View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Funes

ECUACIÓN DE LA RECTA: UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA SU ENSEÑANZA

Rey Genicio, María; Forcinito, Silvia; Lazarte, Graciela; Hernández, Clarisa.
Facultad de Ingeniería- Universidad Nacional de Jujuy- Argentina
tresm@imagine.com.ar

Campo de investigación: Gráficas y funciones-Resolución de problemas; Nivel Educativo: Medio

Resumen

Esta propuesta surge de un Proyecto de Investigación que se apoya en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo, que adopta como metodología para la investigación la «Ingeniería Didáctica» y que busca el desarrollo de estrategias innovadoras en la enseñanza de la matemática. En este marco, se elaboró una secuencia didáctica que comienza con la obtención de la ecuación que define a una función de proporcionalidad directa, para luego abordar las ecuaciones de rectas paralelas, perpendiculares, horizontales y verticales. Se pretende por último, que el alumno sea capaz de determinar las distintas formas que adopta la ecuación de una recta, dependiendo de los datos que se conocen sobre ella. A lo largo de la propuesta, se presente una variada ejercitación, trabajando tanto en el marco numérico como en el algebraico y el geométrico

Consideraciones sobre la propuesta

En el marco del Proyecto de Investigación " Innovaciones Didácticas en la Enseñanza de la Matemática" se ha desarrollado una propuesta didáctica para abordar el tema**:** Ecuación de la recta. Esta investigación se nutre teóricamente de los aportes de la psicología del aprendizaje y de la didáctica de la matemática. Sintetizamos a continuación los aportes más relevantes de cada una.
De la fuente psicológica se toma las teorías cognitivas que entienden que el aprendizaje efectivo requiere participación activa del estudiante en la construcción del conocimiento, ya que este proceso está mediado por procesos de pensamiento, de comprensión y de dotación de significado. Entonces la actividad de los alumnos es base fundamental para el aprendizaje mientras que la acción del docente es aportar las ayudas necesarias, estableciendo esquemas básicos sobre los cuales explorar, observar, y reconstruir conocimientos. En esos esquemas se articulan la información (aportada por el docente, los textos, los materiales y los alumnos) con las acciones cognitivas de los sujetos.
Se toma también el concepto de Interacción Socio–Cognitiva: la cognición humana óptima se lleva a cabo con la colaboración de otras personas y de objetos físicos y simbólicos que potencian las capacidades individuales. Así los procesos grupales de construcción de conocimientos se constituyen en medios altamente eficaces para el logro de un aprendizaje significativo, aunque en ellos se hace necesaria una intervención del docente muy cuidadosa, optimizando las actividades, facilitando los intercambios cognitivos, supervisando, recuperando oportunamente lo producido en cada grupo, y logrando la reorganización final de los conocimientos.
Por otra parte, de la fuente didáctica general se toma el concepto de estrategia didáctica de Bixio: conjunto de las acciones que realiza el docente con clara y conciente intencionalidad pedagógica, o sea, de lograr un aprendizaje en el alumno. Algunos de sus componentes son el estilo de enseñanza, la estructura comunicativa de la clase, el modo de presentar los contenidos, las consignas, los objetivos y su intencionalidad, la relación entre materiales y actividades, los criterios de evaluación, etc. Las estrategias deben

