

COMPETENCIAS EN LOS DECIMALES PERIÓDICOS

Competences in repeating decimal numbers

Yolanda Beltrán García, Bernardo Gómez Alfonso

Universidad de Valencia

Resumen

El objetivo de este estudio es determinar las dificultades que estudiantes de cuarto de ESO, de Bachillerato y del Máster de Profesor de Educación Secundaria de la especialidad de Matemáticas tienen con la operatoria y el orden, cuando realizan cálculos con números decimales periódicos. El trabajo se sustenta en un estudio de Rittaud y Vivier, del cual se hace una réplica de una parte de su cuestionario que utilizamos para la toma de datos. El análisis de las respuestas de los estudiantes permite identificar errores y carencias en la enseñanza, conducentes a un esquema de clasificación e interpretación de las actuaciones de los estudiantes.

Palabras clave: Competencia, decimales periódicos, errores

Abstract

The aim of this study is to determinate the difficulties that students of fourth course in secondary school, high school and teacher's master of secondary school students have with operation and order when they realize calculations with periodic decimal numbers. The study is based in a previous article of Rittaud and Vivier which is a replica of a part of their test we used for data collection. The analysis of students' answers allows identifying mistakes and deficiencies in education, leading to a classification scheme and interpretation of student performances.

Keywords: Competences, repeating decimals, mistakes

INTRODUCCIÓN

Las concepciones que los estudiantes construyen de los conceptos matemáticos dependen de los acercamientos o enfoques escolares con que la enseñanza los pone a su alcance, y varían a medida que el conocimiento de los estudiantes va evolucionando hacia un estatus superior.

La identificación y caracterización de estas concepciones permite conocer el efecto de la enseñanza al determinar qué es lo que realmente están aprendiendo los estudiantes y tomar decisiones al respecto, ya que en algunos casos son conocimientos erróneos, y esto constituye un obstáculo para el aprendizaje y la evolución de las concepciones.

Según Socas (2001, p.298), “Los números decimales se han convertido, en estos últimos años, en los protagonistas de todos los cálculos, ordenadores, calculadoras,..., desplazando completamente las fracciones. Sin embargo, su tratamiento en el ámbito escolar, propuestas curriculares en programas oficiales y desarrollos didácticos, no parece estar a la altura de las circunstancias, y no sólo por el interés del cálculo con calculadoras y ordenadores, sino, también, por el papel determinante que pueden jugar en la organización y comprensión de los sistemas numéricos.

La escritura decimal de los números ha producido confusiones entre lo que es un número decimal y lo que no lo es, identificando más al número decimal por su escritura decimal que por sus propiedades intrínsecas, lo que ha originado cierta ambigüedad entre la escritura decimal y el número decimal, de tal manera que decimal está asociado a números con comas en contraposición Beltrán, Y., y Gómez, B. (2014). Competencias en los decimales periódicos. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compañía, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 11-25). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

al número entero o número sin comas; esta acepción del término decimal es origen de diferentes errores.”

En relación con los decimales finitos, hay una problemática identificada (Centeno, 1988), o como acabamos de ver en Socas (2011), pero son pocos los trabajos en relación con los números decimales periódicos. Con el fin de aportar conocimiento fundamentado sobre este tema, este trabajo se va a centrar en el tema de los números decimales periódicos. Se quiere indagar en qué de particular se puede decir de los números decimales periódicos, más allá de la problemática de los números decimales.

OBJETIVOS

Los objetivos principales que nos planteamos en este estudio son conocer el modelo de enseñanza vigente en la Comunidad Valenciana, conocer los contenidos sobre los decimales en los libros de texto, determinar y clasificar actuaciones y errores en los estudiantes en relación a la codificación, operatividad y orden de números decimales periódicos, a través de un experimento basado en un cuestionario, y identificar los efectos de la enseñanza.

CONTEXTUALIZACIÓN DEL MODELO DE ENSEÑANZA

El currículum DOCV (2007) sitúa los decimales en los cuatro cursos de la ESO y los contenidos aparecen en el Bloque 2: Números.

En primero de ESO se trabaja la comparación y las operaciones elementales con números decimales finitos. En segundo se utilizan los decimales para introducir los porcentajes. En tercero se trabaja la relación entre las fracciones y los decimales (exactos y periódicos) mediante técnicas de transformación. Y, finalmente, en cuarto se amplía el concepto y se introducen los decimales infinitos no periódicos.

En cuanto al tratamiento de los decimales en los libros de texto, dado que el currículum oficial es común para todos, nos limitamos a resaltar los contenidos de una sola editorial, Anaya, ya que es con la que trabajaban los alumnos del centro donde se tomó la muestra para este estudio.

En el libro de 3º de ESO (Colera, Gaztelu, y Oliveira, 2010a), para introducir el tema, aparece una breve explicación del recorrido de los números decimales a lo largo de la historia. Seguidamente, se señala la utilidad de los números decimales, “sirven para designar medidas”, y cómo podemos representarlos, “sobre la recta numérica, de tal modo que con ellos podemos aproximarnos tanto como queramos a cualquiera de sus puntos”, resumiendo todo en la siguiente frase: “La expresión decimal de los números permite valorarlos, compararlo y operar con ellos de forma muy cómoda y eficaz”. Y a continuación, se presentan los tipos de números decimales.

