

## LA CONSTRUCCIÓN DE LA RECTA TANGENTE EN PUNTOS DE INFLEXIÓN: UN MÉTODO ALTERNATIVO EN LA ARTICULACIÓN DE SABERES

Oleksandr Karelin, Carlos Rondero Guerrero, Anna Tarasenko  
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. (México)

[skarelin@uaeh.reduaeh.mx](mailto:skarelin@uaeh.reduaeh.mx), [rondero@uaeh.reduaeh.mx](mailto:rondero@uaeh.reduaeh.mx), [anataras@uaeh.reduaeh.mx](mailto:anataras@uaeh.reduaeh.mx)

Campo de investigación: pensamiento matemático avanzado. Nivel educativo: medio y superior

Palabras clave: cálculo recta tangente; desigualdades; puntos de inflexión y métodos no tradicionales

### Resumen

En trabajos anteriores (Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A., 2004, 2005 y 2006), se propuso un método alternativo en la búsqueda de la recta tangente para funciones elementales sin el uso de la derivada y donde se demostraron algunas de sus principales propiedades. Por medio de una función adicional,  $F(x) = f(x) - (m x + b)$ , se identifican relaciones entre los puntos extremos de ésta función y los puntos de tangencia de la función original  $f(x)$ . Todos los resultados previos fueron obtenidos para funciones cóncavas.

En este trabajo, se discute una ampliación del método que posibilita incluir el caso del cálculo de la recta tangente en los puntos de inflexión de la función  $f(x)$ .

### Introducción

El estudio de la recta tangente se realiza en cálculo usando derivadas. Se ha venido construyendo un método no tradicional, cuya puesta en escena permite mostrar aspectos geométricos y analíticos que complementan el enfoque clásico y potencian el desarrollo del pensamiento variacional y el manejo de la representación visual- gráfica de los estudiantes. Ahora en este trabajo, el método propuesto se ha ampliado al cálculo de la recta tangente en puntos de inflexión, lo que es una muestra de su potencial analítico. De este modo se estructura una propuesta didáctica que busca articular al precálculo con el cálculo, lo que puede ser útil para estudiantes de bachillerato y licenciatura.

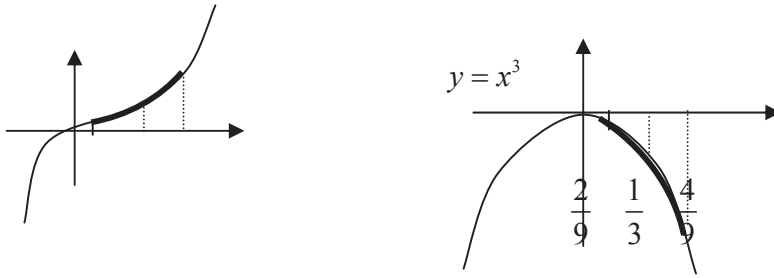
### Observación 1.

En el trabajo (Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A., 2006) se muestra como se construye la recta tangente para las funciones formadas por operaciones aritméticas sin derivar.

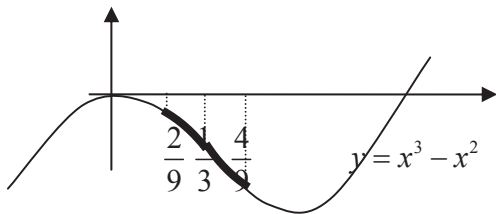
Las demostraciones se llevan a cabo bajo las condiciones, de que los sumandos y el resultado de la operación son funciones cóncavas de clase  $C$ . Pero no siempre que se suman dos funciones de esta clase, se puede garantizar que el resultado sea una función cóncava. Misma situación se cumple con el producto de funciones.

En tal caso vamos a construir dos funciones cóncavas  $f_1(x) \in C$  y  $f_2(x) \in C$ , tal que su suma no es cóncava  $f_1(x) + f_2(x) \notin C$ .