apoyarse en los conocimientos previos de los alumnos (significatividad), orientar la construcción de conocimientos a partir de materiales adecuados y ser factibles de desarrollarse en el tiempo planificado, con la cantidad de alumnos con que se cuenta y con la carga horaria destinada.
En el campo de la Didáctica de la Matemática, la propuesta se apoya en la «ingeniería didáctica» (Douady – 1996): elaboración de un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo para efectuar un proyecto de aprendizaje. En los análisis preliminares se tuvieron en cuenta las dificultades y los errores más frecuentes de estos aprendizajes, las prácticas habituales para el tratamiento de este tema y los diferentes enfoques que presentan los libros de texto sobre el mismo.
La concepción y el diseño de las actividades se encuadran dentro de «la teoría de las situaciones didácticas» de Guy Brousseau: proponer situaciones «adidácticas» en las que el docente no debe mostrar su intencionalidad ni intervenir indicando al alumno qué hacer; sino provocar que el alumno acepte la responsabilidad de la situación de aprendizaje. Así, la llamada «Situación fundamental», dada por las situaciones adidácticas, enfrenta a los alumnos a un conjunto de problemas que evolucionan de manera tal que el conocimiento que se quiere que aprendan es el único medio eficaz para resolverlos. Intervienen las «variables didácticas» para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad, y las «recontextualizaciones» de los conceptos tratados en los marcos geométrico y algebraico le otorgan significatividad a la propuesta.
En la resolución de los problemas, se espera que aparezcan distintas estrategias. También se sugieren puestas en común en las que se validen los resultados, se detecten los errores, se analicen las distintas propuestas y representaciones que se hayan utilizado, se elijan las más eficaces, se debatan las argumentaciones, se identifiquen los conocimientos puestos en juego, etc. a fin de que esos conocimientos evolucionen en la totalidad del grupo de clase y converjan hacia el que se quiere construir.
Los problemas diseñados responden a las «condiciones del buen problema» enunciadas por Douady; ya que: los enunciados tienen sentido en relación con los conocimientos previos; todos los alumnos están en condiciones de dar alguna respuesta, al menos para el problema inicial; admiten distintas estrategias de resolución y se pueden formular en distintos marcos (geométrico y algebraico). Y, principalmente, el conocimiento buscado es un conocimiento adaptativo en tanto es el medio científico de responder eficazmente a los problemas. Además se propone que en la puesta en marcha se cumplan las fases enunciadas por Douady en las que, dado el problema inicial: 1º– Se movilizan los objetos matemáticos conocidos para resolver el problema (Fase: Antigua). 2º– Se ponen en marcha instrumentos nuevos. Aparece el "nuevo implícito" (Fase: Búsqueda). 3º– Se hacen explícitos los conocimientos construidos en la fase anterior (Fase: Explicitación). 4º– El docente descontextualiza el conocimiento dándole la categoría de «objeto matemático» (Fase: Institucionalización). 5º– Se da a los alumnos diversos problemas destinados a provocar el funcionamiento como instrumentos explícitos de lo que ha sido institucionalizado (Fase: Familiarización – reinversión). 6º– El nuevo objeto es susceptible de convertirse en antiguo para un nuevo ciclo de la dialéctica instrumento-objeto (Fase: Complejidad de la tarea o nuevo problema).

Propuesta didáctica
La secuencia se inicia a partir del conocimiento previo del alumno sobre la expresión algebraica y la representación gráfica de la función de proporcionalidad directa. Continúa con la siguiente actividad, que tiene por objetivo que el alumno construya la fórmula de una función de proporcionalidad directa

Actividad 1

1.– Siendo P = (2 ; 3) un punto de la gráfica de una función de proporcionalidad directa, creciente, con dominio en los Reales y denominando O al origen del sistema de coordenadas cartesianas**:**

a) Escribe las coordenadas de otro punto A perteneciente a la gráfica de la función tal que la distancia (O; A) sea mayor que la distancia (O; P) ¿Cuántas soluciones hay para A?.Hallar la distancia (O; A) y la distancia (O, P)

b) Escribe las coordenadas de otro punto B perteneciente a la gráfica de la función tal que la distancia (O; B) sea menor que la distancia (O; P) ¿Cuántas soluciones hay para B?. Hallar la distancia (O, B)

c) Escribe las coordenadas de otro punto C $\neq$ P que pertenezca a la gráfica de la función y tal que la distancia (O; C) sea igual a la distancia (O; P) ¿Cuántas soluciones hay para C?. Hallar la distancia (O, C)

d) Encuentra las ordenadas de otros puntos pertenecientes a la gráfica cuando la abscisa toma los valores**:** 20 ; –200 ; 105 ; 2/3 y 5/7 ?.

e) Escribe la fórmula que define a esta función. Usa la fórmula para verificar las respuestas obtenidas en el inciso anterior.

f) i) ¿Cuál es la amplitud del ángulo formado por el gráfico de la función dada y el semieje positivo de las abscisas? ii) ¿Qué conocimiento usaste para encontrarlo?. iii)¿Obtendrías la misma amplitud del ángulo si utilizas otro punto de la recta dada?. Justifica tus respuestas

2.– Si conoces un punto P (x_0 , y_0) que pertenece a la gráfica de una función de proporcionalidad directa, cómo harías para calcular el ángulo que forma la gráfica con el eje x positivo.