El siguiente punto que aparece en el libro es el paso de fracción a decimal, en donde se indica que “para obtener la expresión decimal de una fracción, se efectúa la división entre el numerador y el denominador”. Además, hay una nota recordatoria que dice que “números racionales son los que se pueden poner en forma de fracción”, en donde aparece por primera vez una relación entre números decimales y racionales.

A este punto le siguen el paso de decimal exacto a fracción y los pasos de decimal periódico puro y mixto a fracción.

Finalmente, aparecen algunas actividades como las siguientes para practicar los contenidos.

Actividades

- 1** Indica qué tipo de número decimal es cada uno de los siguientes:
 $3,52$ $2,\bar{8}$ $1,\bar{5}4$ $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$
 $2,7\bar{3}$ $3,5222\dots$ $\pi - 2 = 1,1415926\dots$
- 2** Ordena de menor a mayor estos números:
 $2,\bar{5}$ $2,5$ $2,3\bar{5}$ $2,505005\dots$
- 3** Escribe tres números decimales comprendidos entre $2,5$ y $2,\bar{5}$.
- 4** Sin efectuar la división, y atendiendo solo al denominador de la fracción simplificada, di si las siguientes fracciones darán lugar a decimales exactos o periódicos:
 a) $\frac{44}{150}$ b) $\frac{42}{150}$ c) $\frac{101}{1024}$ d) $\frac{1001}{500}$

- 2** Completa el proceso para expresar como fracción el número dado.
- a) $6,21\bar{7}$ $\left\{ \begin{array}{l} N = 6,21777\dots \\ 100N = 621,77777\dots \\ 1000N = 6217,7777\dots \end{array} \right.$
- b) $0,031\bar{6}2$ $\left\{ \begin{array}{l} N = 0,0316262\dots \\ 1000N = 31,626262\dots \\ 100000N = 3162,626262\dots \end{array} \right.$
- 3** Expresa como fracción los decimales siguientes:
 a) $6,2\bar{5}$ b) $0,00\bar{1}$ c) $5,0\bar{1}8$
- 4** ¿Cuáles de los siguientes números son racionales? Ponlos en forma de fracción:
 a) $3,51$ b) $5,202002000\dots$
 c) $5,0\bar{3}$ d) $0,3212121\dots$
 e) $\pi = 3,141592\dots$ f) $7,4\bar{3}31$

En 4º de ESO (Colera, Gaztelu y Oliveira, 2010b), se recuerda la relación entre los números decimales y las fracciones vista en el curso anterior, y aparece un nuevo concepto, el de decimales no periódicos o irracionales. Además, en este curso hay un apartado dedicado a las aplicaciones de los decimales.

Por tanto, ni en este curso ni en el anterior hay problemas de operar con números decimales periódicos. Tampoco hay problemas de razonamiento, lo cual puede ayudar a entender las dificultades de los alumnos para resolver el cuestionario. También observaremos la ausencia de problemas de situaciones significativas para los alumnos.

Los contenidos de Bachillerato (DOCV, 2008) revisan los contenidos anteriores y profundizan en las nociones de recta real, distancia, intervalo y entorno.

MARCO TEÓRICO

Como ya se ha dicho antes, existen dificultades en el estudio de los números decimales y, además, también existen problemas a la hora de enseñar esta parte de las matemáticas a los alumnos. Para poder entender toda la problemática que representa el estudio de los números decimales, y en concreto el de los decimales periódicos, se han consultado los textos de “Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?” (Centeno, 1988), “Números decimales” (Castro, 2001), entre otros, y el estudio de Rittaud y Vivier (2013) sobre el cual se sustenta este trabajo.

Errores y dificultades

Los aspectos del concepto decimal que ofrecen una mayor resistencia a su adquisición por parte de los alumnos los conocemos a través del análisis de las respuestas que los alumnos dan a problemas que les planteamos. De esta manera, Centeno (1988, cap.9, p.136-138) analiza las dificultades, errores y obstáculos en los números decimales, e identifica los errores siguientes:

El primero de ellos está relacionado con *la lectura y escritura de los números decimales*. Cuando leemos un número decimal, primero pronunciamos la parte entera y después la parte decimal. Esta práctica lleva a pensar en la representación decimal como dos números enteros separados por una coma, lo que puede explicar ciertas creencias erróneas en la comparación de números expresados en forma decimal, como: un número decimal es mayor que otro cuantas más cifras tenga ($3'9 < 3'12$ porque $9 < 12$).

Otro obstáculo en la comprensión de la representación decimal nace de la utilización *del cero*, que forma parte de mecanismos que funcionan de distinta forma según el contexto en que aparece. Por ejemplo, algunos alumnos ignoran el cero e interpretan $0'036$ como 36, perdiendo la estructura global del número y viéndolo sólo como un número entero. O, otros, consideran $1'27$ distinto de $1'270$.

El tercer error que identifica Centeno está relacionado con *el orden entre decimales*. La aplicación del “orden lexicográfico” en la comparación de enteros y decimales requiere que los números tengan las mismas cifras, lo que en el caso de los decimales periódicos se logra desarrollando el período. Así, para la comparación de $3'\overline{91}$ y $3'\overline{125}$ debe hacerse expresando $3'919191$ y $3'125125$; de este modo se ve claramente que $919.191 > 125.125$.

Y, finalmente, el cuarto error aparece en *las operaciones*. El autor observa dificultades en el producto y la división debido a que se rompe la regla: multiplicar es aumentar y dividir es disminuir.

