¿PUEDEN LOS ESTUDIANTES USAR LA FUNCIÓN COMO MEDIO DE EXPRESIÓN EN EL LENGUAJE MATEMÁTICO?

Ramón Blanco Sánchez, Alexia Nardín Anarela, Yosbel Morales Olivera
Universidad de Camagüey. (Cuba)
ramon.blanco@reduc.edu.cu

Campo de investigación: gráfica y funciones. Nivel educativo: superior
Palabras clave: función, generalización, lenguaje matemático

Resumen
Un elemento esencial del lenguaje matemático es la función, la cual se requiere para expresar una variedad considerable de diferentes relaciones, pero en el presente trabajo se ha podido comprobar el pobre dominio, que de este concepto, poseen los estudiantes, no ya en lo que respecta a aplicaciones, sino en la simple evaluación de una función.
En el presente trabajo se vincula la dificultad planteada, con un pobre desarrollo del proceso de generalización teórica que poseen los estudiantes y se propone actuar sobre este problema teniendo en cuenta en la actividad docente, los niveles en los que se manifiesta dicha generalización.

Desarrollo

La generalización teórica posibilita generalizar sobre los elementos esenciales del fenómeno que se analiza, y no sobre los rasgos comunes y aparentes de los fenómenos, por lo tanto, cuando el estudiante ha desarrollado correctamente el proceso de generalización teórica, puede evaluar funciones sin presentar dudas en la realización de esta acción, ya que esta acción no presenta diferencias esenciales de una función a otra.
No obstante el estudio realizado muestra lo contrario, pues se pudo apreciar que en estudiantes universitarios, se mantienen las dificultades en la evaluación de funciones.

Para fundamentar los planteamientos del presente trabajo se hizo un estudio de un total de 40 estudiantes universitarios, 21 correspondientes al primer año de la carrera de Bibliotecología y 19 al segundo año de la carrera de Ingeniería en Informática, a los que se les pidió evaluar las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \ldots si \ldots x<4 \\ 2x \ldots si \ldots x>6 \end{cases} \qquad \text{en} \quad x=1, \text{ y en } \quad x=8$$

$$g(x) = 2x^2 + 4 \qquad \text{en} \qquad x = a - 1$$

Obteniéndose los resultados que se muestran a continuación:
Antes de analizar la tabla es preciso aclarar que no hubo ningún caso de un estudiante que evaluara bien f(x) y mal la función g(x).

Como se puede apreciar de los datos que se muestran en la tabla anterior, el 57.5 % de los estudiantes evaluados, no fueron capaces de evaluar correctamente la función f(x), e incluso

Función	Evaluaron bien		Evaluaron mal		Total de estudiantes
	f(x)	g(x)	f(x)	g(x)	
Est. De Informática	9	9	9	1	19
Est. De Bibliotecología	6	5	15	10	21
Total de estudiantes	15	14	23	11	40

la función g(x) fue evaluada incorrectamente por el 27.5 % del total de estudiantes, los que incurrieron en este error fueron prácticamente los estudiantes de bibliotecología, aunque para estudiantes de informática un 47.37 % de respuestas incorrectas en la primera función, es un resultado que está lejos de lo que debe ser para este tipo de alumno.

De primera intención es natural asumir que no existe razón para que un estudiante de nivel superior no sea capaz de evaluar funciones como las presentadas en el experimento descrito, ya que el procedimiento de evaluación de una función tiene un carácter general y su explicación se puede hacer breve y clara, de donde se deriva una pregunta. ¿Por qué entonces se presentaron tantos errores en el experimento realizado?

De acuerdo a los estudios desarrollados por los autores, esto se debe a que la generalización teórica, aquella que se realiza sobre los elementos esenciales de los objetos y fenómenos que se estudian, no se desarrolla en los estudiantes, sino que estos se mantienen haciendo generalizaciones empíricas, las que se realizan sobre los aspectos comunes y aparentes de los fenómenos estudiados, la generalización empírica la persona la va desarrollando con el lenguaje, por lo que cambiar la forma de generalizar desde los elementos comunes y aparentes a los esenciales es algo que requiere mas entrenamiento de lo que usualmente se supone; donde la primera dificultad que se enfrenta es lograr que el sujeto se habitúe a orientarse a lo esencial del contenido, pues la propia adquisición del lenguaje crea un obstáculo epistemológico al respecto, ya que gran parte de la formación del lenguaje se realiza sobre elementos comunes y aparentes que no siempre coinciden con los esenciales.