3.– Determina el ángulo que forma la recta de ecuación y =5x / 8 con el semieje x positivo.

4.– Encuentra en cada caso la ecuación de la recta que pasa por el origen del sistema y el punto**:**

a) A (–5 ; 3) b) B(−1/2; −5) c) C(3/2; −12/5) d) P(x_0 , y_0)

5.– Grafica en coordenadas cartesianas (usa la misma escala en ambos ejes) y encuentra en cada caso la ecuación la ecuación de la recta que pasa por el origen del sistema y forma el ángulo α con el semieje positivo de las abscisas. Luego determina similitudes y diferencias entre las dos gráficas. a) α = 45 º b) α = 135º

6.– Una recta, que pertenece al I y III cuadrante, pasa por el origen del sistema de coordenadas y tiene una inclinación más pronunciada que la de la recta definida por la función identidad.

a) Propone la ecuación de dicha recta. b) ¿Cuántas soluciones se pueden obtener?

c) ¿Qué condición debe cumplir la pendiente para que satisfaga la condición dada?

d) ¿Entre qué valores se encuentra la amplitud del ángulo que forma con el semieje positivo X ?

7.– Una recta, que pertenece al I y III cuadrante, pasa por el origen del sistema de coordenadas y tiene una inclinación menos pronunciada que la recta definida por la función identidad.

a) Propone la ecuación de dicha recta. b) ¿Cuántas soluciones se pueden obtener?

c) ¿Qué condición debe cumplir la pendiente para que satisfaga la condición dada?

d) ¿Entre qué valores se encuentra la amplitud del ángulo que forma con el semieje positivo de las x ?

8.– Realiza un análisis análogo a los dos anteriores para la recta y = – x

9.– Sea α el ángulo que forma cada una de las rectas, cuyas ecuaciones se indican, con el semieje positivo de las abscisas, completa el cuadro con V (Verdadero) cuando corresponda

Ecuación de r	$0º \leq \alpha < 45º$	$45º \leq \alpha < 90º$	$90º \leq \alpha < 135º$	$135º \leq \alpha < 180º$
$y = -5x/7$				
$y = 1{,}3\ x$				
$y = -9x/5$				
$y = -0{,}05\ x$				
$y = 12x/13$				
$y = -\sqrt{5}\ x$				

La mayoría de los ejercicios de esta primera actividad, se pueden resolver utilizando distintos conocimientos previos. Algunos alumnos utilizarán la regla de tres simple, otros la semejanza de triángulos, otros la constante de proporcionalidad y otros conceptos de trigonometría. La situación planteada en los primeros ítem es propicia para que el alumno calcule la distancia de un punto al origen

La secuencia continúa con la obtención de la condición para que dos rectas sean paralelas entre sí y luego perpendiculares entre sí. Al mismo tiempo se determina la fórmula de la ecuación de una recta conociendo, ya sea la pendiente y un punto o bien dos puntos de la misma.

Actividad 2

1.– Dadas dos rectas en un sistema de coordenadas cartesianas, una que pasa por el origen y otra paralela a ésta ¿Cómo son entre si los ángulos que forman cada una de ellas con el eje de las abscisas? Justificar.