Sean  $f_1(x) = x^3$  y  $f_2(x) = -x^2$ , en el Dominio  $D = [\frac{1}{3} - \frac{1}{9}, \frac{1}{3} + \frac{1}{9}]$ , sus gráficas son:

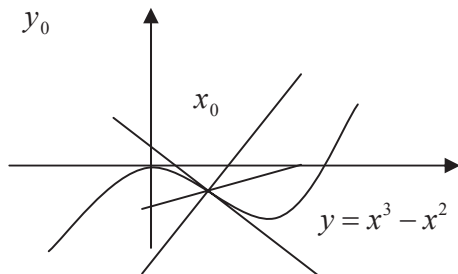


La suma de las dos gráficas en el dominio  $D = [\frac{1}{3} - \frac{1}{9}, \frac{1}{3} + \frac{1}{9}]$ , es



La función  $y = x^3 - x^2$  no es de clase  $C$  en el punto  $x_0 = \frac{1}{3}$ .

En realidad, si se traza cualquier recta, que pasa por punto  $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27})$



podemos ver que siempre una parte está de la gráfica esta arriba y otra abajo con respecto de cualquier recta, esto significa que la función  $y = x^3 - x^2$  no pertenece a clase  $C$ .

Si formamos la función auxiliar para  $y = x^3 - x^2$ ,

obtenemos la función  $F(x) = f(x) - [mx + b]$  y su grafica tiene forma alrededor del punto

$(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27})$ :



Como se puede observar no hay mínimo, ni máximo en el punto  $x = 1/3$ , por lo tanto a la función  $y = x^3 - x^2$ , no se puede aplicar nuestro método presentado en (Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A., 2006).

Observación 2.

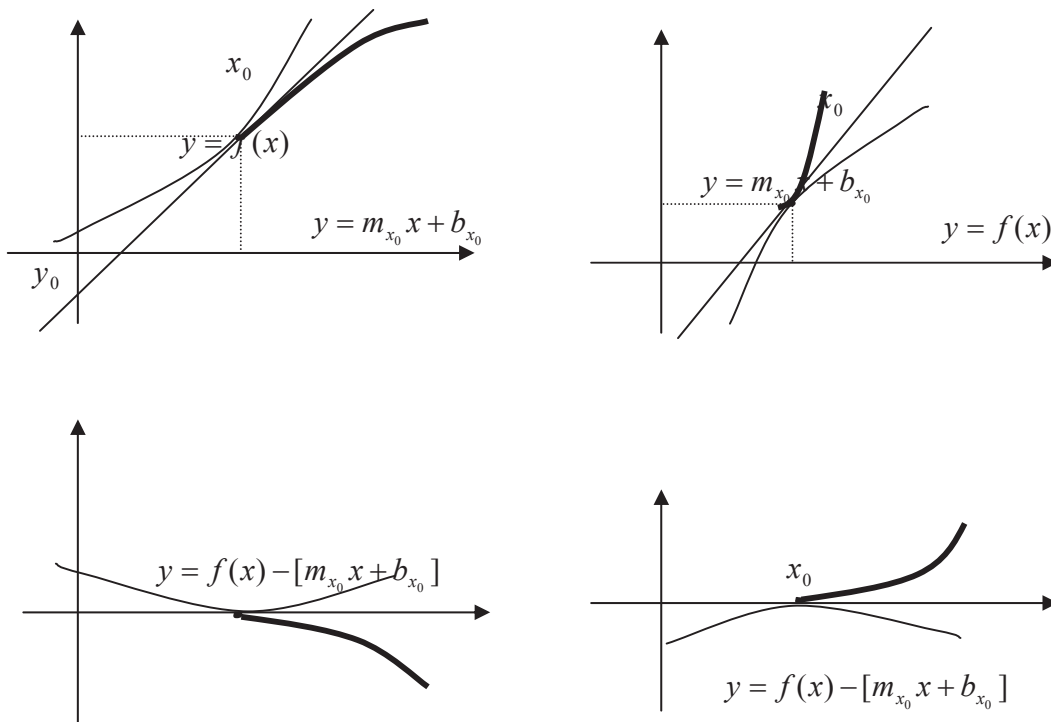
En (Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A., 2004, 2005 y 2006) se propuso un método alternativo en la búsqueda de la recta tangente para gráficas de funciones elementales sin el uso de la derivada.