La teoría en que se basa el presente trabajo considera elementos esenciales de un objeto o fenómeno, aquellos que lo caracterizan, el elemento que no puede faltar para ubicar dicho objeto o fenómeno en una clase determinada, son los elementos que están presentes en el concepto científico que lo identifica. Pero a pesar de la evidencia que se manifiesta en la determinación de los rasgos esenciales, no es una tarea pedagógica fácil, poner en la mente del estudiante la necesidad de identificar dichos rasgos esenciales, existe una tendencia facilista de juzgar el fenómeno por sus rasgos comunes y aparentes y cuando estos no coinciden o sólo coinciden parcialmente con los esenciales el juicio realizado es completamente incorrecto o presenta errores considerables.

Lo anterior quiere decir que en muchos casos, los estudiantes incorporan en la evaluación de la función las características particulares de la función que evalúan, esto es la fórmula particular que la define, por lo que el estudiante no aprende a evaluar funciones sino a evaluar casos particulares de funciones, con lo cual transforman un problema específico en una variedad de problemas, que según su modo de ver cada uno de ellos tiene sus particularidades que se deben tener en cuenta para poder resolverlos, lo cual hace que quede desconcertado o al menos trabaje incorrectamente cuando se le pide evaluar una función con la que no acostumbra a trabajar.

La solución de la dificultad didáctica descrita sólo se puede lograr, si se contribuye a desarrollar la generalización teórica de los estudiantes, y siendo la generalización teórica un proceso del pensamiento lógico, no se logra desarrollar con un pequeño entrenamiento, se requiere un trabajo didáctico perseverante, que debe comenzar por lograr que el estudiante ejecute las orientaciones y tareas asignadas. Resultados de este tipo solo se pueden apreciar a lo largo de un semestre en algunos casos, pero más usualmente a lo largo de un curso escolar y los resultados son más seguros si en otras asignaturas, como por ejemplo Física, se trabaja en la misma dirección.

Para entrenar a los estudiantes en la generalización teórica es necesario tener en cuenta los diferentes niveles en que se manifiesta este tipo de generalización, según la clasificación de Blanco R.(1998), estos son:

- La representación singular de lo general.
- La generalización producto de una deducción.
- La generalización por ampliación de un concepto.
- La generalización mediante un cambio del problema.
- La generalización con desarrollo de un nuevo modelo.

El primero de estos niveles o etapas de la generalización identificado como: "La representación singular de lo general" se refiere a la representación de los componentes de un conjunto de muchos o infinitos elementos mediante una determinada semiótica, por ejemplo, cuando al hablar de los números pares, se dice que un número par es un número de la forma 2n, o cuando se representa una sucesión por su n-simo término, o cuando al hablar de una cantidad finita pero no determinada de elementos o sucesos, estos se representan como los hechos a_i con $i = 1 .. n$, etc. Esta forma de generalización tan cotidiana para el matemático y tan imprescindible para la Matemática en sí misma, (aunque debemos destacar que no es privativa de la Matemática, pues con el desarrollo científico técnico cosas así aparecen hasta en las ciencias sociales), no es tan inmediata para el alumno, requiere cierto desarrollo de sus capacidades cognoscitivas para interiorizarlo, y no simplemente repetirlo mecánicamente cuando se le requiera. Se puede asegurar que el estudiante ha alcanzado este nivel de generalización cuando él es capaz de usarla por su propia iniciativa, para expresar sus ideas, cuando lo usa como componente de su propio lenguaje.

El segundo nivel considerado, la generalización producto de una deducción (propia de las ciencias deductivas), se manifiesta por ejemplo, cuando se prueba que todo número tal que la suma de sus dígitos es divisible por tres, es también divisible por tres él mismo; y se tiene así un resultado que sirve de criterio general para determinar si un número dado es o no divisible por tres. Aparentemente el alumno hace esta generalización de forma natural, pero lo que sucede comúnmente es que el alumno usa el resultado deducido en forma general porque el profesor le dice que se ha obtenido una regla que se va a aplicar siempre para determinar tal o cual cosa, pero no hace suyo el resultado obtenido si sus capacidades cognoscitivas no han alcanzado el nivel requerido; aquí influye el nivel anterior, pues precisamente en la deducción casi siempre es necesario representar lo general en forma singular. No es fácil determinar cuando el alumno ha interiorizado el carácter general de la deducción, ya que el mismo puede usar el resultado alcanzado por iniciativa propia o porque así se lo dice su profesor, aquí se requiere de cierta maestría pedagógica para determinar en que nivel está realmente el alumno.