2.– Dada la ecuación de la recta $y = 2x/5$

a) Propone la ecuación de otras rectas r_1, r_2, r_3, r_4 y r_5 paralelas a la dada que corten al eje de las ordenadas en: 3 ; -1 ; $\sqrt{2}$; -150 y $5/8$ respectivamente.

b) Enuncia la condición que deben cumplir las pendientes de dos rectas para que éstas sean paralelas.

c) Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

i) $Q(\sqrt{2}, 7\sqrt{2}/5 \in r_3$ ii) $R(-5/8, 7/8) \in r_5$ iii) $P(5; -148) \notin r_4$

3.– Dada una recta de ecuación: $y = 2x + b$, encuentra el valor de la ordenada al origen, b, sabiendo que el punto P pertenece a ella. Escribe en cada caso la ecuación de la recta. a) $P(0, 5)$ b) $P(1/2, 4)$ c) $P(x_0, y_0)$

4.– Escribe la ecuación de la recta de pendiente " a " y que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$

5.– Sabiendo que los puntos $A(3, 5)$ y $B(6, 7)$ pertenecen a la recta r

a) Encuentra ecuación de la recta que pase por el origen y sea paralela a la recta r.

b) Determina la pendiente de r c) Escribe la ecuación de r d) Encuentra la distancia entre A y B

6.– Ídem al ejercicio anterior si $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$, siendo $x_0 \neq x_1$

7.– Encuentra en cada caso la ecuación de la recta que pasa por los puntos indicados

a) $A(10, 7)$ y $B(-5, 1)$ b) $A(-1/2, 0)$ y $B(-3/2, -5/4)$

8.– Dados los puntos $A(-3/2, 5)$ y $B(4, 5)$

a) Halla la ecuación de la recta "r" que pasa por los puntos indicados. b) Representa gráficamente r.

c) ¿Qué característica tiene la dirección de esta recta?. ¿Cómo se posiciona respecto al eje de las abscisas? ¿Y respecto al eje de las ordenadas? ¿ Qué característica tiene la ecuación de r?

9.– Propone en cada caso la ecuación de una recta, r, paralela al eje de las abscisas, sabiendo que**:**

a) Corta al eje de las ordenadas en 4 b) P (−2; 7) pertenece a ella c) $(-3/2, b) \in r$

10.– Traza una recta perpendicular al eje "x" y que pase por el punto P (3, 0).

a) Escribe las coordenadas de 4 puntos que pertenezcan a dicha recta. ¿ Qué característica tiene la abscisa de dichos puntos?. b) Propone una ecuación para dicha recta.

11.– Escribe la ecuación de una recta vertical que pase por el punto P (b, 2)

12.– En un sistema de ejes coordenados cartesianos ubicar el punto P (3, 5)

a) Halla la ecuación de la recta r que pasa por el punto P y por el origen. Represéntala gráficamente.

b) Efectúa a P una rotación, con centro en el origen, de 90º en sentido antihorario, llama P_1 al punto así obtenido. Escribe las coordenadas de P_1.

c) Halla la ecuación de la recta r_1 que pasa por el punto P_1 y por el origen. Represéntala gráficamente.

d) i) ¿Cómo son entre sí las rectas r y r_1 ? .

ii) Encuentra una relación entre las pendientes de r y de r_1. ¿Se puede generalizar la relación encontrada entre las pendientes, a dos rectas cualesquiera perpendiculares entre sí y que no sean verticales?.

13.– Si la recta r tiene por ecuación $y = x/2 + 3$

a) Escribe la ecuación de otra recta cualquiera, que sea perpendicular a r ¿ Cuántas puedes escribir?

b) Escribe la ecuación de otra recta que sea perpendicular a r y que tenga ordenada al origen −7/5

c) Escribe la ecuación de otra recta que sea perpendicular a r y que pase por el punto P (− 3 , 16)

d) Escribe la ecuación de otra recta que sea perpendicular a r y que corte al eje de abscisas en x = 8

14.– Dada la recta r de pendiente "a", escribe la ecuación de la recta r_1 que sea perpendicular a r y que pase por el punto $P(x_0, y_0)$

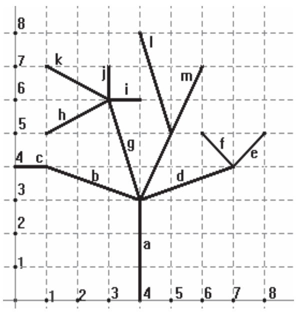
Para terminar la secuencia didáctica se plantea una actividad cuyo objetivo general es que el alumno reinvierta los distintos conceptos vistos en las actividades anteriores. Finalmente se incluyen una serie de juegos, cuya finalidad es practicar y afianzar los conceptos vistos. De la variedad de juegos propuestos solo incluiremos los siguientes.

