LA LÓGICA DIALÉCTICA Y EL CÁLCULO DIFERENCIAL

Rafael Jiménez Martínez
Facultad de Informática. Universidad de Camagüey. (Cuba)
felojimenez@yahoo.com.mx , rafael.jimenez@reduc.edu.cu
Campo de investigación: epistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: lógica, dialéctica, cálculo

Resumen
La aparición del Cálculo Diferencial fue el resultado de un largo proceso, en el cual influyó decisivamente el desarrollo de otras ciencias, como la Física (Mecánica) y la Astronomía. Estas ciencias planteaban a la Matemática la necesidad de resolver diversos problemas prácticos. Al surgir el Cálculo Diferencial en el Siglo XVIII, es sometido a una crítica encarnizada, que se mantuvo hasta finales del Siglo XIX. En nuestro trabajo haremos un análisis de los aspectos más importantes de este proceso, y sobre la necesidad de desarrollar este análisis a partir de la utilización de los principios de la lógica formal y la lógica dialéctica, y su incidencia en la formación de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial en las carreras de Ingeniería.

La Lógica Dialéctica y el Cálculo Diferencial

La aparición del Cálculo Diferencial fue el resultado de un largo proceso. Para el desarrollo de este proceso, en el Siglo XVII ya se tenían algunas premisas básicas: existencia del álgebra y de técnicas de cálculo; introducción, a partir de los trabajos de Descartes y Fermat, de las matemáticas de las variables y el Método de Coordenadas; conocimiento de las ideas infinitesimales de Arquímedes (método de exhaución); acumulación de métodos empíricos de solución de problemas de cálculo de tangentes, curvaturas, centros de gravedad, valores extremos, etc. En este proceso influyó decisivamente el desarrollo, entre otras ciencias, de la Física (Mecánica) y la Astronomía. Estas ciencias planteaban a la Matemática la necesidad de resolver diversos problemas prácticos. Es así que al surgir el Cálculo Diferencial en el Siglo XVIII, es sometido a una crítica encarnizada. La lucha alrededor de los conceptos fundamentales del cálculo, en particular alrededor del concepto de límite, se mantuvo hasta finales del Siglo XIX. En nuestro trabajo haremos un análisis de los aspectos más importantes de este proceso, y sobre la necesidad de desarrollar este análisis a partir de la utilización de los principios de la lógica formal y la lógica dialéctica, y su incidencia en la formación de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial. Un aspecto básico en el surgimiento del Análisis Matemático lo constituye la creación del Cálculo Diferencial e Integral, el cual surge como una rama de la Matemática, de manera casi simultánea a partir de los trabajos del Matemático y Físico Inglés Isaac Newton (1642-1727) y el Matemático y Filósofo Alemán William Gottfried Leibniz (1646-1716). Describiremos brevemente los aportes de ambos.

Teoría de las fluxiones

En el método de las fluxiones, Newton estudia las magnitudes variables, como abstracción de las diferentes formas del movimiento mecánico, y las denomina: *Fluentes*. Todos los fluentes son variables dependientes, y tienen como argumento una variable abstracta, que representa el tiempo. Esta variable fluye uniformemente y con ella se relacionan todos los fluentes.
Posteriormente introduce el análisis de la variación de los fluentes con relación al tiempo, a las que denomina *Fluxiones*. Es decir, que introduce las fluxiones como velocidad de los fluentes. Como las fluxiones son a su vez variables, es decir fluentes, se pueden encontrar las fluxiones de las fluxiones, etc. Si se denota el fluente por y, los símbolos de la primera, segunda, tercera fluxiones, etc., son: $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, etc. Para el cálculo de las velocidades

instantáneas, se requieren variaciones infinitesimales de los fluentes, a los que denomina: *Momentos*. En la Teoría de las Fluxiones, se resuelven dos problemas principales:

1^0- Determinación de la velocidad del movimiento en un instante dado, según un camino dado (Relación entre las fluxiones, dada la relación entre los fluentes).

2^0- Determinación del camino recorrido en un instante dado, conocida la velocidad del movimiento (Relación entre los fluentes, dada la relación entre las fluxiones).

El 1^{er} problema representa el problema de la diferenciación de funciones y obtención de las Ecuaciones Diferenciales que permiten expresar fenómenos de la naturaleza.

