verificación de un fenómeno va irremediablemente unida a la verificación del otro y viceversa.*

Para estudiar la equivalencia fenomenológica entre definiciones, enunciamos el siguiente criterio:

- Criterio 2. *Dos definiciones matemáticamente equivalentes son equivalentes fenomenológicamente si los fenómenos organizados por cada una de ellas son fenomenológicamente equivalentes.*

Teniendo en cuenta el criterio 1 y el criterio 2 vamos a estudiar si los pares de fenómenos organizados por cada definición son equivalentes entre si. Abordaremos en primer lugar las sucesiones y en segundo lugar las funciones. En el cada caso intentaremos dar evidencias de la equivalencia fenomenológica entre los pares de definiciones: definición S – definición SC y definición F- definición FC. Para demostrar esta equivalencia fenomenológica será imprescindible demostrar la equivalencia fenomenológica entre los fenómenos asociados a cada una de ellas.

SUCESIONES. FENÓMENOS ASOCIADOS A LAS DEFINICIONES S Y SC

Los fenómenos organizados por la definición S ya fueron descritos con detalle en Claros (2010) y Sánchez (2012). Estos fenómenos son denominados fenómeno de aproximación simple intuitiva (a.s.i) y fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s). En este apartado nos ocupamos de describir los fenómenos organizados por la definición de sucesión de Cauchy que convenimos en llamarlos fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy (a.s.i.c) y retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones de Cauchy (i.v.s.c).

Aproximación simple intuitiva de Cauchy

Cuando realizamos una lectura informal de la definición de sucesión de Cauchy observamos que las distancias entre los términos de la sucesión se hacen cada vez más pequeñas a medida que n crece. Podemos decir que las distancias entre los términos de la sucesión tienden a cero cuando n y m tienden a infinito. Convenimos en llamar a este fenómeno, fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy.

- *Aproximación simple intuitiva de Cauchy (a.s.i.c).* Dados k términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1,a_1)$, $(2,a_2)$, …, (k,a_k), caracterizamos la aproximación simple intuitiva de Cauchy como el fenómeno observado al inspeccionar cualquier secuencia de valores; a medida que avanzamos en la sucesión, la diferencia entre dos valores $|a_n - a_m|$ "parece acercarse" a cero. Es decir a medida que avanzamos en la sucesión, las diferencias existentes entre cualesquiera dos valores de la sucesión se hacen cada vez más pequeñas.
- *Modelo*. En la sucesión *(1,1), (2,1/2), (3,1/3),…*, las diferencias $|1/n- 1/m|$, parecen acercarse a 0 a medida que *n y m* crecen. Las diferencias entre los términos consecutivos se van haciendo cada vez más pequeñas: $|1/2 –1| < |1/3 –1/2| < |1/4-1/3| < …$

El fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy es el fenómeno más fácil de observar en las sucesiones de Cauchy y sirve para obtener cierta convicción sobre el hecho de que las diferencias entre los términos de la sucesión se hacen cada vez más pequeña a medida que avanzamos en ella. Sin embargo este fenómeno no garantiza que la sucesión con la que se esté trabajando sea una sucesión de Cauchy, solamente da una primera pista sobre ello.

Retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones de Cauchy

La seguridad de que los términos, cuando avanzamos en la sucesión, no van a tener un comportamiento inesperado, se adquiere con el fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones de Cauchy, el cual se apoya en los dos procesos siguientes, que forman parte de la Definición SC.

- Si $\varepsilon>0$ existe un N perteneciente al conjunto de los números naturales.
- Si n, m >N entonces $|a_n-a_m|<\varepsilon$

La observación conjunta de estos dos procesos da lugar a lo que denominamos fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de Cauchy o i.v.s.c.

El fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de Cauchy se manifiesta al interpretar y aplicar los procesos indicados, desde una perspectiva métrica, la cual exige construir una función e-N. Dicho en términos coloquiales y gráficos, el fenómeno de Cauchy corresponde a un proceso de ida-vuelta. Una vez fijado épsilon, tenemos que determinar el valor de N (proceso de ida) a partir del cual las diferencias entre dos términos cualesquiera de la sucesión son menores que el valor de épsilon fijado anteriormente (proceso de vuelta).

En el fenómeno de Cauchy se lleva a cabo la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada unívocamente a la sucesión. De hecho, con el apoyo de la propia sucesión de referencia, la definición de sucesión de Cauchy induce la construcción simbólica de tal función, o en su defecto la demostración de su existencia, la cual sirve a su vez para establecer una propiedad de la sucesión dada. Esta nueva función emergente resulta ser una función natural de variable real (ε, N(ε)).