Ahora nos preguntamos, ¿son útiles ciertos errores en los procesos de aprendizaje?, ¿qué pueden revelarnos?

“Los errores que no se deben a distracciones, sino que se reproducen sistemáticamente en situaciones similares, son muy interesantes porque nos revelan la existencia de modelos implícitos erróneos. (...) Los comportamientos de los alumnos pueden ser correctos, aunque estén sometidos por modelos falsos”(Centeno, 1988, p. 141).

Y, ¿son los errores únicamente índices de un aprendizaje incompleto o de un fracaso?

Todas las formas de introducir los números decimales que permitan su aparición como números nuevos, con algunas propiedades diferentes a los naturales, pueden ocasionar obstáculos suplementarios que se añaden a la resistencia a la evolución del concepto. Además, muchas veces los alumnos se fabrican sus propias reglas de acción, las cuales no son siempre válidas y conducen al error.

Por tanto, los errores identificados por Centeno (1988) nos van a servir, en el apartado de la parte experimental, para construir el esquema de clasificación de las respuestas que dan los alumnos a las tareas, el cual completaremos con actuaciones observadas en las respuestas de los alumnos elegidos para nuestro experimento.

Procesos de Rittaud y Vivier para la comparación y la suma de decimales periódicos

A continuación, presentamos los procesos para la comparación y la suma de números decimales periódicos identificados en los trabajos de investigación de Rittaud y Vivier (2013), con la ayuda de ejemplos extraídos de Vivier (2011).

La comparación de dos decimales periódicos consiste en desarrollar el periodo y comparar cifra por cifra de izquierda a derecha.

Los autores dicen que los estudiantes no tienen dificultad con esta técnica, pero conduce a la desigualdad $0,\overline{9} < 1$, cuando debería conducir a $0,\overline{9} = 1$. Esto demuestra que aunque no veamos las mismas cifras en las expresiones decimales, pueden ser exactamente la misma expresión. La diferencia está en la interpretación de lo que se representa. Por eso, es necesario conocer otras técnicas como las que se describen en Vivier (2011), en particular, para el caso $0,\overline{9} = 1$:

$$1- \frac{1}{3} = 0'\overline{3} \rightarrow 3 \times \frac{1}{3} = 3 \times 0'\overline{3}. \text{ Entonces, } 1 = 0'\overline{9}.$$

$$2- 10 \times 0'\overline{9} = 9 + 0'\overline{9} \rightarrow 9 \times 0'\overline{9} = 9. \text{ Entonces, } 0'\overline{9} = 1.$$

$$3- \frac{1}{9} = 0.\overline{1}; \frac{2}{9} = 0.\overline{2}; \frac{3}{9} = 0.\overline{3}; \dots; \frac{9}{9} = 0.\overline{9}. \text{ Entonces, } 1 = 0.\overline{9}.$$

En cuanto a los cuatro procesos o técnicas que describen Rittaud y Vivier (2013) para calcular la suma de dos números decimales periódicos, veamos detalladamente cada uno de ellos:

1. Técnica de conversión a decimal finito, guiado por la codificación.

Consiste en truncar los números tomando valores aproximados, efectuar la suma de estos números decimales e inducir el resultado. Es decir, utilizar todas las aproximaciones posibles, y considerar el período como un entero para sumar. Además, hay que tener en cuenta que la suma de dos decimales periódicos es un decimal periódico y la suma es continua.

Por ejemplo, si queremos obtener el resultado de la suma $0.\overline{5} + 0.\overline{7}$, procederemos como sigue:

$$0.\overline{5} + 0.\overline{7} = 1.\overline{2}; 0.\overline{55} + 0.\overline{77} = 1.\overline{32}; 0.\overline{555} + 0.\overline{777} = 1.\overline{332}; \dots$$

Así, podemos concluir que $0.\overline{5} + 0.\overline{7} = 1.\overline{3}$.

Según Vivier (2011), este proceso causa errores en los estudiantes. Algunos utilizan las aproximaciones sin conocer que el resultado es periódico o no saben que el resultado presenta necesariamente un período.

2. Técnica de conversión a fracción y haciendo la suma después

Los alumnos que utilizan esta técnica, utilizan el hecho que saben efectuar la suma de dos racionales en el registro fraccionario pero no en el de los decimales periódicos.

$$0.\overline{5} + 0.\overline{7} = \frac{5}{9} + \frac{7}{9} = \frac{12}{9} = 1 + \frac{3}{9} = 1.\overline{3}$$

Según Vivier (2011), para los alumnos es difícil entender como los números decimales periódicos pasan a fracciones.

3. Uso explícito de $0.\overline{9} = 1$

$$0.\overline{5} + 0.\overline{7} = 0.\overline{9} + 0.\overline{3} = 1 + 0.\overline{3} = 1.\overline{3}$$

4. Algoritmo de la suma de dos números decimales en el sistema de base diez

Al igual que los errores, estos algoritmos nos van a servir, en el apartado de la parte experimental, para construir el esquema de clasificación.

PARTE EXPERIMENTAL

Metodología

En el trabajo de investigación de Rittaud y Vivier (2013) se presenta un cuestionario dividido en dos partes: un test individual y otro para realizar en grupo.

