ECUACIONES DE PRIMER GRADO: SU HISTORIA

Mario Dalcín, Mónica Olave
Instituto de Profesores Artigas. (Uruguay)
filomate@adinet.com.uy, matemoni@adinet.com.uy

Campo de investigación: formación de profesores, pensamiento geométrico, pensamiento algebraico, historia de la matemática
Nivel educativo: medio, superior
Palabras clave: ecuaciones de primer grado, problemas, culturas antiguas

Resumen
Presentamos una reseña del tratamiento que daban distintas culturas antiguas a problemas que en el lenguaje del álgebra actual nos remiten a ecuaciones de primer grado. Recorreremos, sin pretender ser exhaustivos, parte del camino que transitaron culturas como la babilónica, egipcia, griega, en la resolución de estos problemas y haremos un análisis de la resolución planteada comparándola con la actual.

Introducción

A partir de la década del 90 se ha empezado a investigar acerca del uso y valor de la historia de la matemática en la enseñanza de la matemática. Prueba de ello es el trabajo que se empezó a hacer a partir del ICMI 2000 (International Commission on Mathematics Instruction) abordando el estudio del rol de la historia de la matemática en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.
Según algunos estudios se evidencia el interés creciente entre los profesores de matemática en la historia de la matemática; al mismo tiempo señalan las dificultades de los docentes en acceder a materiales que permitan un uso real de la historia en sus clases. En muchos países europeos se formaron grupos de investigación en torno al tema. (Gulikers y Blom, 2001)
Con respecto a la historia de la matemática y a la necesidad o conveniencia de estudiarla, de Guzmán (1992) dice:
"A mi parecer, un cierto conocimiento de la historia de la matemática, debería formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del matemático en general y del profesor de cualquier nivel, primario, secundario o terciario, en particular. Y, en el caso de este último, no sólo con la intención de que lo pueda utilizar como instrumento en su propia enseñanza, sino primariamente porque la historia le puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática, de lo cual suele estar también el matemático muy necesitado.
La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas. Cuántos de esos teoremas, que en nuestros días de estudiantes nos han aparecido como verdades que salen de la oscuridad y se dirigen hacia la nada, han cambiado de aspecto para nosotros al adquirir un perfecto sentido dentro de la teoría, después de haberla estudiado más a fondo, incluido su contexto histórico y biográfico.
La perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante y en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores. Nos aproxima a las interesantes personalidades de los hombres que han ayudado a impulsarlas a lo largo de muchos siglos, por motivaciones muy distintas."

Objetivo y forma de trabajo

Con el propósito de contribuir a la formación de los estudiantes de profesorado de matemática presentamos una reseña del tratamiento que daban distintas culturas antiguas a problemas que en el lenguaje del álgebra actual nos remiten a ecuaciones de primer grado. Recorreremos parte del camino que transitaron culturas como la babilónica, egipcia, griega, en la resolución de estos problemas. De esta manera podremos comparar los resultados y técnicas que involucran su resolución hoy en día con los resultados y procedimientos conocidos en otras épocas.
La forma de trabajo seguida implicó:

- ♦ Análisis de fuentes secundarias (debido a ausencia en el medio de fuentes primarias) a fin de identificar problemas que implicaron el uso de una ecuación de primer grado para su resolución.
- ♦ Reseñar brevemente el tratamiento que recibieron los problemas en la historia, buscando interpretar las soluciones dadas a los mismos.
- ♦ Contrastar las distintas perspectivas. En relación con esto último es fundamental el aporte de algunos autores respecto a clarificar el sentido de los problemas originales.
- ♦ Evaluar la consistencia y pertinencia de los argumentos usados a la luz de los cánones aceptados en la actualidad.

Babilonios (2000 a.C. – 600 a.C.)