El modelo de este fenómeno es el siguiente:

Partiendo de la sucesión (n, 1/n) se construye la función (ε, E(1/ε) + 1) donde E designa la función parte entera. Si fijamos e, tenemos que determinar N de manera que si n, m pertenecen al conjunto de los números naturales se cumpla que $|1/n - 1/m|<\varepsilon$. Sabemos que $|1/n - 1/m|<1/n$ es una desigualdad que se cumple para todo n, m>1 y n<m; además se cumple que 1/n< ε, por la propiedad arquimediana. Entonces tomando N=E(1/ε) + 1, aseguramos que $|1/n - 1/m|<\varepsilon$.

Como consecuencia de todo lo anterior afirmamos que la definición de sucesión de Cauchy organiza los fenómenos de aproximación simple intuitiva de Cauchy (a.s.i.c) y de ida y vuelta en sucesiones de Cauchy (a.s.i.c).

COMPARACIÓN DE LOS FENÓMENOS DESCRITOS

En este apartado comparamos los fenómenos asociados al par *definición S – definición SC* con el fin de establecer relaciones entre los pares de fenómenos asociadas a cada una de las definiciones y también para establecer relaciones entre dichas definiciones siempre desde un punto de vista fenomenológico.

Aproximación intuitiva

En el fenómeno a.s.i, los términos de la sucesión parecen acercarse a un número (candidato a límite), mientras que, en el fenómeno a.s.i.c, las diferencias entre los términos de la sucesión parecen devenir cada vez más pequeñas.

A pesar de existir diferencias notables entre los fenómenos de cada pareja, diferencias que dotan a cada uno de ellos de una entidad propia, observamos también cierta relación, que ilustraremos con un ejemplo.

Dada la sucesión $u_n = \dfrac{1+3n}{n+2}$ observamos que los términos parecen acercarse al valor 3. Esto significa que, si pensamos una escala de proximidad a 3, la secuencia u_{100}, u_{1000}, u_{10000} es una secuencia de valores cada vez más próximos a 3, como corresponde al fenómenos a.s.i. También observamos que las diferencias entre dos términos están más próximas a cero si los índices son mayores: $u_{10000} - u_{1000} < u_{1000} - u_{100}$, como corresponde al fenómeno a.s.i.c. Desde luego, en este ejemplo, no hay razón alguna para dar prioridad a uno de los fenómenos frente al otro

A lo dicho en este caso particular le asignamos validez general:

Si el candidato a límite, en la Definición S, se eligió correctamente (lo cual nunca está garantizado por el enfoque intuitivo asociado a la primera parte de la definición) es imposible que se dé el fenómeno a.s.i pero no el a.s.i.c o, recíprocamente, que se dé el fenómeno a.s.i.c pero no el fenómeno a.s.i. Dicho con otras palabras, si el candidato a límite fue elegido correctamente, los fenómenos a.s.i y a.s.i.c son distinguibles, pero se dan conjunta e inseparablemente.

Este hecho lo expresaremos diciendo que los fenómenos a.s.i. y a.s.i.c son equivalentes o que hay equivalencia fenomenológica entre los enfoques intuitivos incluidos en Definición S y Definición SC.

Queda pendiente de estudio el supuesto en que el candidato a límite no fuera elegido correctamente. Creemos que algunas respuestas a este supuesto ayudarán a desarrollar una fenomenología didáctica del límite.

Retroalimentación

En los fenómenos i.v.s e i.v.s.c, se observa que las funciones asociadas a cada uno de estos fenómenos pueden ser distintas.

Consideremos el siguiente ejemplo. Dada la sucesión $A_n=\{1/n\}$, observamos que la función (ε, N(ε)) en la definición de límite finito es distinta de la función (ε, N(ε)) asociada a la misma sucesión A_n en la definición de sucesión de Cauchy. Esta afirmación la vamos a justificar tomando valores de epsilon y observando qué valor debe tomar N para que se cumplan la definición S y la definición SC. La Tabla 1 recoge lo esencial del ejemplo.

Tabla 1. Ejemplo

	Función *(ε, N(ε)) en la definición de límite finito de una sucesión*	Función *(ε, N(ε)) en la definición de sucesión de Cauchy*
$\varepsilon=1/4$	|1/n|< ¼ para N=5	|1/n - 1/m|< ¼ para N=4
$\varepsilon=1/5$	|1/n|< 1/5 para N=6	|1/n - 1/m|< 1/5 para N=5
$\varepsilon=1/6$	|1/n|< 1/6 para N=7	|1/n - 1/m|< 1/6 para N=6
$\varepsilon=1/7$	|1/n|< 1/7 para N=8	|1/n - 1/m|< 1/7 para N=7
$\varepsilon=1/8$	|1/n|< 1/8 para N=9	|1/n - 1/m|<1/8 para N=8