Nosotros nos vamos a centrar sólo en el test individual, en el cual los autores dan una caracterización a cada una de las cinco tareas que lo componen, con los siguientes títulos:

- Comprensión de la codificación (Tareas 1 y 2)
- Comparación (Tarea 3)
- Suma (Tarea 4)
- Diferencia (Tarea 5)

Una vez elaborado el cuestionario, se implementó, marcando un tiempo máximo de 30 minutos para resolverlo. Seguidamente se analizaron los datos obtenidos y se clasificaron y organizaron los resultados.

Muestra

El cuestionario se aplicó a un total de 107 estudiantes, distribuidos como muestra la siguiente tabla:

Tabla 1. Caracterización de las tareas del cuestionario

Curso	Grupos	Especialidad	Género		Alumnos
			M	F	
4º ESO	1	Opción A	3	10	13
1º Bachillerato	1	Científico	17	7	24
2º Bachillerato	2	Científico-Tecnológico	5	0	5
		Ciencias-Sociales	2	8	10
Máster Profesor/a	en 2	Matemáticas (curso 2012/13)	9	12	21
		Matemáticas (curso 2013/14)	15	19	34
					Total: 107

Los estudiantes de secundaria y de Bachillerato proceden del centro IES Sorolla. Su formación sigue las directrices de la programación del departamento de Matemáticas (IES Sorolla, 2013). La formación de los estudiantes de Máster viene dada por Gómez (2013).

Aunque los autores Rittaud y Vivier no dicen cuál es el objetivo de las tareas ni las caracterizan, en lo que sigue las caracterizamos de acuerdo con nuestra propia opinión. Mostramos las tareas tal y como se presentaron a los estudiantes, y la interpretación que se hace de cada una de ellas.

TAREA 1: Redondea el número que es diferente a los otros:
 $5,0\overline{0100}$ $5,001\overline{0001}$ $5,0\overline{01000100}$ $5,0\overline{0101}$ $5,0\overline{01000}$

La expresión numérica con decimal periódico no es única. Por eso se plantean en la tarea 1 cinco expresiones decimales periódicas, de las cuales cuatro son equivalentes (representan el mismo número), y la otra representa un número diferente. Las cuatro expresiones equivalentes se diferencian en que el período representado es diferente, no así el efecto que produce al repetirlo.

TAREA 2: Escribe de cuatro formas distintas el número $14,1\overline{21}$.

Como ya hemos dicho, la expresión numérica con decimal periódico no es única. Esta tarea es recíproca a la anterior; ahora se pide encontrar otras expresiones decimales equivalentes a la dada. Se espera que, desarrollando el período, perciban otros períodos distintos que expresan el mismo número decimal.

TAREA 3: Redondea la respuesta correcta y justifica tu respuesta:

a) $0,13 < 0,1\overline{3}$	0,13 = $0,1\overline{3}$	0,13 > $0,1\overline{3}$
b) $3,4 < 3,4\overline{0}$	$3,4 = 3,4\overline{0}$	$3,4 > 3,4\overline{0}$
c) $0,9 < 1$	$0,9 = 1$	$0,9 > 1$
d) $45,1\overline{01} < 45,1\overline{01}$	$45,1\overline{01} = 45,1\overline{01}$	$45,1\overline{01} > 45,1\overline{01}$

Aunque el orden de los números naturales viene determinado por el valor del dígito de mayor orden, en la comparación de decimales periódicos no basta con mirar únicamente las cifras significativas del período. Es decir, no basta con la comparación cifra a cifra como ocurre con los

naturales, sino que hay que tener en cuenta también los desarrollos. El efecto de los desarrollos decimales es clave.

Esta tarea se presenta en cuatro ítems, en los que se pide determinar si un número es menor, igual o mayor que otro. Es decir, es una tarea de comparación de números decimales finitos con decimales periódicos puros con partes periódicas iguales, números decimales puros con diferentes cifras periódicas, etc.

Para abordar el ítem c) se necesitan otros conocimientos, como el concepto de límite, ya que si procedemos como anteriormente llegamos a conclusiones erróneas, $0,9 < 1$, de las cuales Rittaud y Vivier hablan en su trabajo.

En conclusión, como ya hemos dicho, los números decimales no se pueden comparar atendiendo a su tamaño al igual que los enteros. Por eso, el procedimiento que cabe esperar para la resolución de esta tarea es que desarrollen los períodos y los comparen.

TAREA 4: Realiza las siguientes sumas:

$$0,2\bar{4} + 0,5\bar{7} =$$

$$6,7\bar{1} + 1,9\bar{5} =$$

$$0,5 + 0,7 =$$

$$0,0\bar{0} + 0,2 =$$

$$0,9 + 0,4 =$$

$$0,5 + 0,7\bar{2} =$$

TAREA 5: Realiza las siguientes restas:

$$2,1\bar{7} - 0,7 =$$

$$2 - 1,9 =$$

$$1,2\bar{0} - 0,7\bar{2} =$$

En la adición y sustracción de decimales periódicos no basta con sumar cifra a cifra las partes periódicas, es necesario tener en cuenta los desarrollos.

Lo que se espera que hagan los estudiantes en esta tarea es que desarrollen los períodos, para que, teniendo el mismo número de cifras después de la coma, operen como si fuesen enteros y, al percibir regularidades, escriban el resultado en forma de expresión decimal periódica.

Esquema de clasificación

El modelo de interpretación se ha elaborado para este trabajo a partir de los datos obtenidos del análisis de las respuestas de los alumnos, para caracterizar tipos de comportamiento.