El árbol Lineal

Las ramas del árbol son segmentos de recta.

1.– Escribe la ecuación de la recta a la que pertenece cada rama.

2.– De las ecuaciones halladas, indica las que corresponden a rectas paralelas y a rectas perpendiculares.



Ecuaciones e identidad

El número del documento de identidad de Susana consta de 8 cifras. Averígualo a partir de las siguientes consignas**:**

***Consignas*:**
Las cifras están tomadas de izquierda a derecha
1ª cifra: Ordenada al origen de una recta de pendiente 4 y que pasa por el punto P(1,7).
2ª cifra: Abscisa donde la recta de ecuación $3y + 12 = 6x$ corta al eje x.
3ª cifra: Ordenada del punto de intersección de las rectas de ecuaciones $y = x / 2 + 6$ e $y = 5x - 3$.
4ª cifra: Pendiente de la recta que pasa por los puntos P_1 (1/2, 3) y P_2 (− 1/2, −2).
5ª cifra: Pendiente de una recta que es perpendicular a la recta de ecuación $y = -x/4 + 3$
6ª cifra: Ordenada al origen de la recta que pasa por el punto P (−1,1) y es paralela a la recta de ecuación $y = 5x - 8$.
7ª cifra: Abscisa al origen de la recta que pasa por los puntos P_1 (2, −7) y P_2 (2, $\sqrt{3}$).
8ª cifra: Ordenada al origen de la recta que forma un ángulo de 30º con el eje x positivo y que pasa por el punto P ($\sqrt{3}$, 9).

Conclusión

Las actividades diseñadas responden a las "condiciones del buen problema" ya que, los enunciados tienen sentido en relación con los conocimientos previos, todos los alumnos están en condiciones de dar alguna respuesta (al menos para el problema inicial), admiten distintas estrategias de resolución y se pueden formular en distintos marcos (geométrico, numérico, algebraico y gráfico).
En toda la secuencia se enfrenta a los alumnos a un conjunto de problemas que evolucionan de manera tal que el conocimiento que se quiere que aprendan sea el único medio eficaz para resolverlos, al mismo tiempo las variables didácticas se hacen variar para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad

Bibliografía

Altman, S.; Comparatore, C. y Kurzrok, L.; (2002). *Matemática/Polimodal – Funciones 2*. Bs. As. Longseller.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México. G.E.I.

Bixio, C. (1998). *Enseñar y aprender*. Bs. As. Argentina. Homo Sapiens.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Córdoba. FAMAF.

Brousseau, G. (1994). *Los roles del maestro en Didáctica de la Matemática* de Parra, C, Saiz, I, otros. Compilación. Paidos . Bs. As..

Buschiazzo, N., Fongi, E. *et al* (2000). *Matemática II*. Buenos Aires. Argentina: Santillana.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J.; (1998). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. España.: Horsori.

Davini, M. (1997). *La formación docente en cuestión*: *política y pedagogía*. Buenos Aires. Argentina: Piados.

Etchegoyen, S.; Fagale, E.; Rodríguez, S.; Ávila, M. y Alonso, M.; (1999). *Matemática 1 – Polimodal*. Bs. As. Kapelusz

Kaczor, P.; Schaposchnik, R.; Franco, E.; Cicala, R. y Díaz, B.; (1999). *Matemática I– Polimodal* . Buenos Aires. Argentina: Santillana.

Latorre, M., Spivak, L. *et al* (1998). *Matemática 9*. Buenos Aires. Argentina: Santillana.

Macnab, D. y Cummine, J. (1992). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16*. Madrid. Visor.

Semino, S., Englebert, S. y Pedemonti, S. (1999). *Matemática 9*. Buenos Aires. Argentina: A-Z Editora.

Socas, M.; Camacho, M.; Palarea, M. y Hernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra*. Madrid. Síntesis.