El tercer nivel referido, esto es, la generalización por ampliación de un concepto, se manifiesta cuando se pasa de un concepto a otro más general, pero que mantiene los rasgos esenciales del primero, un ejemplo se tiene cuando se extienden los principios de la mecánica de dos tiempos a la de cuatro tiempos, pues sobre los mismos principios esenciales se estudia el fenómeno de una forma más amplia; otro ejemplo se puede ver cuando se pasa de las derivadas de funciones de una variable a las de funciones de varias variables.

Es muy importante ejercitar al alumno en este tipo de generalización, esto es, en las diferentes ocasiones en que el contenido que se imparte implica esta generalización, se debe asignar al alumno como tarea que haga las consideraciones necesarias para pasar a la nueva situación más general. Evidentemente en las primeras tareas de este tipo el estudiante sólo tendrá un éxito parcial, pues le resultará muy difícil poder prever todos los elementos necesarios. Pero esta actividad está entre las que el futuro profesional tendrá que hacer para mantenerse a la par del desarrollo científico técnico, por lo que es menester que sea entrenado en la misma.

El cuarto nivel, es en el que se está, cuando la generalización se logra mediante un cambio del problema con que se trabaja, aunque manteniéndose en el mismo modelo. Este cambio del problema puede ser, inmediato, cuando las variaciones no son esenciales, como cuando se trabaja con una fórmula cuyos coeficientes se caracterizan por determinada forma, y se introduce una variación al problema que determina un cambio en la forma de los coeficientes de la fórmula a través de la cual se resuelve el problema. Aunque esta es una generalización que no requiere de mucho desarrollo de las capacidades cognoscitivas, sí es necesario ejercitarla con el fin de que el alumno esté en condiciones de trabajar en las siguientes etapas.

También hay que tener en cuenta, que el cambio del problema puede ser mediato, esto es, cuando las variaciones al problema aunque manteniéndose dentro del mismo modelo determinan cambios esenciales en el mismo, este cambio se manifiesta por ejemplo si los cambios llegan a tal punto que aparentemente se ha producido un cambio en el modelo del problema, y para identificar el modelo original se requiere de cambios de variables, o algunas transformaciones especiales que permitan identificar el modelo original; un ejemplo al respecto es la ecuación:

$$\mathbf{\cos^2(x) + 5\cos(x) + 6 = 0,}$$

donde el estudiante no se percata que puede usar el modelo de la ecuación de segundo grado para resolver el problema planteado. Por lo tanto tenemos que ser cuidadosos de contemplar en nuestra actividad docente ambas situaciones, pues si empezamos por el segundo aspecto de este nivel, el estudiante lógicamente confrontará dificultades para realizar las tareas que le encomendemos y si nos quedamos en la primera etapa al estudiante le faltará preparación para enfrentar el quinto nivel de generalización, que trataremos a continuación y el cual debe alcanzar todo estudiante de ingeniería.

Después de todas las consideraciones anteriores, se puede enfocar el quinto y más complejo nivel de generalización, que consiste en la generalización con desarrollo de un nuevo modelo. Según S.L. Rubinstein: "La generalización descubre las conexiones necesarias sujetas a la ley de los fenómenos y faculta explicar las diversas manifestaciones de sus relaciones internas." Rubinstein S. L. (1959)
Realmente es así, pero este proceso pasa a través de la modelación del fenómeno, de forma que este (el fenómeno) pueda ser desbrozado de sus atributos no esenciales, y se pongan de manifiesto aquellas relaciones internas fundamentales para su estudio. La capacidad de orientación hacia lo esencial del material, es uno de los elementos que determina la capacidad

de aprendizaje; por lo cual debe ser desarrollada tanto como sea posible, y como planteamos está asociada a la capacidad de desarrollar nuevos modelos para estudiar nuevos fenómenos. Aunque es por todos conocido que la habilidad de modelar es difícil de desarrollar en los estudiantes, pero también se tiene consenso de que es una habilidad que debe alcanzar todo estudiante de ingeniería; aunque por su complejidad está claro que le resulta muy difícil al estudiante lograrla directamente, por lo que es necesario el desarrollo de los niveles precedentes de generalización, para que el estudiante se encuentre en condiciones de arribar a esta meta.

Se puede decir que el estudiante está en este último nivel de generalización, cuando es capaz de obtener por sí mismo el nuevo modelo que le permite estudiar la nueva situación. Evidentemente este cambio de modelo tiene sus graduaciones propias, la nueva situación puede estar más o menos cerca de las situaciones y modelos conocidos por el estudiante, y este distanciamiento entre lo conocido y lo nuevo se logra vencer de forma efectiva si se desarrolla gradualmente la capacidad de generalización.