Las categorías se han tomado como punto de partida para clasificar las actuaciones de los estudiantes. A su vez estas categorías se subdividen en subcategorías, éstas en clases, y éstas en subclases, según se profundiza en la apreciación de similitudes y diferencias en las interpretaciones plausibles, tanto de las expresiones escritas por los estudiantes, como de los procedimientos llevados a cabo por ellos.

1. RESPUESTA CORRECTA

1.1. SIN JUSTIFICACIÓN

1.2. CON JUSTIFICACIÓN

1.2.1. Desarrollan el período

1.2.1.1. Comparan números

1.2.1.2. Comparan por órdenes de unidad

1.2.1.3. Operan

1.2.2. Perciben la regularidad

1.2.2.1. Total

1.2.2.2. Parcial

1.2.3. Conversión a fracción

1.2.4. Utilizan la igualdad $0.\bar{9} = 1$

1.3. JUSTIFICACIÓN INSUFICIENTE O INCORRECTA

1.3.1. Completan las respuestas correctas con incorrectas

1.3.2. Por aproximación / Por el siguiente

1.3.3. Perciben mayor el número con mayor cantidad de cifras en el período

2. RESPUESTA INCORRECTA

2.1. SIN JUSTIFICACIÓN

2.2. CON JUSTIFICACIÓN

2.2.1. Comparan la parte periódica y se fijan en sus diferencias

2.2.2. Perciben números decimales finitos

2.2.3. Alargan el periodo

2.2.4. Acortan el periodo

2.2.5. Señalan un periodo arbitrario y/o añaden ceros

2.2.6. Resultado en forma de fracción (a veces incorrecta) o aproximación

2.2.7. Desarrollan el periodo y/o perciben diferencias

2.2.7.1. Operan y/o diferencian la n-ésima cifra decimal

2.2.7.2. Comparan por órdenes de unidad

2.2.7.3. Desarrollo parcial o no interpretan bien el resultado

2.2.8. Diferencian la parte entera de la decimal y operan por separado

2.2.9. Error de cálculo

2.2.10. Interpretación del enunciado incorrecta y/o diferente a la esperada

3. EN BLANCO O NO IDENTIFICADA

DESCRIPCIÓN Y EJEMPLOS DE ALGUNAS CATEGORÍAS DEL ESQUEMA DE CLASIFICACIÓN

Categoría 1. Respuesta correcta

Las respuestas de los estudiantes que se agrupan en esta categoría contienen evidencias sobre el reconocimiento por parte de los estudiantes de relaciones numéricas y de diferencias entre diferentes expresiones decimales periódicas, de regularidades y de técnicas para operar con números decimales periódicos.

Esta categoría comprende subcategorías, clases y subclases, de las cuales queremos destacar las siguientes:

Subclase 1.2.1.1. Desarrollan el periodo y comparan números

En esta subclase se han agrupado todas aquellas respuestas en las que se manifiesta la atención del alumno en el número de la parte decimal como tal.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se recoge en la figura 1, donde un alumno de Máster manifiesta que obtiene la solución “comparando la misma cantidad de decimales”. Lo que hace es desarrollar el periodo del número decimal si es periódico o añadir ceros si es finito, hasta obtener el mismo número de cifras en ambas partes decimales, y luego compara los números obtenidos en la parte decimal.

TAREA 3: Redondea la respuesta correcta y justifica tu respuesta: *→ Comparando la misma cantidad de decimales.*

a) $8,13 < 8,\overline{13}$ $8,13 = 8,\overline{13}$ $8,13 > 8,\overline{13}$
porque $8'130000 < 8'13131\overline{3}$

b) $3,\overline{4} < 3,\overline{40}$ $3,\overline{4} = 3,\overline{40}$ $3,\overline{4} > 3,\overline{40}$
 $3'444\overline{4} > 3'404\overline{0}$

Figura 1.

Subclase 1.2.1.1. Desarrollan el periodo y comparan por órdenes de unidad

Esta subclase corresponde a las “respuestas esperadas”. Incluye todas aquellas repuestas en las que se aprecia un centramiento del alumno en parte de la información derivada de desarrollar la parte periodica. Es decir, desarrollan el periodo de varias expresiones decimales periódicas y comparan cifra a cifra, hasta encontrar en la n-ésima posición cifras diferentes.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se recoge en la figura 2, donde un alumno, en la tarea 1, desarrolla el periodo de cada expresión decimal y reconoce cuatro expresiones decimales equivalentes, así como también identifica la no equivalente señalando la cifra que marca la diferencia.

$5,00\overline{100}$ $5,00100\overline{01}$ $5,001000100$ $5,00101$ $5,00\overline{1000} = 5'00100$
 $5,001000100 =$ $5,001010101$
esta cifra es difrent

Figura 2.

Subclase 1.2.1.2. Desarrollan el periodo y operan

Se ubican en esta subclase las respuestas de los alumnos que ven los números decimales periódicos como cantidades. Por ello, para compararlos necesitan demostrar que uno es una cantidad mayor o menor que otro. También se ubican en esta clase todas las respuestas de los alumnos que en las tareas 4 y 5 desarrollan primero el periodo para luego operar.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se recoge en la figura 3.

a) $8,13 < 8,\overline{13}$ $8,13 = 8,\overline{13}$ $8,13 > 8,\overline{13}$
 $0 < 8,\overline{13} - 8,13 = 0,00\overline{13} \Rightarrow 8,13 < 8,\overline{13}$

b) $3,\overline{4} < 3,\overline{40}$ $3,\overline{4} = 3,\overline{40}$ $3,\overline{4} > 3,\overline{40}$
 $0 < 3,\overline{4} - 3,\overline{40} = 3'444\overline{4} - 3'4040\overline{40} = 0,040404 = 0,04\overline{0} \Rightarrow 3,\overline{40} < 3,\overline{4}$

Figura 3.