El 2^0 problema representa el problema de la integración de las Ecuaciones Diferenciales.

Newton obtuvo la mayoría de los resultados de la Teoría de Fluxiones en la década del 60 del Siglo XVII, sin embargo no publicó los trabajos escritos sobre el tema. Incluso, al publicar sus: "Elementos Matemáticos de la Filosofía Natural", publicado en los años 1686-1687, no hace referencia a la Teoría de las Fluxiones, aunque muchos de sus resultados fueron obtenidos a partir de los resultados de esa Teoría.

Cálculo de los diferenciales

Los trabajos de Leibniz reflejan algunas de sus ideas filosóficas. En sus trabajos matemáticos, él se regía sólo por un objetivo: la creación de un método universal de conocimiento científico, llamado por él: La Característica Universal. Según Leibniz, el establecimiento de la Característica Universal y el descubrimiento de las leyes de las nuevas matemáticas resuelven el problema de la demostración científica y elimina las discusiones, pues sólo se requiere producir cálculos. A partir de la solución de problemas de combinatoria, comenzó a trabajar en problemas infinitesimales. A partir de la solución de problemas sobre el trazado de una tangente a una curva, y la utilización del Triángulo de Pascal para su solución, va gradualmente llegando a la idea sobre la posibilidad de sumar las diferencias (dx y dy). Así, paulatinamente, descubre también, al igual que Newton, la relación inversa entre los métodos de trazado de tangentes (es decir, operaciones de diferenciación) y las cuadraturas (es decir, integración). Así el cálculo de Leibniz se formaba, entre otras, de las premisas:

1^0 Resolución de problemas sobre tangentes, el Triángulo de Pascal y el paso gradual de las relaciones entre elementos finitos a arbitrarios y después infinitesimales.

2^0 Problemas inversos de tangentes, sumas de diferencias infinitamente pequeñas, descubrimiento de la inversibilidad mutua entre los problemas diferenciales e integrales.

En sus trabajos, y a partir de sus ideas filosóficas, se esforzó en crear un simbolismo cómodo. Como resultado logra introducir los símbolos dx y dy para los diferenciales, el símbolo $\int$ para las integrales (corrupción de la letra inicial de la palabra *Summa*), e introdujo los términos: diferencial, cálculo diferencial, función, coordenadas, ecuación diferencial, algoritmo y muchos más, así como muchos otros símbolos que también han llegado hasta nuestros días. Leibniz sí publicó sus resultados de manera inmediata, pero no pudo fundamentarlos, aunque mantenía con Newton una correspondencia fluida, y existía, en términos generales, comprensión mutua de sus respectivos trabajos, y reconocimiento sobre la proximidad de sus ideas y deducciones (a pesar de la disputa sobre la prioridad del descubrimiento, que se prolongo incluso después de la muerte de ambos).

Limitaciones de las teorías de Newton y Leibniz

¿Por qué, a pesar de haber obtenido, tanto Newton como Leibniz, resultados de extraordinario valor, pues permitían resolver problemas que ocuparon a los matemáticos durante siglos, no se apresuraron en publicar sus resultados, como en el caso de Newton, o lo hicieron sin una fundamentación adecuada, como en el caso de Leibniz? Existen diversas versiones que intentan explicar este hecho.