La idea general es: si a la grafica de una función cóncava  $y = f(x)$ , se le resta la gráfica de la recta tangente  $y = mx + b$  en un punto  $(x_0, f(x_0))$  entonces en el punto  $x = x_0$ , la función auxiliar  $F(x) = f(x) - [mx + b]$  tendrá un punto máximo ó mínimo local.

Por medio de la  $F(x) = f(x) - [mx + b]$  se identifican relaciones entre los puntos extremos de ésta función y los puntos de tangencia de la función original  $f(x)$ .

Todos los resultados previos fueron obtenidos solo para funciones cóncavas

El método propuesto no se aplica cuando  $x_0$  es un punto de inflexión.



La función auxiliar  $F(x) = f(x) - [mx + b]$  no tiene punto mínimo o punto máximo en el punto  $x = x_0$

Ahora generalizamos nuestro método para incluir los puntos de inflexión.

### Idea básica

Definición. Sea  $y = f(x)$  una función con el punto de inflexión en  $(0,0)$ .

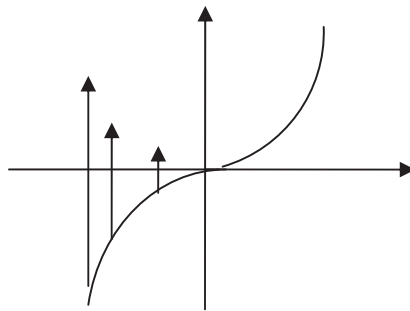
Si la función transformada  $y = \tilde{f}(x)$ ,  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(x), & x < 0 \end{cases}$ , la cual es cóncava,

tiene en  $(0,0)$ , la recta tangente  $y = 0$  (el eje  $X$ ), entonces la recta  $y = 0$  recibe el nombre la recta tangente para la función  $y = f(x)$  en el punto de inflexión  $(0,0)$ .

Aspectos gráficos.

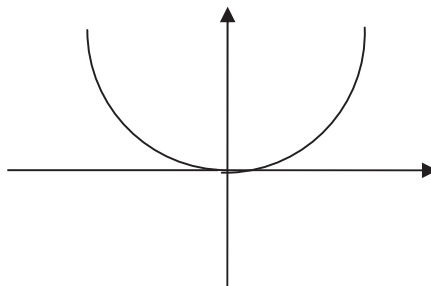
El punto  $(0,0)$  es un punto de inflexión para  $f$

$$y = \tilde{f}(x)$$



Trazamos la gráfica de la función  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(x), & x < 0 \end{cases}$

$$y = \tilde{f}(x)$$



Alrededor del punto  $(0,0)$  la gráfica de  $\tilde{f}$  es cóncava, podemos construir según (Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A., 2004, 2005 y 2006) la recta tangente para  $y = \tilde{f}(x)$ , ya que ella es cóncava en  $(0,0)$ . Si la recta tangente en el punto  $(0,0)$ , para la gráfica de  $y = \tilde{f}(x)$  es

igual  $y=0$  entonces la recta tangente en el punto  $(0,0)$ , para la gráfica de  $y=f(x)$ , también es igual a  $y=0$ . Las rectas tangentes para la función inicial y la función transformada coinciden.

### Ejemplo

Consideremos la función  $y=f(x)$ ,  $f(x)=x^3$ , vamos a construir la recta tangente  $y=mx+b$  que pasa por el punto  $(0,0)$  sin hacer uso de la derivada.

Para la función  $y=x^3$  el punto  $(0,0)$  es su punto de inflexión.