En el presente trabajo se demuestra que los estudiantes presentan dificultades en la evaluación de funciones, y se relaciona esta dificultad con pobres niveles del pensamiento teórico de los estudiantes, esta relación no se hace de manera empírica, la misma es resultado de investigaciones precedentes de los autores y de consideraciones teóricas derivadas de la bibliografía existente, en particular se pueden citar los trabajos de D. Tall.

Este autor, por su parte hace otro tipo de clasificación compatible con la de Blanco R., ya que tiene un sentido diferente, la clasificación de Tall (2002) plantea:

- La generalización extensiva.
- La generalización reconstructiva.
- La generalización disyuntiva.

En el primer tipo los diferentes casos se incorporan en el esquema establecido sin necesidad de transformar el esquema original. Este tipo de generalización es el que posibilita la apropiación de un concepto.

En el segundo, el sujeto tiene que reconstruir el esquema que posee del concepto, para poder identificar nuevos objetos que pertenecen al mismo. En el caso del concepto de función el sujeto tiene que reconstruir el esquema que tiene, para incluir el caso de la función definida por dos fórmulas.

En el último caso, el sujeto reconstruye el esquema, pero no logra incorporar esta reconstrucción al esquema original y conserva al esquema original y su reconstrucción, como dos esquemas con relativa independencia entre ellos. El sujeto ve como diferentes la función definida por una fórmula y la definida por más de una.

Por otra parte no se plantea que el desarrollo de la generalización teórica sea la solución radical para que los estudiantes evalúen correctamente las funciones, los problemas que se presentan en el proceso enseñanza aprendizaje, no se derivan de causas únicas. Pero los estudios realizados hasta la fecha nos permiten asegurar que la generalización teórica tiene un peso considerable en la habilidad de los estudiantes para evaluar funciones.

Conclusiones

El presente trabajo señala una dirección en la que se debe trabajar para lograr que los estudiantes mejoren sus posibilidades de usar el lenguaje matemático, lo cual es indudablemente un componente importante en el aprendizaje de esta ciencia.

Un manejo adecuado del concepto de función propicia tanto que el estudiante comprenda las ideas matemáticas, sino también que pueda expresar sus propias conclusiones y lo que es más importante aún materializar su pensamiento, para poder profundizar en el estudio del fenómeno.

Por último debemos agregar que el desarrollo de la generalización teórica es un elemento fundamental, no solo para el aprendizaje de la Matemática, también es básico para el desarrollo intelectual del estudiante, resulta imprescindible para su formación como profesional en la era del conocimiento.

Referencias bibliográficas

Blanco R. (1998) Necesidad y fundamento del desarrollo del pensamiento teórico de los estudiantes. Revista Pedagogía Universitaria de la Dirección de Formación del Profesional. MES Vol 3 No.2

Canestri J. Oliva S. (2000) Sobre el origen intrasíquico de la Matemática. Revista de Psicoanálisis. No.4.

Cordero F. (2005). La Socioepistemología en la Graficación del Discurso Matemático Escolar. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 18. México. CINVESTAV, IPN.

Genicio M. R. et al (2005), Ecuación Cuadrática: Una Ingeniería Didáctica para su Enseñanza. Facultad de Ingeniería, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 18, Argentina, Universidad Nacional de Jujuy.

Hernández Y., Armando de Pedro L. (2005), Métodos Participativos, Un Arma Poderosa para el Aprendizaje. Departamento de Teoría de Funciones, Facultad de Matemática y Computación, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 18. Cuba, U. H.

Mitchell J. M. (2001) Interactions Between Natural Language and Mathematical Structures: The Case of "Wordwalking" Institute for Field-Based Teacher Education California State University, Monterey Bay MATHEMATICAL THINKING AND LEARNING, *3*(1), 29–52

Sfard A. (2000) On Reform Movement and the Limits of Mathematical Discourse. Faculty of Education. Mathematical Thinking and Learning 2(3) 157-189, The University of Hayfa. Israel.

Rubinstein S.L. (1959). El pensamiento y los caminos de su investigación. Edit. Pueblos Unidos S. A. Uruguay.

Tall D., Akkoc H. (2002) The Simplicity, Complexity And Complication Of The Function Concept. Mathematics Education Research Centre. University of Warwick, CV4 7AL, U.K.
<h.akkoc@warwick.ac.uk>, david.tall@warwick.ac.uk