La información que nos llega de las matemáticas babilonias es a través de tablillas de arcilla, en donde registraban sus actividades. Existen cerca de 180 tablillas que incluyen problemas que tratan respecto al comercio, herencias, división de propiedades, etc. Cerca de la mitad de los problemas contenidos en las tablas son puramente aritméticos o algebraicos y geométricos que tratan sobre áreas de cuadrados, rectángulos, triángulos, círculos, etc. La solución de estos problemas llevan muchas veces a la resolución de lo que hoy consideramos ecuaciones de primer grado, segundo grado, tercer grado, sistemas de ecuaciones lineales, entre otros.
Utilizaban sólo dos símbolos para representar todos los números, en el sistema de numeración en base 60, posicional y aditivo. Podían escribir enteros y fracciones sexagesimales.
Figuran en las tablillas, tablas de multiplicación hasta 59x59, de división, de cuadrados, cubos y raíces cuadradas. (Bashmakova y Smirnova, 2000, pp. 2-3).
La Tabla YBC 4652 (propiedad hoy de la Universidad de Yale) contiene 22 problemas dispuestos por grado de dificultad, pero sólo once de ellos se conservan parcialmente y de estos, apenas seis están totalmente traducidos. Para cada problema se da una respuesta pero sin ningún comentario acerca de su resolución. El objetivo de los problemas es descubrir el peso original de una piedra dando orígen a una ecuación de primer grado.
Problema 19
Encontré una piedra, pero no la pesé; después pesé seis veces (su peso) y sumé 2 gin, después sumé la tercera parte de la séptima parte de esta cantidad multiplicada por 24. Todo pesa un mana. ¿Cuál es el peso original de la piedra?
Solución : 4 1/3 gin. (1 mana = 60 gin) (http://www.malhatlantica.pt/mathis/Babilonia/Babilonia.htm).
En el lenguaje del álgebra actual este problema se resolvería mediante la ecuación:

$$6x+2+\frac{1}{3}.\frac{1}{7}(6x+2).24=60$$

cuya solución es efectivamente 4 1/3.

Egipcios (2000 a.C. – 1800 a.C.)

La información sobre las actividades matemáticas de los egipcios la encontramos en el Papiro de Rhind o Papiro de Ahmes. El nombre se debe a Henry Rhind quien lo compró en 1858 o Ahmes, escriba que lo copió hacia el año 1850 a.C. Trabajaban en el sistema de numeración decimal, usaban cifras o signos especiales para representar los dígitos, los múltiplos de las potencias de 10, las fracciones unitarias (numerador 1), las fracciones del tipo $\frac{n-1}{n}$.

Los problemas planteados se pueden clasificar en aritméticos y algebraicos. Los últimos no se refieren a objetos concretos, como ser cerveza o pan, ni piden el resultado de operaciones con números conocidos, sino que piden lo equivalente a resolver ecuaciones lineales del tipo $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$, siendo a, b y c números conocidos y x es desconocido. A este número desconocido se le llamaba "aha" o montón. (Boyer, 1986, pp. 37-38).

En el Papiro de Ahmes, el método empleado para la resolución de estos problemas se conoce hoy como el *"método de la falsa posición"* o *"regula falsa"* que consiste en partir de un valor falso para la incógnita y llegar al valor correcto. Con el valor incorrecto se efectúan las operaciones indicadas en el miembro de la izquierda y se compara el resultado así obtenido con el que se debería haber obtenido. Mediante el uso de proporciones se llega a la respuesta correcta.

Veamos un ejemplo:

Se cambiaron los números para que la explicación sea más clara.

"Un montón, sus dos tercios, su mitad, todo junto es trece. ¿Cuál es la cantidad? (Guelli, 1989)

El problema, en el lenguaje del álgebra actual, se reduce a resolver la ecuación:

$$x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x=13 \Rightarrow \frac{13}{6}x=\frac{78}{6} \Rightarrow x=6$$

Pero los egipcios no podían resolver la ecuación de esta forma. Para hacerlo atribuían un valor falso al montón, por ejemplo 12:

$$12+\frac{2}{3}\cdot 12+\frac{1}{2}\cdot 12=12+8+6=26$$

Por medio de una regla de tres simple obtenían el valor verdadero del montón:

12 es a 6 como el valor verdadero del montón es a 13, por lo que el montón es 6.