La función transformada  $y=\tilde{f}(x)$  ya es cóncava

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(x), & x < 0 \end{cases} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$$

Podemos aplicar nuestro método (Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A., 2004, 2005 y 2006) y construir la recta tangente para  $y=\tilde{f}(x)$  y su recta tangente coincide con la recta tangente para  $f(x)=x^3$ .

Según Afirmación 1 de (Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A., 2006),  $y=mx+b$  es la recta tangente de la función  $y=\tilde{f}(x)$ ,

si y solo si la función auxiliar para la función transformada

$$\tilde{F}(x) = \tilde{f}(x) - [mx + b]$$

tiene su punto mínimo local en  $x=0$ .

Por la definición del punto mínimo local debe cumplirse la desigualdad:

$$\tilde{F}(x) \geq \tilde{F}(0) \quad \text{o} \quad \tilde{f}(x) - [mx + b] \geq \tilde{f}(0) - [m \cdot 0 + b]$$

Escribimos la última desigualdad aparte para  $x \geq 0$  y  $x < 0$  tomando en cuenta que

$$\tilde{f}(x) = x^3, \text{ para } x \geq 0 \quad \text{y} \quad \tilde{f}(x) = -x^3, \text{ para } x < 0.$$

$$\begin{cases} x^3 - mx \geq 0, & x \geq 0 \\ -x^3 - mx \geq 0, & x < 0 \end{cases}$$

Factorizamos,

$$\begin{cases} x(x^2 - m) \geq 0, & x \geq 0 \\ x(-x^2 - m) \geq 0, & x < 0 \end{cases}$$

Recordamos que buscamos un número  $m$  tal que el sistema de las desigualdades se cumpla. Según Afirmación 1 de (Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A., 2006) solución  $m$ , es la pendiente de la recta tangente.

Si  $m > 0$ , entonces no se cumple la primera desigualdad del sistema alrededor del origen. El factor  $x \geq 0$ , el factor  $(x^2 - m) < 0$  en un entorno de  $(0,0)$ .

Si  $m < 0$ , entonces no se cumple la segunda desigualdad de (8) alrededor del origen. El factor  $x < 0$ , el factor  $(-x^2 - m) > 0$  en un entorno de  $(0,0)$ .

Si  $m = 0$  el sistema se transforma en,

$$\begin{cases} x^3 \geq 0, & x \geq 0 \\ -x^3 \geq 0, & x < 0 \end{cases}$$

Estas desigualdades se cumplen.

Entonces la pendiente de la recta tangente  $m = 0$ .

Según la fórmula  $b = \tilde{f}(x_0) - mx_0 = \tilde{f}(0) - 0 \cdot 0$ ,  $b = 0$ .

Obtenemos la resolución del problema. La recta tangente para la gráfica de  $y = x^3$  que pasa por el punto  $(0,0)$  es  $y = 0$ .

## Conclusiones

El método propuesto se amplió al incluir el cálculo de la recta tangente en puntos de inflexión. Nuestra perspectiva no tradicional permite mostrar una articulación conceptual entre las nociones básicas del cálculo como concavidad, puntos extremos, pendiente de una recta y la comprensión de la dependencia lineal y no lineal.

## Referencias bibliográficas

- Rondero, C., Karelin, O. y Tarasenko, A. (2004). Métodos alternativos en la búsqueda de los puntos críticos y derivadas de algunas funciones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17, 821-827. CLAME.
- Karelin, O., Rondero, C. y Tarasenko, A., (2005). Un método alternativo de articulación de saberes en el cálculo elemental. Construcción de la recta tangente. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18, 881-887. CLAME.
- Karelin, O., Rondero, C. y Tarasenko, A., (2006). Propuesta didáctica sobre la construcción de la recta tangente sin el uso de la derivada. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19, 386-391. CLAME.
- Boyer, C. y Merzbach, U. (1989). *A History of Mathematics*. New York, USA.: John Wiley.
- Edwards, C. H. (1979). *The Historical development of the Calculus*. New York, USA.: Springer-Verlag.
- Stewart, J. (1999). *Cálculo, Conceptos y Contextos*. México: Internacional Thomson Editores.