José Maza Sancho, de la Universidad de Chile (Maza, 2000), plantea al respecto: *"Entre el descubrimiento de la ley de la gravitación universal y su publicación transcurren mas de dos décadas. ¿Por que Newton dejo pasar veintiún años antes de proclamar el más importante de sus descubrimientos? (...) Un error inicial, cometido en el cálculo debido al valor inexacto del radio terrestre, habría llevado a Newton a abandonar el estudio del problema durante varios anos. Las mediciones geodésicas del abate Picard que llegaron a conocimiento de Newton en una reunión de la Royal Society, le habrían permitido en 1682 corregir sus cálculos y verificar su hipótesis y volver por tanto al problema de la gravitación. (...) esta versión (...) no merece crédito puesto que varias determinaciones bastante exactas del radio terrestre − como las de Snel y de Gunter − estaban en 1666 ya a disposición de Newton. Otra versión pretende que los ataques del insoportable Hooke, que había impugnado algunas conclusiones teóricas de la óptica de Newton y que sin duda reclamaría la paternidad de la ley de la gravitación, habrían descorazonado al ultrasensible y tímido león. Aunque la profunda aversión de Newton a verse envuelto en controversias publicas, explica el atraso de la aparición de muchos de sus escritos, la tardía publicación de su obra maestra tuvo motivos mucho más naturales. Fueron dificultades para solucionar determinados problemas de Cálculo Integral, indispensables pare la formulación definitiva de la ley, las que lo detuvieron. Para dar cuenta del movimiento de una piedra, en caída libre, o de la Luna en su trayectoria, es necesario valorar la atracción total de una esfera homogénea sobre una partícula material situada fuera de ella; cada una de las partículas de la esfera atraerá a la masa de la partícula con una fuerza que variará de una partícula a otra según las distancias y las masas presentes. ¿Cómo sumar esas infinitas acciones para lograr la acción total? Newton logro dominar la dificultad en 1685 demostrando que la esfera actúa sobre la partícula exterior como si toda su masa estuviera concentrada en su centro. La posesión de este teorema, más sencillo y hermoso de lo que el descubridor esperara, le permitió extender su ley, establecida para masas puntuales e irreales, a masas con volúmenes determinados, es decir a los* cuerpos reales".

Antonio J. Durán, en el artículo: *"De cómo se gestó y vino al mundo el cálculo infinitesimal" (Durán, 2000), expresa: "En el último cuarto del siglo XVII, Newton y Leibniz, de manera independiente, sintetizaron de la maraña de métodos infinitesimales usados por sus predecesores dos conceptos, los que hoy llamamos la derivada y la integral, (...). Para resolver todos los problemas de cuadraturas, máximos y mínimos, tangentes, centros de gravedad, etc., que habían ocupado a sus predecesores, bastaba echar a andar estos dos conceptos mediante sus correspondientes reglas de cálculo.(...) El primero en descubrirlo fue Newton, pero su fobia a publicar le hizo guardar casi en secreto su descubrimiento. (...) su primera obra sobre el cálculo "De analyse per aequationes numero terminorum infinitas" (...) fue finalizada en 1669 aunque sólo la publicó en 1711. La segunda obra de Newton sobre el cálculo fue escrita dos años más tarde en 1671 pero esperaría hasta 1737 para ver la luz: !diez años después de su muerte y 66 después de escrita!. Se trata de "De methodis serierum et fluxionum". Una pregunta que casi inmediatamente aflora en la mente es ¿por qué Newton tardó tanto en publicar sus resultados? (...) Newton era consciente de la débil fundamentación lógica de su método de cálculo de fluxiones (...). Este temor también está patente en su obra cumbre: Los Principia, donde optó por un lenguaje geométrico más riguroso −y obscuro− eliminando todo indicio de su cálculo que probablemente usó −se puede encontrar una única mención del mismo en el lema II de la sección II del libro II: la regla para derivar productos(...). Leibniz, más conocido como filósofo, fue el otro inventor del cálculo. Su descubrimiento fue posterior al de Newton, aunque Leibniz fue* *el primero en publicar el invento. (...) a partir de sumas y diferencias de sucesiones comienza a desarrollar toda una teoría de sumas y diferencias infinitesimales que acabarían en la gestación de su cálculo por el año 1680 y a diferencia de Newton sí lo publica en una de las revistas científico− filosóficas: Acta Eroditorum (...) con el título "Un nuevo método para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas". En este artículo de 6 páginas −e incomprensible como él mismo luego reconoce− Leibniz recoge de manera esquemática sin demostraciones y sin ejemplos su cálculo diferencial −"un enigma más que una explicación" dijeron de él los hermanos Bernoulli−. (...)El siguiente artículo de Leibniz se llamó "Sobre una geometría altamente oculta y el análisis de los indivisibles e infinitos", también publicado en las Actas Eroditorum en 1686".*