Aunque en problemas similares a este Ahmes utiliza el método de falsa posición, en el *Problema 30* la resolución pasa por factorizar el primer miembro de la "ecuación".

En él se resuelve la ecuación: $x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x=37$

Ahmes factoriza el primer miembro y divide 37 entre $1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$ obteniendo el resultado $16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$.

Los egipcios no se conformaban con esto. Tenían otro método para resolver ecuaciones, que podríamos llamar *desandar lo andado*. Éste consistía en hallar la solución tras la

manipulación aritmética de la incógnita invirtiendo el proceso de manera que, mediante la aplicación a la solución de las operaciones aritméticas inversas y en sentido contrario, se consiga llegar a la cantidad inicial. Este método aparece aplicado en algunos problemas que figuran en el Papiro de Moscú, el que se encuentra en el Museo de Bellas Artes de Moscú.
Veamos un ejemplo:
El Problema 19 pide calcular un montón tomándolo 1 y ½ veces y añadiendo 4 para dar 10. ¿Cuál es la cantidad que hace esto?
El procedimiento detallado por el escriba sigue los siguientes pasos:
Si al final se ha añadido 4 para obtener el resultado 10 lo primero que se hace para llegar a la cantidad inicial es sustraer 4 del resultado (10 - 4 = 6). El problema entonces se puede reformular como "Calcular la cantidad tomándola 1 y ½ veces para dar 6".

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)x+4=10$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)x+4-4=10-4$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)x=6$$

Si la cantidad se ha repetido 1 y ½ veces quiere decir que se ha multiplicado por 1 ½. Por ello se invierte de nuevo el proceso a partir del 6 multiplicando esta cantidad por el inverso de 1 ½, es decir, 2/3 (2/3 x 6 = 4) obteniéndose así la solución (4).

$$\frac{3}{2}x=6$$

$$\frac{\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}}=\frac{6}{\frac{3}{2}}$$

$$x=6\cdot\frac{2}{3}$$

$x = 4$

De los tres métodos reseñados –falsa posición, factorización y desandar lo andado- los dos últimos son similares a los utilizados actualmente en la manipulación algebraica de las ecuaciones de este tipo. La técnica o método de la falsa posición, si bien no es un método que sea aceptado de buen grado por los docentes, es utilizado frecuentemente por los estudiantes que se inician en el tema.

Griegos (300 a.C. – 300 d.C.)

Euclides (300 a.C.): *Elementos.*
Para ejemplificar el tratamiento que realizaba Euclides a los problemas que hoy en día se reducen a la resolución de una ecuación de primer grado, veamos la Proposición 44 del Libro I: *"Aplicar a una recta dada en un ángulo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado".*

Se entenderá aplicar como construir, recta como segmento e igual como de igual área, entonces aplicar un paralelogramo a una recta AB significa construir un paralelogramo tal que uno de sus lados sea el segmento AB y que tenga igual área a una figura dada.
Los matemáticos griegos no consideraban las áreas como, por ejemplo en el caso de un rectángulo, producto de sus lados, sino que la veían como figura geométrica comprendida entre sus lados y obtenían sus resultados sobre el tamaño o contenido de la figura mediante una serie de razonamientos sobre las mismas que podríamos llamar *recortar y pegar*. (Millán, 2004, pp 77-78)
Para llevarlo al lenguaje del álgebra usaremos un caso particular: el ángulo dado es recto. Entonces debemos *hallar el lado del rectángulo para que su área sea igual a la del triángulo dado*.