Subclase 1.2.2.1. Perciben la regularidad Total

En esta subclase se ubican las respuestas en las cuales los alumnos reconocen todas las expresiones decimales equivalentes, y/o la fracción equivalente en el caso de la tarea 2.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento se muestra en la figura 4, donde se recoge la respuesta de un alumno de Máster que justifica su elección diciendo: “porque es el único que entre los unos no hay tres ceros”.

$5,00\overline{100}$ $5,001\overline{0001}$ $5,001000\overline{100}$ $5,00\overline{101}$ $5,001\overline{000}$
 Porque es el único que entre los unos no hay 3 ceros.

Figura 4.

Clase 1.2.3. Conversión a fracción

Las respuestas consideradas en esta clase se caracterizan por la necesidad de los alumnos de pasar las expresiones decimales periódicas a fracciones, ya que utilizan el hecho que saben efectuar sumas y restas de dos racionales en el registro fraccionario o, en el caso de la tarea 3c), para efectuar demostraciones.

Un ejemplo de actuación ubicada es el que se observa en la figura 5.

e) $0,\overline{9} + 0,\overline{4} = \frac{9}{9} + \frac{4}{9} = \frac{13}{9} = 1 + \frac{4}{9} = 1,\overline{4}$
 f) $0,\overline{5} + 0,\overline{72} = \frac{5}{9} + \frac{72}{99} = \frac{55}{99} + \frac{72}{99} = \frac{127}{99} = 1 + \frac{28}{99} = 1,\overline{28}$

Figura 5.

Clase 1.3.2. Por aproximación/ Por el siguiente

Las respuestas de los alumnos en la tarea 3c), en las que aparecen justificaciones por aproximación o mencionando un siguiente, se agruparon en esta clase.

Un ejemplo que hace referencia a este tipo de comportamiento es el que se ilustra en la figura 6, donde se recoge la respuesta de un alumno de 2º de Bachillerato que justifica la igualdad “porque acaba en 9999 y su siguiente número es 1”.

c) $0,\overline{9} < 1$ $0,\overline{9} = 1$ $0,\overline{9} > 1$
 porque acaba en 9999 y su siguiente número es 1.

Figura 6.

Categoría 2. Respuesta incorrecta

Las respuestas que se agrupan en esta categoría contienen evidencias de la falta de percepción por parte de los estudiantes de regularidades y de técnicas para comparar y operar con números decimales periódicos.

De esta categoría destacamos las siguientes subcategorías, clases y subclases:

Clase 2.2.1. Comparan la parte periódica y se fijan en sus diferencias

Las respuestas de los alumnos que se ubican en esta clase, se caracterizan por identificar diferencias centradas en las cifras que abarca la raya del periodo.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento se muestra en la figura 7, donde se recoge la respuesta de un estudiante de 1º Bachillerato en la tarea 1, quien justifica su elección de la respuesta así: “porque el número 1 no lleva periodo”.

5,00100 5,0010001 5,001000100 5,00101 5,001000

porque el número 1 no lleva periodo.

Figura 7.

Clase 2.2.2. Perciben números decimales finitos

En esta clase se ubican las respuestas en las cuales se manifiestan dificultades por parte de los alumnos en el concepto de número decimal periódico y una tendencia a trabajar con los números decimales finitos.

Una actuación ubicada en esta clase se puede observar en la figura 8, donde se recoge la respuesta de un alumno de 1º Bachillerato a la tarea 5. Al parecer, interpreta las expresiones decimales periódicas como finitas, ya que opera como así fueran, sin preocuparse de desarrollar el periodo o de las variaciones que este pudiera comportar.

a) $2,1\bar{7} - 0,7 = 1,47$

b) $2 - 1,9 = 0,1$

c) $1,2\bar{8} - 0,7\bar{2} = 0,56$

$$\begin{array}{r} 2,1\bar{7} \\ - 0,7 \\ \hline 1,47 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ - 1,9 \\ \hline 0,1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,2\bar{8} \\ - 0,7\bar{2} \\ \hline 0,56 \end{array}$$

Figura 8.

Clase 2.2.3. Alargan el periodo

Las respuestas ubicadas en esta subcategoría evidencian que los alumnos toman el periodo de la expresión decimal del enunciado y lo reproducen.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se recoge en la figura 9.

$14, \overline{121121}$

$14, \overline{121121121}$

$14, \overline{121121121121}$

$14, \overline{121121121121121}$

Figura 9.

Subclase 2.2.7.2. Desarrollan el periodo y comparan por órdenes de unidad

Las respuestas de los alumnos que se ubican en esta clase se caracterizan por su centramiento en la parte entera del número decimal periódico.

Una actuación ubicada en esta clase se puede observar en la figura 10, donde se recoge la respuesta de un alumno de Máster a la tarea 3c).

Figura 10.

Subclase 2.2.7.3. Desarrollan el periodo de forma parcial

En las respuestas agrupadas en esta subclase se puede apreciar que los alumnos no desarrollan el periodo hasta tener la misma cantidad de cifras decimales en ambos números.