La dialéctica como base para la fundamentación del Cálculo Diferencial

La respuesta a la interrogante sobre la demora en la publicación de los resultados y en la fundamentación, por parte de sus creadores, puede ser la siguiente: la insuficiente fundamentación lógica, tanto de la teoría de las fluxiones de Newton, como de los métodos diferenciales de Leibniz. Ambos trataron de resolver estos problemas dentro de los marcos de la lógica formal: Newton creó el método de las primeras y últimas relaciones (forma primitiva de la teoría de los límites). El método se basa en la consideración de las relaciones "casi - casi nacientes" (primeras relaciones) y las relaciones "casi - casi en desaparición" (últimas relaciones). Leibniz intentó varios procedimientos, entre ellos: tratamiento de los infinitesimales como magnitudes no Arquimedianas, referencias al método de exhaución de Arquímedes, ideas sobre límites no desarrolladas, etc. No obstante, este problema no pudo ser resuelto ni por Newton ni por Leibniz. Sin embargo, el concepto de Límite, esencial en la fundamentación de esta teoría −al cual ambos se aproximaron, lo utilizaron implícitamente, pero no pudieron formular explícitamente− es un concepto no algorítmico, con él no es posible establecer una secuencia de operaciones lógicas que permitan su obtención.

Esta contradicción entre los grandes logros del Cálculo Diferencial e Integral, y la insuficiencia en su fundamentación lógica, le dieron un carácter místico, que perduró durante mucho tiempo. Al respecto, Carlos Marx planteó: "*Así, ellos mismos creían en el carácter misterioso del Cálculo recién descubierto, el cual daba resultados correctos (...) y matemáticamente positivos por una vía incorrecta. De este modo, ellos mismos se mistificaban,...*" (Ribnikov, 1987, p. 232).

En realidad, el problema sólo puede resolverse a partir de la lógica dialéctica, es decir, tomando el objeto de estudio en su desarrollo, en su automovimiento. Por ejemplo, el concepto de Derivada −uno de los conceptos centrales del Cálculo Diferencial e Integral−, puede concebirse como el límite de una sucesión de cocientes, donde el numerador representa la variación de la función, y el denominador representa la variación de la variable independiente. Cada uno de estos cocientes representa la variación media (o promedio) de la función, en el intervalo determinado por la variable independiente. Si analizamos el fenómeno en su movimiento, podemos entonces aplicarle las leyes de la dialéctica: podemos considerar a la Derivada en su unidad dialéctica con cada uno de los cocientes descritos anteriormente, al mismo tiempo como su negación dialéctica, pues los presupone y los supera, ya que mantiene la característica de ser un cociente de incrementos de la función, y adquiere una cualidad que no posee ninguno de ellos: el de ser una variación instantánea. Esta nueva cualidad se alcanza a partir de una acumulación cuantitativa: sucesión de cocientes con intervalos cada vez más

pequeños (proceso de paso al límite), la cual da a su vez paso a una nueva acumulación cuantitativa.
Análisis similares pueden realizarse para los demás conceptos básicos del Cálculo. El concepto de límite, y con él la fundamentación lógica del Cálculo Diferencial e Integral, no pudo lograrse hasta el Siglo XIX, con los trabajos de Augustin Louis Cauchy (1789-1857) mediante sus famosas conferencias, las cuales fueron publicadas en tres libros: "Curso de análisis" (1821); "Resumen de conferencias sobre el cálculo de infinitesimales" (1823) y "Conferencias sobre aplicaciones del análisis a la geometría" (dos tomos: 1826,1828). Estos libros tienen una importancia especial, porque en ellos por primera vez, el Análisis Matemático se construye sobre la teoría de límites. De esta forma, la Ciencia logró una nueva conquista, pues pudo hacer uso nuevamente de la lógica formal, para que, junto con la dialéctica, sirviera como fundamento para esta importante rama de la Matemática.
Asimismo, la fundamentación del concepto de límite permitió solucionar problemas planteados desde la antigüedad, tales como las "paradojas" (Paradoja de Zenón, Aquiles y la tortuga, etc.), que pudieron ser resueltas definitivamente a partir del concepto de Serie.

Incidencia en la Enseñanza de la Matemática
En la enseñanza de la Matemática se presentan dificultades en la formación de los conceptos. En particular en la enseñanza del Cálculo Diferencial se presentan dificultades en la formación de los conceptos básicos: Límite, Derivada, Diferencial.
Estos conceptos es usual que se introduzcan en una Conferencia, en su forma acabada, abstracta, lo cual ocasiona grandes dificultades en su asimilación. La comprensión de la importancia de la dialéctica en la génesis de estos conceptos nos ha permitido concebir clases en las que el alumno pueda apropiarse de la lógica de los conceptos antes de que se estudie su definición. Estas clases contribuyen a que el alumno trabaje en aspectos gráficos, algorítmicos, etc., que incluyen la experimentación en un Laboratorio de Computación.
Por ejemplo, previo a la introducción del concepto de Límite, incluimos clases donde se trabaja en:

- ♦ Estudio de gráficas de funciones, para analizar la tendencia al aproximarse a un punto.
- ♦ Desarrollo de habilidades en el trabajo algebraico con funciones, cálculo de incrementos de funciones, etc.
- ♦ Cálculo de valores funcionales en puntos próximos a un punto dado.