Aunque la definición de la función (*ε, N(ε)*) parece distinta en ambos casos ya que los valores que toma no coinciden y lo que se hace con ellos tampoco, siempre podemos encontrar una función que unifique ambas ya que si elegimos como $N=\max\{n_1,n_2\}$, (n_1 es el valor N en la definición de límite finito de una sucesión y n_2 el valor de N en la definición de sucesión de Cauchy), se cumplen la Definición S y la Definición SC. Por lo tanto si se da un fenómeno, se da otro y recíprocamente. Esto, al igual que sucede con el enfoque intuitivo, justifica nuestro criterio de equivalencia fenomenológica el cual afirma que dos fenómenos son equivalentes si la presencia de uno de ellos va irremediablemente unida a la presencia del otro y viceversa. Por ello, concluimos que, en las sucesiones con límite finito, hay un paralelismo entre la equivalencia matemática y la equivalencia fenomenológica.

EQUIVALENCIA FENOMENOLÓGICA ENTRE FENÓMENOS Y DEFINICIONES

Si reunimos todas las consideraciones sobre la equivalencia de los fenómenos, observamos que la equivalencia fenomenológica es algo más compleja que la equivalencia matemática. La equivalencia matemática establece que el contenido de una definición no es esencialmente diferente del de la otra. La equivalencia fenomenológica establece que las parejas de fenómenos son distinguibles pero no se pueden dar los unos sin los otros.

Esta equivalencia fenomenológica entre las parejas de fenómenos: a.s.i / a.s.i.c e i.v.s / i.v.s.c, lleva consecuentemente a establecer una equivalencia fenomenológica entre las definiciones de límite finito de una sucesión y sucesión de Cauchy, ya que cada definición organiza fenómenos que son fenomenológicamente equivalentes

FUNCIONES. FENÓMENOS OBSERVADOS EN LAS DEFINICIONES LFFP, CPS Y FC.

Los fenómenos organizados por las definiciones de límite finito de una función en un punto (Def LFFP) y la caracterización por sucesiones del límite funcional (Def CPS) ya fueron descritos con detalle Sánchez (2012). Estos fenómenos son denominados fenómeno de aproximación doble intuitiva (ADI), fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en funciones (IVF) y fenómeno de infinitas retroalimentaciones o ida-vuelta de sucesiones coordinadas por la función (Iivs). También en Sánchez (2012) se vio la equivalencia fenomenológica entre ambas definiciones.

Está aún por estudiar la equivalencia fenomenológica entre las definiciones de límite finito de una función en un punto (Def LFFP) y la definición de función de Cauchy (Def FC) y entre la caracterización por sucesiones del límite funcional (Def CS) y la definición de función de Cauchy (Def FC). En este apartado no vamos a demostrar la equivalencia fenomenológica entre los pares de definiciones señaladas, lo que si vamos a hacer es describir los fenómenos organizados por la definición de Cauchy- Bolzano como paso previo para establecer dichas equivalencias fenomenológicas.

Aproximación doble intuitiva de Cauchy- Bolzano. (ADICB)

Cuando dos valores cualesquiera de la variable independiente, x´ y x´´, parecen acercarse entre sí, los de sus imágenes, f(x´) y f(x´´), también parecen acercarse, con cualquier patrón de acercamiento que se elija para los valores de la variable independiente. Nos referimos a este fenómeno como “aproximación doble intuitiva de Cauchy- Bolzano” (ADICB).

El fenómeno de aproximación doble intuitiva de Cauchy- Bolzano nos puede ofecer cierta convicción sobre el hecho de que las diferencias entre las imágenes de valores de la función se hacen cada vez más pequeña a medida que los propios valores de la variable independiente se acercan entre sí. Sin embargo este fenómeno no garantiza que la función con la que se esté trabajando cumpla la condición de ser de Cauchy, solamente da una primera pista sobre ello.

El modelo de este fenómeno es el siguiente:

Dada la función $f(x)=x^2$. Si tomamos los valores (1,01, 1.0201), (1,001, 1,002001), (1,0001, 1.00020001),…. podemos observar como si las diferencias entre los valores de la variable independiente tienden a cero, los valores de la variable dependiente tienden a cero también.

Retroalimentación o ida-vuelta de Cauchy- Bolzano en funciones

Al observar la condición de Cauchy de una manera formal podemos observar dos procesos:

- El primer proceso parte de la siguiente afirmación *para todo* $\mathcal{E}>0$ *exista un* $\delta>O$
- El segundo proceso se observa en la siguiente afirmación: *cualesquiera que sean* $|x'-x''|<\delta$ *se tenga* $|f(x')-f(x'')|<\mathcal{E}$

La observación conjunta de estos dos fenómenos es lo que denominamos retroalimentación o ida-vuelta de Cauchy-Bolzano. (IVFCB)

Este fenómeno de retroalimentación se manifiesta al interpretar y aplicar los procesos indicados, desde una perspectiva métrica, la cual exige construir una función e-δ. Dicho en términos coloquiales y gráficos, el fenómeno de retroalimentación de Cauchy- Bolzano para funciones corresponde a un proceso de ida-vuelta. Una vez fijado épsilon, tenemos que determinar el valor de *delta* (proceso de ida) por el cual, si dos valores de la variable independiente se diferencian en menos de ese δ, las diferencias entre las imágenes de esos términos de la función son menores que el valor de épsilon fijado anteriormente (proceso de vuelta).