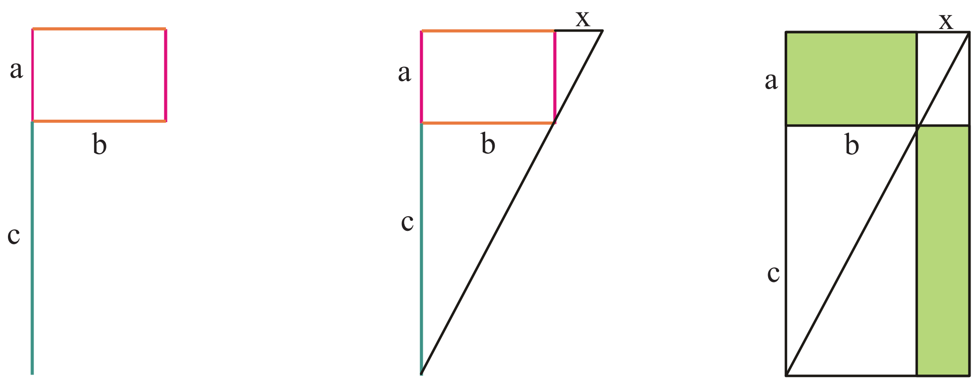
T = área del triángulo dado

$\overline{AB} = a$

x = dimensión desconocida del rectángulo

La solución del problema se podría obtener mediante la resolución de la ecuación: $ax = T$.
Para entender mejor el procedimiento utilizado por Euclides trabajaremos con una variante de la Proposición 44 propuesta por Sessa (2005).
Dados dos segmentos, construir sobre un tercer segmento dado un rectángulo con área igual al rectángulo formado por los dos primeros.

Construye el rectángulo de lados *a* y *b* y a continuación de *a* traza el segmento de medida c. Une luego el extremo de *c* con el extremo de *b* y prolonga este segmento hasta cortar con la prolongación del lado opuesto al lado *b*. El segmento marcado con *x* es la solución del problema, que quedaría justificado con la figura 3, dejando a cargo del lector la comprobación de que las figuras sombreadas son equivalentes.



A modo de reflexión final

Una mirada a los 'viejos métodos' puede ayudar a los profesores y estudiantes a evaluar sus propias ideas matemáticas, al mismo tiempo que conocer formas alternativas de concebir un problema, enriquecerse en dicho proceso.

Por ejemplo, a través de re-examinar el desarrollo de los conceptos, métodos y demostraciones, los estudiantes y en especial los estudiantes de profesorado, pueden ver que los que hoy consideramos grandes matemáticos también tuvieron sus dudas y sus errores, incertidumbres y aciertos. Comparando trabajos matemáticos de distintas épocas ver que frente a un mismo problema se crearon distintas respuestas, que la matemática cambia.
La historia de la matemática puede ayudar a los estudiantes a tomar conciencia de que el aprendizaje no es lineal. El desarrollo de las ideas matemáticas no es tan lineal como lo presentan en general los libros de texto. La matemática como producto final –como aparece en general en los libros– puede ser muy diferente al hacer matemático. La mayoría de las ideas matemáticas nunca han sido presentadas en los libros en la forma en que fueron creadas. Cuando un problema ha sido resuelto la solución se transforma en una teoría que los profesores enseñan sin ninguna referencia al problema que les dio origen.
La historia de la matemática permite al estudiante plantearse la relación entre rigor e imaginación, relación que él mismo deberá manejar en su propia formación como profesor de matemática, y que deberá manejar además en su futuro como docente en el trabajo con estudiantes de enseñanza media.

Referencias bibliográficas

Bashmakova, I. y Smirnova, G. (2000). *The Beginnings and Evolution of Algebra*. U.S.A.: The Mathematical Association of America.
Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza.
De Guzmán, M. (1992). Tendencias innovadoras en Educación Matemática. OMA. Buenos Aires.
Guelli, O. (1989). A regra da falsa posiçao. Brasil: *Revista do Profesor de Matemática*, nº 15,18-22.
Gulikers, I. y Blom, K. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics* 47, 223-258
Millán, A. (2004). Euclides. *La fuerza del razonamiento matemático*. Madrid: Nivola.
Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectiva. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
http://www.malhatlantica.pt/mathis/Babilonia/Babilonia.htm.