En la figura 5.11 se ilustra un ejemplo de este tipo de comportamiento. En ella se recoge la actuación de un alumno de 1º Bachillerato en la tarea 4d) y se observa que no hay pruebas de que consideren necesario que haya la misma cantidad de decimales en ambos números.

Figura 11.

Clase 2.2.8. Diferencian la parte entera de la parte decimal y operan por separado

En esta clase se ubican las respuestas en las cuales se manifiestan dificultades con el concepto de la coma decimal y una tendencia a trabajar por separado la parte entera y la parte decimal. Estos estudiantes tienen una concepción de número decimal como dos números enteros separados por el punto decimal

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se recoge en la figura 12, donde un alumno de 2º Bachillerato, en la tarea 4.

Figura 12.

Categoría 3. En blanco o no identificada

En ella ubicamos las actuaciones de los alumnos en las que se considera que el alumno no contesta a la tarea o no ha sido posible identificar las interpretaciones utilizadas por los estudiantes.

RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DEL CUESTIONARIO

Hemos organizado los resultados obtenidos según el esquema descrito en el apartado anterior, atendiendo a los niveles de éxito y los comportamientos predominantes.

Tarea 1. Codificación

Alrededor de la mitad de los estudiantes de 1º de Bachillerato y de Máster siguen el procedimiento de resolución esperado: desarrollan el periodo del número dado y comparan cifra a cifra. Podemos observar que no hay variaciones significativas en estos grupos en cuanto a la estrategia de resolución y al total de respuestas correctas.

La diferencia más significativa está en los alumnos de la ESO, y es que no justifican las respuestas. También hay un número significativo de estudiantes que perciben la regularidad.

Por tanto, se puede decir que los estudiantes resuelven acertadamente la tarea, ya que sólo hay 8 respuestas incorrectas.

Tarea 2. Codificación

El bajo nivel de éxito indica que los estudiantes tienen dificultades para interpretar adecuadamente la tarea. A pesar de que es el recíproco de la tarea 1, en esta tarea el total de respuestas incorrectas es 70. No han entendido bien que se espera que den como respuestas diferentes expresiones decimales periódicas y/o la fracción equivalente, y no lo que hace la mayoría, que es alargar el periodo dado en la tarea y hacer diferentes combinaciones.

En la ESO y 1º Bachillerato es significativa la falta de respuestas correctas. En el máster, en cambio, es alto el número de respuestas correctas, pero en menor medida que la tarea anterior. También es significativo el número de alumnos del Máster 13/14 que dan una respuesta en forma de fracción. Lo hacen 11 de ellos, una tercera parte del total.

Tarea 3. Comparación

Observamos en los alumnos dos tendencias en relación a la comparación de números decimales periódicos: la primera, se caracteriza por desarrollar el periodo y comparar el número natural que resulta de este desarrollo en la parte decimal. La segunda, minoritaria en los alumnos de la ESO y 2º Bachillerato, y significativa en los grupos de 1º Bachillerato y Máster, se caracteriza por desarrollar el periodo, pero esta vez la comparación es cifra a cifra.

Debemos destacar otras dos tendencia significativa en los alumnos del Máster 13/14, que son la búsqueda de diferencias entre cantidades y la percepción de regularidades.

En términos totales, el nivel de éxito es alto, con una evolución natural al pasar de ciclo.

Como cabía esperar, es significativa la cifra de estudiantes que justifican el ítem c) de la misma manera que los anteriores, comparando las cifras, en este caso las unidades. La mayoría de los estudiantes no están de acuerdo con la igualdad $0.\overline{9} = 1$ y más de la mitad de ellos justifican la desigualdad $0.\overline{9} < 1$ con repuestas infinitesimales.

Para la resolución de esta pregunta se necesitan conocimientos superiores, como ya habíamos dicho. Esto se refleja en los resultados, ya que la justificación mediante el uso de demostraciones no ha sido observado entre los alumnos de secundaria y bachillerato. En cambio, aparece a menudo con los estudiantes de Máster.

Tarea 4. Suma

En esta tarea se percibe que el nivel de éxito aumenta de modo natural al avanzar de nivel. La tendencia de conversión al registro fraccionario no se ha observado entre los alumnos de ESO y Bachillerato. En cambio, es una técnica que utilizan a menudo los estudiantes de Máster.

En las respuestas no acertadas predomina un comportamiento, el de tratar los decimales periódicos como decimales finitos. Se observa que la mitad de los alumnos de 4º curso realizan las operaciones como si se tratara de números decimales finitos. La otra mitad, igual que la mayoría de los estudiantes de bachillerato y de máster, tienden a desarrollar primero el periodo, luego operar como si se tratara de números decimales finitos y, finalmente, vuelven a escribir el resultado en forma de expresión decimal periódica.

Además, es significativo el número de alumnos que dan un resultado correcto a los dos primeros ítems y, en cambio, son incorrectos los de los demás ítems. Esto es debido a las características de las expresiones decimales periódicas, que aunque los alumnos las vean como expresiones decimales finitos u operen por separado la parte entera y la parte decimal, hace que den un resultado correcto. Al intuir esto, estas respuestas están clasificadas como las de los demás ítems.