En el fenómeno de retroalimentación de Cauchy-Bolzano para funciones se lleva a cabo la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada unívocamente a la función inicial.

De hecho, con el apoyo de la propia función de referencia, la definición del criterio general de convergencia de Bolzano-Cauchy induce la construcción simbólica de tal función, o en su defecto la demostración de su existencia, la cual sirve a su vez para establecer una propiedad de la función. Esta nueva función emergente resulta ser una función real de variable real (e, δ(e))**.**

CONCLUSIONES

Describimos las conclusiones de este estudio en los siguientes puntos:

La Definición S ("definición épsilon - delta" de límite finito de una sucesión) organiza el fenómeno de aproximación simple intuitiva o fenómeno a.s.i y el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones o fenómeno i.v.s. El fenómeno a.s.i da un primer candidato a límite, que quedará confirmado, a través del fenómeno i.v.s, siempre que seamos capaces de construir una función epsilon-N que cumpla los dos procesos mencionados anteriormente en la definición del fenómeno i.v.s.

La Definición SC (de sucesión de Cauchy) organiza el fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy o a.s.i.c y el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de Cauchy o i.v.s.c. El fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy da una primera impresión de lo que sucede con la sucesión; si la sucesión es de Cauchy las distancias entre los términos se van haciendo cada vez más pequeñas; en caso contrario, la sucesión no sería de Cauchy. Una vez que tenemos cierta sospecha de que la sucesión es de Cauchy, recurrimos al fenómeno i.v.s.c y construimos una función épsilon-N que cumpla los dos procesos mencionados anteriormente en la definición del fenómeno i.v.s.c.

Entendemos que la equivalencia entre los cuatro fenómenos mencionados, considerados por parejas, a.s.i / a.s.i.c e i.v.s / i.v.s.c, es más compleja que la equivalencia matemática entre las definiciones; hemos precisado en qué sentido esa equivalencia fenomenológica es más compleja.

Hemos dado un criterio que permite decidir cuando dos fenómenos son equivalentes desde el punto de vista fenomenológico y esto nos ha llevado a afirmar que el fenómeno a.s.i es equivalente al fenómeno a.s.i.c y que el fenómeno i.v.s es equivalente al fenómeno i.v.s.c.

Hemos dado un criterio para decidir si dos definiciones son equivalentes fenomenológicamente y hemos usado este criterio para afirmar que la definición de límite finito de una sucesión y la definición de sucesión de Cauchy son equivalentes en este sentido.

Hemos recordado que la definición de límite finito de una función en un punto (Def LFFP) y la caracterización por sucesiones del límite funcional (Def CS) son fenomenológicamente equivalentes (Véase Sánchez, 2012)

Hemos abordado el estudio de la definición de función de Cauchy, deiniendo para ello dos fenómenos organizados por dicha definición: aproximación doble intuitiva Cauchy para funciones (ADICF) y retroalimentación de Cauchy para funciones (IVFCB).

PERSPECTIVAS FUTURAS

Queda aún mucho trabajo por hacer relativo a la equivalencia fenomenológica entre definiciones. De hecho entre nuestros próximos trabajos nos proponemos las siguientes tareas:

- Demostrar la equivalencia fenomenológica entre la definición de límite finito de una función en un punto (Def LFFP) y la definición de función de Cauchy (FC).
- Demostrar la equivalencia fenomenológica entre la caracterización por sucesiones (Def CS) y la definición de función de Cauchy (FC).
- Abordar el estudio del límite finito de una función en el infinito y su correspondiente relación con el límite finito de una sucesión.

Referencias

Claros, F. J. (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza*. Granada: Universidad de Granada.

Claros, F. J., Sánchez, M. T., y Coriat, M. (2009). Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.) *Investigación en Educación Matemática*, (pp. 197-209). Santander: SEIEM

Losada-Rodríguez, R. (1978). *Análisis Matemático*. Madrid: Pirámide

Ortega, J. (1993). *Introducción al Análisis Matemático*. Barcelona: Labor y Universidad Autónoma de Barcelona.

Sánchez, M.T (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza*. Granada: Universidad de Granada.

Spivak, M. (1991). *Calculus. Cálculo Infinitesimal*. Barcelona: Reverté.