En particular, en el Laboratorio de Computación, el alumno puede trabajar en dos sentidos:

- ♦ Investigar sobre el comportamiento de una función cuando la variable independiente se aproxima a un valor determinado. (En este sentido sugerimos, entre otros asistentes, el DERIVE, puesto que su graficador posee elementos carentes en otros graficadores, como la posibilidad de cambiar la escala en uno u otro eje, o en ambos (ZOOM), lo que permite que el alumno pueda trabajar en la relación entre la aproximación en el dominio y la aproximación en la imagen, aspecto de gran importancia en la formación de este concepto).
- ♦ Experimentar mediante tablas de valores funcionales sobre la posibilidad de, a partir de una acumulación cuantitativa (selección de valores cada vez menores del incremento), obtener un valor, cualitativamente diferente, en esencia, al valor de la función en el punto al cual se aproxima.

A manera de ejemplo, mostramos algunos de los ejercicios posibles, en los cuales recomendamos la utilización del Tabulador Electrónico EXCEL. (Jiménez, inédito): *Ejercicios Capítulo II.*

Ejercicio. Dadas las siguientes funciones, complete las tablas correspondientes y dé un estimado del comportamiento de la función al aproximarse al valor indicado:

1)

x	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1
$f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$				...	?	...			

De manera análoga, previo a la introducción del concepto de Derivada, incluimos clases donde se trabaja en:

- ♦ Cálculo de incrementos de funciones, cocientes de incrementos (razones de cambio), tanto para funciones reales de una variable como para funciones reales de varias variables y funciones vectoriales.
- ♦ Determinación de razones de cambio medias en problemas concretos (Velocidad media, pendiente de rectas secantes a una curva, etc.).
- ♦ Cálculo de límites de razones de cambio medias (casos particulares de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$).

En particular, en el Laboratorio de Computación, el alumno puede experimentar mediante tablas de valores funcionales, en la determinación de razones de cambio medias para valores cada vez más pequeños del incremento. A manera de ejemplo, mostramos algunos de los ejercicios posibles. (Jiménez, inédito): *Ejercicios Capítulo III*.

Ejercicio. Complete las tablas siguientes y dé un estimado del límite correspondiente:

1) $f(x)=3x^2+2x$, $x_0=1$

Δx	0,1	0,01	0,001	...	0	...	-0,001	-0,01	-0,1
$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$				...	?	...			

Después del desarrollo de estas actividades, estamos en condiciones de establecer la definición de Límite, de Derivada, etc., con una mayor comprensión por parte de los estudiantes de la esencia de estos conceptos.

Conclusiones

En este trabajo se muestra como, a pesar de que las leyes de la lógica formal pueden considerarse asimismo como leyes de la Matemática, no puede absolutizarse su uso, pues en ocasiones ellas, por sí solas, no bastan para fundamentar todas las ramas de la Matemática. En particular mostramos cómo, para fundamentar los conceptos básicos del Cálculo Diferencial e Integral, que dependen del concepto de Límite, se requiere la utilización de la Lógica Dialéctica, y cómo su comprensión nos ha permitido diseñar el Proceso Docente de forma tal que se produzca una incidencia positiva en la formación de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial.

Referencias bibliográficas

Durán, A. J. (2000). *De cómo se gestó y vino al mundo el cálculo infinitesimal*. Disponible en: http://euler.us.es/~libros/calculo.html

Guetmanova, A, Panov N., Petrov, V. (1986). *Lógica: en forma simple sobre lo complejo*. Moscú: Editorial Progreso.

Guetmanova, A. (1986). *Lógica*. Moscú: Editorial Progreso.

Jiménez M., R. (inédito). Cálculo Diferencial. Texto docente.

Maza S., J. (2000). *Curso Historia de la Astronomía*. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Universidad de Chile. Disponible en: http://www.das.uchile.cl/cursos/eh28a.html

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Editorial MIR.