Finalmente, también podemos observar que los alumnos que tienden a realizar las operaciones desarrollando el periodo, el ítem 2 lo calculan de cabeza por su simplicidad. En cambio, hay un número significativo de alumnos con tendencia a operar de cabeza y eso les lleva a muchos errores.

Tarea 5. Sustracción

En términos totales, el nivel de éxito sufre una evolución natural de la ESO al Máster.

A la vista de los datos se puede decir que otra vez aparece una tendencia parecida en los alumnos de 1º de Bachillerato y los de Máster a desarrollar el periodo para luego operar. Además, se observa en estos últimos otra tendencia, la de conversión al registro fraccionario, la cual no se ha observado entre los alumnos de ESO y Bachillerato.

Los comportamientos predominantes asociados a las respuestas incorrectas son los asociados a operar como si se tratara de números decimales finitos, el cual sólo se observa en los alumnos de ESO y Bachillerato, y el de no desarrollar hasta tener la misma cantidad de cifras decimales en ambas expresiones. Además, hay un número significativo de alumnos del Máster 13/14 que dan respuestas, tanto correctas como incorrectas, sin justificación.

SÍNTESIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Como síntesis de lo observado, tras haber concluido la parte experimental y el análisis de los resultados hemos obtenido una serie de conclusiones.

- En nuestro estudio, la tarea 1, que Rittaud y Vivier llaman de codificación, tuvo éxito, ya que sólo 8 alumnos del total no fueron capaces de identificar la expresión decimal diferente. En cambio, en la tarea 2, a pesar de ser recíproca a la tarea 1, los estudiantes tuvieron dificultades para abordarla y, o bien daban respuestas incorrectas, o bien completaban las correctas con incorrectas. Por tanto, no tuvo éxito.
- La comparación de los ítems a, b y d de la tarea 3 fue un éxito. Además de la tendencia a desarrollar el periodo y comparar cifra a cifra, hemos observamos otra actuación predominante: desarrollan el periodo y comparan el número natural que resulta de este desarrollo.
- En la comparación del caso $0,\overline{9}$ y 1, se ha obtenido un mayor número de errores. Para la resolución de esta pregunta se necesitan conocimientos superiores, como los que deberían haber alcanzado los estudiantes de Máster. Sin embargo, vemos que actúan de forma similar a los estudiantes de Bachillerato y eso significa que siguen ligados a los primeros conocimientos sobre los números decimales periódicos y no han avanzado.
- Por último, en las sumas y diferencias se observa una tendencia a trabajar con los números decimales periódicos como si se tratara de números decimales finitos, además de la conversión a fracción y la utilización de la igualdad $0,\overline{9} = 1$.

Para finalizar, vamos a destacar algunos de los efectos de la enseñanza. Uno es que hace pensar que si las expresiones del período son diferentes, los números que expresan son diferentes, lo cual es falso. Podemos asumir que la dificultad para caracterizar a los números decimales periódicos independientemente de las expresiones decimales periódicas, persiste en los alumnos de niveles superiores, y que se originaría en una primera aproximación a las características de estos números, la cual aparece ligada a su representación “con coma”, en oposición a los números naturales “sin coma”, sin que esto sea cuestionado en estudios posteriores de los alumnos. No parece tener cabida en la enseñanza la reflexión y profundización progresiva de este conocimiento, lo cual produce una falta de percepción y lleva a arrastrar los procedimientos aprendidos los primeros años de la enseñanza.

Castro (2001) confirma que los números naturales pueden ser un obstáculo para el aprendizaje de los decimales, ya que los estudiantes suelen extender su conocimiento de los naturales y aplicarlo de manera equivocada a los decimales, predominando el conocimiento ya consolidado del número natural sobre el conocimiento en construcción de los decimales.

Referencias

- Castro, E. (2001). Números decimales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 315-345). Madrid, España: Síntesis.
- Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid, España: Síntesis.
- Colera, J., Gaztelu, I. y Oliveira, M^a. J. (2010a). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid, España: Anaya.
- Colera, J., Gaztelu, I. y Oliveira, M^a. J. (2010b). *Matemáticas 4º ESO*. Madrid, España: Anaya.
- DOCV (2007). Decreto 112/2007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana.[2007/9717]. *Diari Oficial de la Comunitat Valenciana*, 5562, 30402- 30587.
- DOCV (2008). Decreto 102/2008, de 11 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo del bachillerato en la Comunitat Valenciana. [2008/8761]. *Diari Oficial de la Comunitat Valenciana*, 5806, 71303- 71547.
- Gómez, B. (2013). *Apuntes de clase en el Máster de Profesor/a en Educación Secundaria de la Universidad de Valencia*. Documento no publicado, Universidad de Valencia, España.
- IES Sorolla (2013). *Programación del Departamento de Matemáticas* [Documento interno]. Valencia, España.
- Rittaud, B., & Vivier, L. (2013). Different Praxeologies for rational numbers in decimal system - the $0.\overline{9}$ case. Documento presentado en el *CERME 8 - Congress of The European Society for Research in Mathematics Education*. Working Group 2 Arithmetic and number systems. Ankara, Turquía.
- Socas, M. (2001). Problemas didácticos entre el objeto matemático y su representación semiótica. Estudio con números decimales. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III* (pp. 297-318). La Laguna, España: Universidad de la Laguna.
- Vivier, L. (2011). El registro semiótico de los Desarrollos Decimales Ilimitados. Recuperado el 28 de septiembre de 2013, de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/VIVIER_4oCalculo_Puebla2010.pdf